



**UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA – UNAD**

**ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS TECNOLOGÍA E INGENIERÍA**

**CONTENIDO DIDÁCTICO DEL CURSO: 332572– ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS**

**UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA**

**ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGIA E INGENIERÍA**

**PROGRAMA INGENIERIA INDUSTRIAL**

**332572 – ADMINISTRACION DE INVENTARIOS**

**CESAR AUGUSTO FIGUEREDO GRAZON**  
(Director Nacional)

**DUITAMA**  
Julio de 2014

## ASPECTOS DE PROPIEDAD INTELECTUAL Y VERSIONAMIENTO

El presente módulo fue diseñado en el año 2010 por el Ing. César Augusto Figueredo, tutor de la UNAD, y ubicado en el CEAD de Duitama, el Ing. César Figueredo es Ingeniero Industrial, especialista en Finanzas y Especialista en Pedagogía para el Desarrollo del Aprendizaje Autónomo, se ha desempeñado como tutor de la UNAD desde el 1998 hasta el año 2010.

El presente módulo ha tenido dos actualizaciones, en el año 2008, la segunda echa en el año 2009 y en el año 2013, por el Ing. César Figueredo, quien se desempeña actualmente como director del cuso a nivel nacional.

Three large, semi-transparent orange circles are arranged horizontally across the top of the page, behind the title.

## INTRODUCCIÓN

Este modulo es escrito para servir como texto guía en el curso de ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS, y esta dirigido principalmente a los estudiantes y persona afines que necesiten aplicar los diferentes modelos de inventarios y la formulación matemática de los mismos de manera que la información suministrada facilite la toma de decisiones oportunas que permitan el desarrollo normal de las actividades dentro de una organización.

El curso académico ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS, es de tipo teórico al cual le corresponden dos (2) créditos académicos y esta ubicado dentro de la formación profesional específica del programa de INGENIERIA INDUSTRIAL, de la UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA “UNAD”, la metodología empleada es a distancia, el proceso se fundamenta en el estudio independiente y autónomo con acompañamiento por parte del tutor.

El módulo consta de dos unidades didácticas, la primera unidad denominada **GENERALIDADES Y MODELOS BASICOS DE INVENTARIOS** tiene como finalidad dar a conocer al estudiante los principales conceptos, la terminología mas importante como lo es su definición, la importancia que tienen los inventarios dentro de una empresa, los principales sistemas de administración y los sistemas básicos para la Administración de Inventarios.

En la segunda unidad **SISTEMAS DE INVENTARIO PROBABILISTICOS**, se plantean los principales modelos de inventarios, en los cuales la demanda cambia con el tiempo y tiene como finalidad que el estudiante este en capacidad conocer y plantear un modelo para el control de inventarios de acuerdo a los requerimientos de necesidades que se pueda presentar en un momento dado dentro de una organización.

El objetivo principal del curso es proporcionar al estudiante un conjunto de conocimientos básicos y prácticos que le permitan conocer la importancia de la

administración de inventarios, manejar sus principales conceptos de manera que pueda desarrollar habilidades en la aplicación de diferentes técnicas y modelos que aseguren a las organizaciones una administración de inventarios eficiente, la cual sea capaz de cumplir con la demanda de productos y a la vez asegurar que las operaciones de producción y venta funcionen sin obstáculos al menor costo posible.

La identificación, interpretación y análisis de los elementos que componen los modelos de inventarios son uno de los propósitos de este curso lo mismo que examinar diseñar y proponer un modelo de inventario que permita satisfacer las necesidades reales de la empresa en lo que tiene que ver con la gestión de inventarios.

Para lograr esto es importante desarrollar en el estudiante una cultura investigativa basada en el aprendizaje autónomo con el fin de alcanzar aprendizajes significativos, para lo cual se deben tener en cuenta los factores que hacen posible el funcionamiento del sistema de aprendizaje en el contexto de la educación a distancia.

Para facilitar el autoaprendizaje es necesario consultar la bibliografía recomendada, utilizar la biblioteca virtual y el acceso a Internet, con esto se está también potenciando en los estudiantes la capacidad de investigación y de auto gestión para llegar al conocimiento según su proceso de aprendizaje.

Five large, semi-transparent orange circles are arranged in a pattern around the title 'INDICE DE CONTENIDO'.

## INDICE DE CONTENIDO

### **Unidad 1. GENERALIDADES Y MODELOS BASICOS DE INVENTARIOS**

#### **Capítulo 1. GENERALIDADES.**

Lección 1. Aspectos Básicos de los Modelos de Inventarios.

Lección 2. Costos asociados a los inventarios.

Lección 3. Tipos de Demanda en los inventarios.

Lección 4. Clasificación Funcional de los Inventarios.

Lección 5. Sistema de Inventarios ABC.

#### **Capítulo 2. MODELOS DE INVENTARIO DETERMINISTICOS.**

Lección 6. Modelos de Orden Económica.

Lección 7. Modelos de Lote Económico.

Lección 8. Descuentos por Cantidad.

Lección 9. Políticas para el Manejo de Inventarios.

Lección 10. Análisis de Sensibilidad en los Modelos de Inventarios.

#### **Capítulo 3. MODELO PARA MÚLTIPLES ARTÍCULOS CON RESTRICCIÓN DE RECURSOS.**

Lección 11. Modelo para Varios Artículos con Limitaciones en Almacenamiento.

Lección 12. Modelo para varios Artículos con limitaciones en varios Recursos (espacio y presupuesto).

Lección 13. Modelos con Demanda Determinística Dinámica (Modelos Sencillos)

Lección 14. Modelos con Demanda Determinística Dinámica (Modelos Óptimos).

Lección 15. Modelos con Demanda Determinística Dinámica (Modelos Heurísticos).

## Unidad 2. SISTEMAS DE INVENTARIO PROBABILISTICOS

Capítulo 1. Definiciones Básicas.

Lección 1. Definiciones acerca del nivel de inventario.

Lección 2. Requisiciones pendientes u órdenes perdidas.

Lección 3. Preguntas básicas para el control de inventarios

Lección 4. Modelo Estocástico para un solo Periodo.

Lección 5. Formas de Revisión del Inventario.

Capítulo 2. MODELOS ESTOCASTICOS DE REVISIÓN CONTINUA.

Lección 6. Modelo Estocástico con y sin Déficit.

Lección 7. Inventario Base.

Lección 8. Dos Contenedores.

Lección 9. Sistema (Q,R)

Lección 10. Sistema para determinar el nivel de existencias de reserva

Lección 11. EOQ.

Lección 12. Sistema (S,T)

Lección 13. Sistema (s,S)

Lección 14. Reabastecimiento opcional

Lección 15. Sistema (R, S)

BIBLIOGRAFIA.

ANEXOS.

### LISTADO DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Datos del ejemplo ABC	21
Tabla 2: Solución ABC.	21
Tabla 3. Datos para obtener el inventario ABC	22
Tabla 4. Determinación de la participación monetaria de cada artículo en el valor total de inventario.	23
Tabla 5. Datos ejemplo Descuentos en todas las unidades	51
Tabla 6. Datos Ejemplo cantidad Económica a Ordenar	58
Tabla 7. Datos ejemplo Cantidad Económica con Descuento Incremental.	62
Tabla 8. Desarrollo Inicial Cantidad Económica	63
Tabla 9. Sistemas de reaprovisionamiento del inventario.	65
Tabla 10. Datos Problema con restricciones de Almacenamiento.	80
Tabla 11. Cálculo de $\lambda$ para problemas con Restricción de Almacenamiento.	81
Tabla 12. Datos problema Demanda de periodo fijo.	85
Tabla 13. Datos problema Cantidad a Ordenar por Periodo	87
Tabla 14. Datos problema Lote por Lote.	88
Tabla 15. Datos problema Wagner-Whitin	89

Tabla 16. Desarrollo primer periodo Wagner-Whitin	90
Tabla 17. Desarrollo segundo periodo Wagner-Whitin.	90
Tabla 18. Desarrollo tercer periodo Wagner-Whitin.	91
Tabla 19. Desarrollo cuarto periodo Wagner-Whitin	91
Tabla 20. Datos ejemplo SILVER-MEAL	93
	Pág.
Tabla 21. Demanda aleatoria por periodo problema estocástico.	106
Tabla 22. Demanda durante le tiempo de anticipación problema Estocástico.	106
Tabla 23. Probabilidad de faltante o déficit durante el tiempo de anticipación.	107
Tabla 24. Probabilidad del tiempo de Anticipación	113
Tabla 25. Demanda en el tiempo de Anticipación y entre Pedidos.	114
Tabla 26. Demanda para un sistema (s,S).	118
Tabla 27. Resultados para todos los periodos sistema (s,S).	119

## LISTADO DE FIGURAS

	Pág.
Figura1. Modelos de Inventarios, en función del tipo de demanda.	25
Figura 2. Modelo de compra sin Déficit.	34
Figura 3. Modelo de Compra con Déficit.	42
Figura 4. Valores de $t_1$ y $t_2$ .	43
Figura 5. Modelo de Manufactura sin Déficit.	49
Figura 6 Modelo de Manufactura con Déficit.	55
Figura 7. Funciones de Costo	63
Figura 8. Comportamiento de un modelo administrado por el sistema P.	85

## UNIDAD 1

Nombre de la Unidad	GENERALIDADES Y MODELOS BASICOS DE INVENTARIOS
Introducción	La Administración de inventarios tiene como función principal proveer a la empresa de los materiales necesarios para su continuo y normal funcionamiento, pero tiene dos objetivos que se contraponen, por un lado se requiere minimizar la inversión en los inventarios, pero por otro lado se debe asegurar que la empresa cuente con los inventarios suficiente para hacer frente a la demanda que se presente, en esta primera unidad se presenta la terminología y los modelos de inventario con demanda determinística, los cuales son básicos para la Administración de Inventarios.
Justificación	El curso de Administración de Inventarios es fundamental en la formación profesional del Ingeniero Industrial ya que le permite atender una de las áreas más importantes de la empresa, la administración de inventarios busca determinar las reglas y procedimientos que se deben aplicar con el fin de reducir los costos relacionados con el valor y mantenimiento de existencias a fin de que la empresa pueda cumplir con los requerimientos de producción o la demanda de productos.
Intencionalidades Formativas	El objetivo principal de esta primera unidad es proporcionar al estudiante un conjunto de conocimientos básicos y prácticos que le permitan conocer la importancia de la administración de inventarios, manejar sus principales conceptos de manera que pueda desarrollar habilidades en la aplicación de diferentes técnicas y modelos de administración de inventarios con demanda determinística.

Denominación de capítulos	<ol style="list-style-type: none"><li>1. GENERALIDADES</li><li>2. MODELOS DE INVENTARIO DETERMINISTICOS.</li><li>3. MODELO PARA MÚLTIPLES ARTÍCULOS CON RESTRICCIÓN DE RECURSOS.</li></ol>
---------------------------	--



## CAPITULO 1: GENERALIDADES.

### Introducción

Los inventarios hacen relación con el almacenamiento de bienes para un uso posterior ya sea para ser utilizados en producción o servicios, o guardados para su comercialización, su propósito fundamental es proporcionar a la empresa los materiales necesarios, para un continuo y regular desenvolvimiento de sus actividades. Los inventarios es uno de los rublos más importantes dentro de la empresa.

Los inventarios se definen como el conjunto de bienes tangibles que posee una empresa para ser vendidos o consumidos en su proceso de producción o servicio y que posteriormente son comercializados.

La administración de inventarios tiene como objetivo garantizar el suministro permanente de bienes para hacer frente a la demanda ya sea por parte de ventas o producción. Pero por otra parte se debe minimizar las inversiones en inventario pues los recursos no utilizados en inventarios se pueden utilizar en otros proyectos rentables para la empresa, teniendo en cuenta que reduciendo las cantidades invertidas en inventarios se minimiza la inversión pero se corre el riesgo de no estar en capacidad de cumplir las demandas de producción o ventas.

El problema fundamental de la administración de inventarios se puede plantear mediante dos preguntas fundamentales, cuanto pedir? y cada cuando pedir?, la determinación de la cantidad de inventario que deberá mantenerse, la fecha en que deberán colocarse los pedidos y las cantidades de unidades a ordenar.

Si la finalidad de la administración de inventario fuera solo minimizar las ventas satisfaciendo instantáneamente la demanda, la empresa almacenaría cantidades excesivamente grandes del producto y así no incluiría en los costos asociados con una alta satisfacción ni la perdida de un cliente etc. Sin embargo resulta

extremadamente costoso tener inventarios estáticos paralizando un capital que se podría emplear con provecho en otros proyectos. La empresa debe determinar el nivel apropiado de inventarios en términos de la opción entre los beneficios que se esperan no incurriendo en faltantes y el costo de mantenimiento del inventario que se requiere.

A continuación se explican estos dos factores importantes para la administración de inventarios

**1. MINIMIZAR LA INVERSIÓN EN LOS INVENTARIOS:** El objetivo de la Administración de Inventarios debe ser el de mantener un nivel bajo de inventarios, pero el hecho de tener un inventario cero y producir sobre pedido le impide a la empresa satisfacer de forma inmediata los pedidos de los clientes, por otro lado no se contaría con un inventario que permita asegurar un programa de producción, lo que implica una pérdida potencial de clientes pues estos buscaran empresas que puedan satisfacer sus necesidades inmediatamente.

Toda empresa busca minimizar la inversión en inventarios porque resulta costoso su financiamiento y su almacenamiento.

**2. AFRONTAR LA DEMANDA:** Los costos asociados con la pérdida potencial de clientes insatisfechos se podría evitar con el almacenamiento de grandes cantidades de producto, sin embargo resulta excesivamente costoso mantener un capital paralizado el cual puede ser utilizado en otros proyectos.

Por lo anterior mente expuesto es necesario determinar un nivel apropiado de inventarios manteniendo un balance entre el costo en que se incurre debido a los faltantes y el costo de mantener determinado nivel de inventarios.

Por otra parte la Administración de Inventarios es primordial dentro de un proceso de producción ya que existen diversos procedimientos que nos va a garantizar como empresa, lograr la satisfacción para llegar a obtener un nivel óptimo de producción. Dicha política consiste en el conjunto de reglas y procedimientos que aseguran la continuidad de la producción de una empresa, permitiendo una

seguridad razonable en cuanto a la escasez de materia prima e impidiendo el exceso de inventario, con el objeto de mejorar la tasa de rendimiento. Su éxito va estar enmarcado dentro de la política de la administración de inventario.

Chase, Aquilano, Jacobs<sup>1</sup> en su libro Administración de producción y operaciones sostiene que toda firma (incluyendo las operaciones Jit) mantienen una provisión de inventario por las siguientes razones:

1. Mantener una Independencia en las operaciones. Un suministro de materiales en un centro permite que ese centro tenga flexibilidad en las operaciones.
2. Ajustarse a la variación de la demanda de productos. Si la demanda de un producto se conoce con precisión, puede ser posible (aunque no necesariamente económico) producir el bien para satisfacer de manera exacta la demanda.
3. Permitir una flexibilidad en la programación de la producción. Una provisión de inventario libera al sistema de producción de la presión de sacar los bienes.
4. Proveer una salvaguardia para la variación en el tiempo de entrega de materias primas. Cuando se le pide a un vendedor que despache un material, pueden presentarse demoras por una serie de razones: una variación normal en el tiempo de despacho, una escasez de material en la planta del vendedor etc.
5. Sacarle provecho al tamaño del pedido de compra económico. Colocar un pedido tiene sus costos: trabajo, llamadas telefónicas, mecanografía correo etc. En consecuencia entre mas grande sea el tamaño de cada pedido, menor será el número de pedidos que debe escribirse.

## **Lección 1: Aspectos Básicos de los Modelos de Inventarios.**

Generalmente los inventarios representan una gran inversión, generalmente representan un rubro muy importante en el balance de una empresa, lo mismo sucede con las compras en el estado de resultados, por lo tanto son muy importantes y deben ser responsables las decisiones respecto a las cantidades a mantener en el inventario. Veamos entonces porque es importante la

---

<sup>1</sup> Chase Aquilano, Jacobs (2001). Administración de Producción y Operaciones. México: Mc.Grawhill. pg.582.

administración del inventario y cuales son las características mas importantes de un modelo de inventarios.

**EL PROBLEMA DE LOS INVENTARIOS<sup>2</sup>:** Un problema de inventario existe cuando es necesario guardar bienes físicos o mercancías con el propósito de satisfacer la demanda sobre un horizonte de tiempo especificado (finito o infinito). Casi cada empresa debe almacenar bienes para asegurar un trabajo uniforme y eficiente en sus operaciones. Las decisiones considerando cuándo hacer pedidos y en qué cantidad, son típicas de cada problema de inventario.

La demanda requerida puede satisfacerse almacenando una vez según todo el horizonte de tiempo o almacenando separadamente cada unidad de tiempo durante el horizonte. Los dos casos que pueden considerarse son sobre-almacenamiento (con respecto a una unidad de tiempo) o sub-almacenamiento (con respecto al horizonte completo).

Un sobre-almacenamiento requeriría un capital invertido superior por unidad de tiempo pero menos ocurrencias frecuentes de escasez y de colocación de pedidos. Un sub-almacenamiento por otra parte disminuiría el capital invertido por unidad de tiempo pero aumentaría la frecuencia de los pedidos así como el tiempo de estar sin mercancía. Los dos extremos son costosos. Las decisiones considerando la cantidad ordenada y el tiempo en el cual se ordena pueden, por consiguiente, estar basadas sobre la minimización de una función de costo apropiada la cual balancea los costos totales resultantes de sobre-almacenamiento y sub-almacenamiento.

Antes de comentar acerca de los sistemas de inventarios se presentan primero características básicas de un sistema de inventarios:

**Parámetros económicos:** estos parámetros incluyen los siguientes:

**a. Costo fijo.** Se refiere a los costos administrativos y de oficina al elaborar una orden de compra o de producción. Esto implica el costo fijo asociado a la colocación de un pedido o con la preparación inicial de una instalación de producción. El costo fijo usualmente se supone independiente de la cantidad ordenada o producida.

---

<sup>2</sup> Bellini M.Franco (2004). Investigación de Operaciones. [En http://www.investigacion-operaciones.com/Inventario](http://www.investigacion-operaciones.com/Inventario).

**b. Precios de compra o costo de producción.** Este parámetro de especial interés cuando pueden obtenerse descuentos por mayoreo o rebajas en precio o cuando grandes corridas de producción pueden dar como resultado una disminución en el costo de la misma. En estas condiciones la cantidad ordenada debe ajustarse para aprovechar de estos cambios en el precio.

**c. Precio de venta.** En algunas situaciones de inventario la demanda puede ser afectada por la cantidad almacenada. En tales casos el modelo de decisión está basado en un criterio de maximización de beneficios el cual comprende el ingreso de venta de la mercancía. El precio de venta unitario puede ser constante o variable dependiendo, por ejemplo, de si se permite un descuento o no en la cantidad.

**d. Costo de mantenimiento del inventario.** Esto representa el costo de tener el inventario en el almacén. Incluye el interés sobre capital invertido, costos de almacenamiento, costos de manejo, costos de depreciación, etc. Los costos de llevar el inventario usualmente se supone que varían directamente con el nivel de inventario, así como con el tiempo que el artículo se tiene en almacén.

**Demanda.** El modelo de demanda de una mercancía puede ser determinista o probabilista. En el caso del determinista se supone que se conocen con certeza las cantidades necesarias sobre períodos subsecuentes. Esto puede expresarse según períodos iguales en términos de demandas constantes conocidas, o en función de demandas variables conocidas. Los dos casos se denominan demandas estática y dinámica, respectivamente:

La demanda probabilísticas ocurre cuando los requisitos durante un cierto período no se conocen con certeza si no que su modelo puede describirse por una distribución conocida de probabilidad. En este caso, se dice que la distribución de probabilidad es estacionaria o no estacionaria en el tiempo. (Estos términos son equivalentes a demandas estática y dinámica en el caso determinista).

La demanda para un período dado puede satisfacerse instantáneamente al inicio del período o uniformemente durante dicho lapso. El efecto de demandas instantáneas y uniformes deberá reflejarse directamente en el costo total de llevar el inventario.

**Ciclo para ordenar.** Consiste en la medida de tiempo de la situación de inventario. Un ciclo de órdenes o pedidos puede identificarse por el período entre dos órdenes sucesivas, lo último puede iniciarse en una de dos formas:

**a. Revisión continua** donde un registro del nivel de inventario se actualiza continuamente hasta que se alcanza un cierto límite inferior, en cuyo punto se coloca un nuevo pedido. Esto se conoce algunas veces como el sistema de "dos depósitos".

**b. Revisión periódica** donde los pedidos se hacen usualmente a intervalos igualmente espaciados.

**Demoras en la entrega:** Cuando se coloca un pedido, puede entregarse inmediatamente o puede requerir algún tiempo antes de que la entrega se efectúe. El tiempo entre la colocación de un pedido y su surtido se conoce como demora en la entrega. En general, las holguras de entrega pueden ser deterministas o probabilistas.

**Reabasto del almacén:** aunque un sistema de inventario puede operar con demora en las entregas, el abastecimiento real del almacén puede ser instantáneo o uniforme. El instantáneo ocurre cuando el almacén compra de fuentes externas. El uniforme puede ocurrir cuando el producto se fabrica localmente dentro de la organización. En general, un sistema puede operar con demora positiva en la entrega y también con reaprovisionamiento de almacén

**Horizonte de Tiempo:** el horizonte define el período sobre el cual el nivel de inventarios estará controlado. Este horizonte puede ser finito o infinito, dependiendo de la naturaleza o la demanda.

**Abastecimiento múltiple:** Un sistema de inventario puede tener varios puntos de almacenamiento (en lugar de uno). En algunos casos estos puntos de almacenamiento están organizados de tal manera que un punto actúa como una fuente de abastecimiento para algunos otros puntos. Este tipo de operación puede repetirse a diferentes niveles de tal manera que un punto de demanda pueda llegar a ser un nuevo punto de abastecimiento. La situación usualmente se denomina sistema de abastecimiento múltiple.

**Número de artículos:** Un sistema de inventarios puede comprender más de un artículo (mercancías). Este caso es de interés, principalmente si existe una clase

de interacción entre los diferentes artículos. Por ejemplo, estos pueden competir en espacio o capital total limitados.

## Lección 2: Costos asociados a los inventarios.

La meta de la Administración de Inventarios es proporcionar los inventarios necesarios para sostener las operaciones al más bajo costo posible. En tal sentido el primer paso que debe seguirse para determinar el nivel óptimo de inventario son, los costos que intervienen en su compra y su mantenimiento, y que posteriormente, en que punto se podrían minimizar estos costos.

Excluyendo el costo real de la mercancía ( $C_1$ ), los costos que origina el inventario pueden dividirse en tres grandes grupos: costos de pedido, costos de mantenimiento de inventario y costo total.

**Costo de Pedido ( $C_2$ ):** Es independiente de la cantidad pedida ya sea para compra o para producción. Incluye los gastos administrativos fijos para formular y recibir un pedido, esto es, el costo de elaborar una orden de compra, de efectuar los límites resultantes y de recibir y cortejar un pedido contra su factura, o los costos de preparación de la producción. Los costos de pedidos se formulan normalmente en términos de unidades monetarias por pedido.

**Costos de mantener el inventario ( $C_3$ ):** Incluye el costo de suministrar el espacio físico para almacenar los artículos, los costos relacionados con impuestos y seguros, los costos relacionados con roturas, deterioros y obsolescencia, también se incluyen el costo de oportunidad dada una inversión alternativa, este último es considerado el aspecto más importante al momento de determinar los costos.

De acuerdo con lo propuesto por Steven Nahamias, el valor de la tasa de interés que corresponde al costo de oportunidad de la inversión alternativa se relaciona con varias medidas contables usuales, que incluyen la tasa interna de retorno, el rendimiento de los activos, y la tasa mínima que haría atractiva una inversión para la empresa.<sup>3</sup>

Como por lo general este costo viene dado en unidades monetarias, y no en porcentaje la fórmula a aplicar sería la siguiente:

<sup>3</sup> S. NAHAMIAS, Steven, (2004), Análisis de la Producción y las Operaciones, México: Edt.CECSA.

$$C3 = I \cdot C1$$

Donde:

I = tasa de interés del costo de oportunidad.

C1= Valor monetario de una unidad de inventario.

El costo de mantener el inventario es variable por unidad resultante de mantener un artículo durante un periodo.

**Costo de escasez (C4):** Son los costos originados por el hecho de no tener los bienes cuando son solicitados, incluye tanto el costo por pérdida de ingresos, como el costo por la pérdida del cliente o el buen nombre de la empresa.

Cuando ocurre un faltante el pedido se puede aplazar, se analiza cuanto falta y por cuanto tiempo el costo varía directamente con la cantidad y con el tiempo.

El pedido se pierde cuando no se puede aplazar y este costo varía solamente con la cantidad que hace falta.

### Lección 3: Tipos de Demanda en los Inventarios.

El otro aspecto muy importante dentro de la administración de inventarios es determinar el tipo de demanda del modelo. Las decisiones en inventarios son tomadas en función de como se espera que sea la demanda futura, (ver figura 1), la cual puede ser clasificada como:

**DEMANDA INDEPENDIENTE:** Se tiene una demanda independiente, cuando la cantidad de producto mantenida en el inventario depende principalmente de las condiciones del mercado y no está relacionada con el consumo de otro producto, generalmente se presenta en la venta de productos al menudeo. Por ejemplo la

venta de carros particulares en una semana no se ve afectada por la demanda de carros de servicio público en esa semana.

**DEMANDA DEPENDIENTE:** En este caso la demanda de un artículo se ve afectada por la demanda de otro, para la elaboración de un determinado producto se requiere de otros productos, por ejemplo los cambios en la demanda de carros afecta la demanda de llantas.

**DEMANDA DETERMINISTICA:** Cuando la demanda de un producto es conocida con certeza.

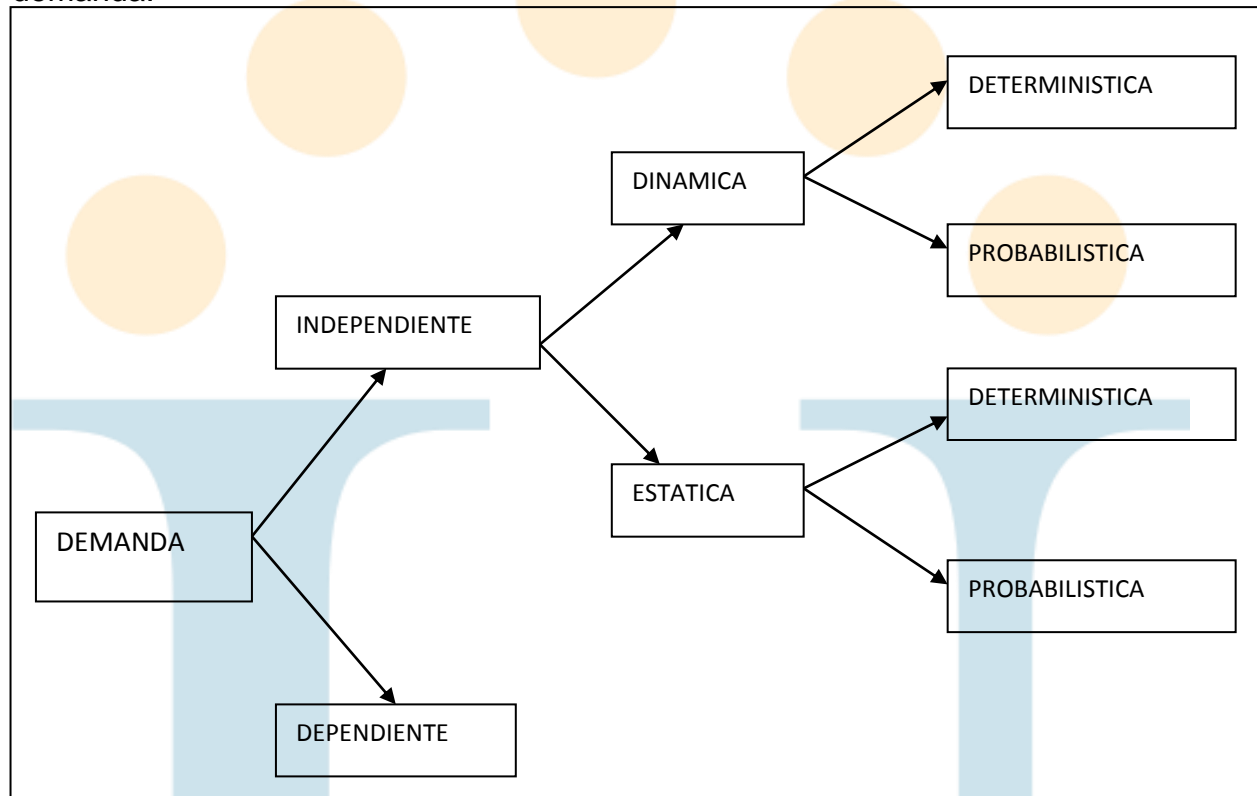
**DEMANDA DETERMINISTICA ESTATICA:** La demanda de un producto se conoce con certeza y es constante para todos los periodos.

**DEMANDA PROBABILISTICA:** La demanda es descrita mediante una función de densidad de probabilidad, representa la incertidumbre y variabilidad de la demanda.

**DEMANDA PROBABILISITCAESTATICA:** La demanda es aleatoria y tiene una distribución de probabilidad, pero es igual para todos los periodos.

**DEMANDA PROBABILISTICA DINAMICA:** La demanda es probabilística con una distribución de probabilidad variable en cada periodo.

FIGURA1. Modelos de Inventarios, en función del tipo de demanda.



Para Hugo Bastidas (2005), la administración de inventarios, en general, se centra en cuatro aspectos básicos:<sup>4</sup>

1. Cuantas unidades deberían ordenarse o producirse en un momento dado.
2. En que momento deberían ordenarse o producirse el inventario.
3. Que artículos del inventario merecen una atención especial.
4. Puede uno protegerse contra los cambios en los costos de los artículos del inventario.

<sup>4</sup> Bastidas Hugo (2005). Administración y Control de Inventarios. Consultado en 2007 en <http://senavirtual.edu.co/CURSOS>.

El inventario permite ganar tiempo ya que ni la producción ni la entrega pueden ser instantánea, se debe contar con existencia del producto a las cuales se puede recurrir rápidamente para que la venta real no tenga que esperar hasta que termine el proceso de producción.

Este permite hacer frente a la competencia, si la empresa no satisface la demanda del cliente se ira con la competencia, esto hace que la empresa no solo almacene inventario suficiente para satisfacer la demanda que se espera, si no una cantidad adicional para satisfacer la demanda inesperada.

El inventario permite reducir los costos a que da lugar la falta de continuidad en el proceso de producción. Además de ser una protección contra los aumentos de precios y contra la escasez de materia prima.

Si la empresa provee un significativo aumento de precio en las materias primas básicas, tendrá que pensar en almacenar una cantidad suficiente al precio mas bajo que predomine en el mercado, esto tiene como consecuencia una continuación normal de las operaciones y una buena destreza de inventario.

1. Establecer relaciones exactas entre las necesidades probables y los abastecimientos de los diferentes productos.
2. Definir categorías para los inventarios y clasificar cada mercancía en la categoría adecuada.
3. Mantener los costos de abastecimiento al más bajo nivel posible.
4. Mantener un nivel adecuado de inventario.
5. Satisfacer rápidamente la demanda.
6. Recurrir a la informática.

Algunas empresas consideran que no deberían mantener ningún tipo de inventario porque mientras los productos se encuentran en almacenamiento no generan rendimiento y deben ser financiados. Sin embargo es necesario mantener algún tipo de inventario porque:

1. La demanda no se puede pronosticar con certeza.
2. Se requiere de un cierto tiempo para convertir un producto de tal manera que se pueda vender.

Además de que los inventarios excesivos son costosos también son los inventarios insuficientes, porque los clientes podrían dirigirse a los competidores si los productos no están disponibles cuando los demandan y de esta manera se pierde el negocio. La administración de inventario requiere de una coordinación entre los departamentos de ventas, compras, producción y finanzas; una falta de coordinación nos podría llevar al fracaso financiero.

#### **Lección 4: Clasificación Funcional de los Inventarios.**

La función principal de los inventarios es la de servir de amortiguamiento y desacoplamiento. Funciona como amortiguador ante las variaciones entre la demanda de los clientes y la capacidad de producción de los fabricantes, o entre los requerimientos de producción y la disponibilidad de insumos en el proceso, etc. Los inventarios también funcionan como desacoplamiento, es decir que separa la demanda de la dependencia inmediata de la fuente de abastecimientos. Generalmente la clasificación funcional<sup>5</sup> de los inventarios esta dada por los Inventarios de Anticipación, Inventarios por Tamaño del Lote, Inventarios de Fluctuación, Inventarios de Transportación,

**Inventarios de Anticipación:** Estos son inventarios hechos con anticipación a las épocas de mayor venta, a programas de promoción comercial, posibles huelgas, o a un periodo de cierre de la planta. Los inventarios de anticipación permiten a una organización hacer frente por adelantado a una emergencia, en la demanda o a una oferta insuficiente, Básicamente, los inventarios de anticipación almacenan horas-trabajo y horas-máquina para futuras necesidades y limitan los cambios en las tasas de producción.

**Inventario de Tamaño de Lote:** con frecuencia es imposible o impracticable fabricar o comprar artículos al mismo ritmo al cual se consumen (eficiencia en la producción), Por lo tanto buscar la economía en la fabricación o en la compra conduce a comprar o producir de forma intermitente los artículos o materiales en

---

<sup>5</sup> FOGARTY Donal. Administración de la Producción e Inventarios. Edt. Continental, México. 1998.

una cantidad (Tamaño del Lote) suficiente para satisfacer la demanda relativamente estable durante cierto periodo.

**Inventarios de Fluctuación<sup>6</sup>:** Existe fluctuación tanto en la demanda como en la oferta. Estos inventarios se llevan porque la cantidad y ritmo de las ventas y de producción no pueden predecirse con exactitud. Los pedidos pueden promediar 100 unidades por semana para un artículo dado. Pero hay semanas en que las ventas sean elevadas como 300 ó 400 unidades el material puede recibirse en stock normalmente tres semanas después de que fue solicitado a la fábrica, pero ocasionalmente puede llevar 6 semanas después de que se solicitó. Estas fluctuaciones en la demanda y la oferta pueden componerse con los stocks de reserva o stocks de seguridad, nombres usuales para los inventarios de fluctuación. Los inventarios de fluctuación existen en centros de trabajo cuando el flujo de trabajo en estos centros no puede equilibrarse completamente. Los inventarios de fluctuación, se conocen como inventarios de seguridad, inventario de amortiguamiento, o inventario de reserva, o inventarios de estabilización los cuales pueden incluirse en el plan de producción de manera que los niveles de producción no tengan que cambiar para enfrentar las variaciones aleatorias de la demanda.

**Inventarios de Transportación (en Tránsito):** Estos existen porque el material debe moverse de un lugar a otro. No siempre las etapas del proceso se encuentran adyacentes, es frecuente que los componentes se fabriquen en otra parte del país o del mundo, o en forma similar, los productos terminados se embarcan desde distancias considerables para ser entregados a los distribuidores o clientes. El inventario depositado en un camión y que se va a entregar a un almacén puede estar en camino a 10 días. Mientras el inventario se encuentra en camino, no puede tener una función útil para las plantas o los clientes: exclusivamente por el tiempo de transporte.

En general los artículos en movimiento de una etapa del proceso a la siguiente se les denomina inventarios de transportación o inventarios en tránsito, incluyen todos aquellos artículos embarcados desde las bodegas de productos terminados a los clientes, así como aquellos productos que una organización embarca de una de sus plantas a otra.

---

<sup>6</sup> <http://pdf.rincondelvago.com/inventarios>

## Lección 5: Sistemas de Inventario ABC

Se puede afirmar que uno de los primeros pasos para la administración y análisis de un sistema de inventarios es realizar un análisis ABC. Este sistema permite determinar que artículos representan la mayor parte de la inversión y si se justifica mantener invertidos estos recursos.

El sistema ABC utiliza el principio económico planteado por VILFREDO PARETO, quien estudió la distribución de la riqueza en el siglo XIX: Gran parte de la riqueza pertenece a un pequeño segmento de la población.

Ford Dickie (1951) aplica este principio a la administración de inventarios y lo llamó análisis ABC.

Dado que mantener un nivel de inventario implica un capital inactivo es natural que se ejerza un control sobre aquellos artículos que representen una mayor inversión en capital, al contrario aquellos artículos que contribuyen muy poco en la inversión en capital merecen poca atención.

El Sistema ABC permite establecer y determinar en una forma sencilla cuales artículos son de mayor valor y cuales de menor valor de manera que se pueda tomar decisiones eficientes lo cual permite optimizar la administración de recursos asignados a los inventarios.

El sistema ABC clasifica los artículos del inventario en tres grupos:

Grupo A: Se incluyen los artículos más importantes para efectos de control. Aquellos que contribuyen al 80% del valor monetario acumulado y generalmente constituyen alrededor del 20% de los artículos. Como se puede apreciar representan pequeñas cantidades de artículos costosos los cuales deben estar sujetos a un estrecho control, se utilizan procedimientos complejos de pronóstico y debe tenerse cuidado al estimar los diversos parámetros de costo para establecer las políticas de operación.

Grupo B: Corresponde a aquellos artículos de importancia secundaria, corresponden a valores monetarios porcentuales entre el 80% y el 95%, y comprende alrededor del 25% de todos los artículos. A estos artículos se les aplica un control moderado, los artículos se pueden revisar de forma periódica, se solicitan por grupos y no de forma individual y se utilizan métodos de pronóstico menos complicados.

Grupo C: Son artículos de importancia reducida, corresponden entonces al 5% del valor monetario porcentual y comprenden mas o menos el 55% de los artículos. A estos artículos se les ejerce un grado mínimo de control, se deben realizar pedidos de gran tamaño con el fin de minimizar la frecuencia de pedidos

Esta clasificación es arbitraria pudiendo existir un número diferente de grupos Si se desea un mayor refinamiento, también el % exacto de artículos de cada clase varía de un inventario al siguiente. Esta relación empírica formulada por Wilfredo Pareto, ha demostrado ser una herramienta muy útil y sencilla de aplicar a la gestión empresarial. Permite concentrar la atención y los esfuerzos sobre las causas más importantes de lo que se quiere controlar y mejorar.

El procedimiento a seguir para el sistema e inventarios ABC es el siguiente:

- Determinar la participación monetaria de cada artículo en el valor total del inventario. (Multiplicar el costo unitario de cada artículo por el número total de unidades demandadas).
- Calcular porcentaje acumulado de artículos basado en el número total de artículos.
- Calcular porcentaje acumulado de uso del dinero basado en el uso total.
- Tabular los artículos del inventario en orden descendente según el total de dinero invertido en cada ítem del inventario.
- Graficar la curva ABC del porcentaje acumulado del uso del dinero en función del porcentaje acumulado de artículos.

Ejemplo: Clasificar por el sistema ABC los Productos que se presentan en la tabla 1.

Tabla 1: Datos del ejemplo ABC

Artículo	Precio Unitario	Cantidad Utilizada
Prod_1	2382	251

Prod_2	852	109
Prod_3	3604	318
Prod_4	1337	69
Prod_5	3660	765
Prod_6	3092	534
Prod_7	6510	59
Prod_8	5495	680
Prod_9	1626	656
Prod_10	5565	120
Prod_11	616	263
Prod_12	3348	1417

Solución:

1. Calcular la participación monetaria de cada artículo en el valor total del inventario. Ver tabla 2; para hallar el uso anual de dinero se multiplica precio unitario por la cantidad utilizada.

2. Para hallar el porcentaje de uso anual de dinero se divide la información del uso anual del dinero entre el total de esta columna.

Tabla 2: Solución ABC.

Artículo	Precio Unitario	Cantidad Utilizada	Uso Anual de Dinero	% Uso anual de Dinero
Pro_1	2382	251	597,882	3.5%
Pro_2	852	109	92,868	0.5%
Pro_3	3604	318	1,146,072	6.7%
Pro_4	1337	69	92,253	0.5%
Pro_5	3660	765	2,799,900	16.3%
Pro_6	3092	534	1,651,128	9.6%
Pro_7	6510	59	384,090	2.2%
Pro_8	5495	680	3,736,600	21.8%
Pro_9	1626	656	1,066,656	6.2%
Pro_10	5565	120	667,800	3.9%
Pro_11	616	263	162,008	0.9%
Pro_12	3348	1417	4,744,116	27.7%
<b>Total</b>			<b>17,141,373</b>	<b>100.0%</b>

3. Se tabula la información en orden descendente según el porcentaje del uso anual del dinero.

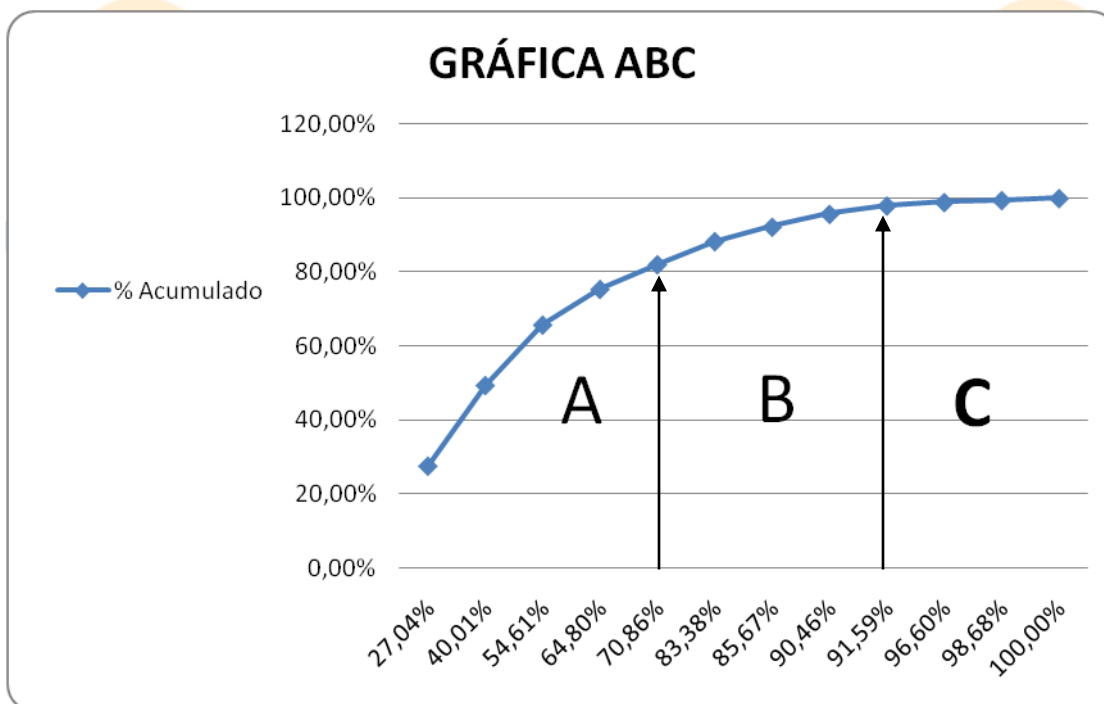
Artículo	Precio Unitario	Cantidad Utilizada	Uso Anual de Dinero	% Uso anual de Dinero
Pro_12	3348	1417	4,744,116	27.7%
Pro_8	5495	680	3,736,600	21.8%
Pro_5	3660	765	2,799,900	16.3%
Pro_6	3092	534	1,651,128	9.6%
Pro_3	3604	318	1,146,072	6.7%
Pro_9	1626	656	1,066,656	6.2%

Pro_10	5565	120	667,8	3.9%
Pro_1	2382	251	597,882	3.5%
Pro_7	6510	59	384,09	2.2%
Pro_11	616	263	162,008	0.9%
Pro_2	852	109	92,868	0.5%
Pro_4	1337	69	92,253	0.5%
<b>Total</b>			<b>17,141,373</b>	<b>100.0%</b>

#### 4. Clasificación de los productos

Artículo	Precio	Cantidad	Uso Anual	% Uso anual	% Acumulado	
	Unitario	Utilizada	de Dinero	de Dinero		
Pro_12	3348	1417	4.744.116	27,68%	27,68%	A
Pro_8	5495	680	3.736.600	21,80%	49,48%	A
Pro_5	3660	765	2.799.900	16,33%	65,81%	A
Pro_6	3092	534	1.651.128	9,63%	75,44%	A
Pro_3	3604	318	1.146.072	6,69%	82,13%	B
Pro_9	1626	656	1.066.656	6,22%	88,35%	B
Pro_10	5565	120	667.800	3,90%	92,25%	B
Pro_1	2382	251	597.882	3,49%	95,73%	B
Pro_7	6510	59	384.090	2,24%	97,97%	C
Pro_11	616	263	162.008	0,95%	98,92%	C
Pro_2	852	109	92.868	0,54%	99,46%	C
Pro_4	1337	69	92.253	0,54%	100,00%	C
<b>Total</b>			<b>17.141.373</b>	<b>100%</b>		

## 5. Grafica ABC



6. Corresponde a la Zona A, los productos 12, 8, 5 y 6, debido a su alto porcentaje en el valor acumulado (75,44%). A la zona b Corresponde los productos 3,9,10 y 1, que corresponden al 95,73 % del valor acumulado, el 20.29 % del valor monetario, y el resto de productos corresponden a la clase C,

A continuación se presenta un ejemplo desarrollado por el ing Tomás A. r. Fucci<sup>7</sup> que permitirá visualizar cómo se determinan las tres zonas (A-B-C) en un inventario constituido por 20 artículos:

<sup>7</sup> Tomás A. R. Fucci (1999). Sistema de Inventario ABC. Consultado en 2008 en [www.unlu.edu.ar](http://www.unlu.edu.ar).

Tabla 3: *Datos para obtener el inventario ABC*

Art. N°	Consumo anual (unidades)	Costo unitario (\$)
1	5000	1.50
2	1500	8.00
3	10000	10.50
4	6000	2.00
5	3500	0.50
6	6000	13.60
7	5000	0.75
8	4500	1.25
9	7000	5.00
10	3000	2.00
11	6000	10.00
12	2000	15.00
13	6500	28.00
14	9300	31.00
15	3060	14.00
16	3177	4.00
17	1500	1.20
18	1962	8.00
19	7000	30.00

20	1246	15.00
----	------	-------

### **Solución**

Se debe determinar la participación monetaria de cada artículo en el valor total del inventario. Para ello se debe construir una tabla (ver tabla XXX) de acuerdo a lo siguiente:

Columna n° 1: Corresponde al n° de artículo.

Columna n° 2: Los porcentajes de participación de cada artículo en la cantidad total de artículos. Para nuestro ejemplo, como tenemos un inventario constituido por 20 artículos, cada artículo representa el 5% dentro del total ( $100\% / 20 \text{ art.} = 5\%$ )

Columna n° 3: Representa la valorización de cada artículo. Para obtenerla, multiplicamos su precio unitario por su consumo. Al pie de la columna obtenemos el valor de nuestro inventario de los 20 artículos.

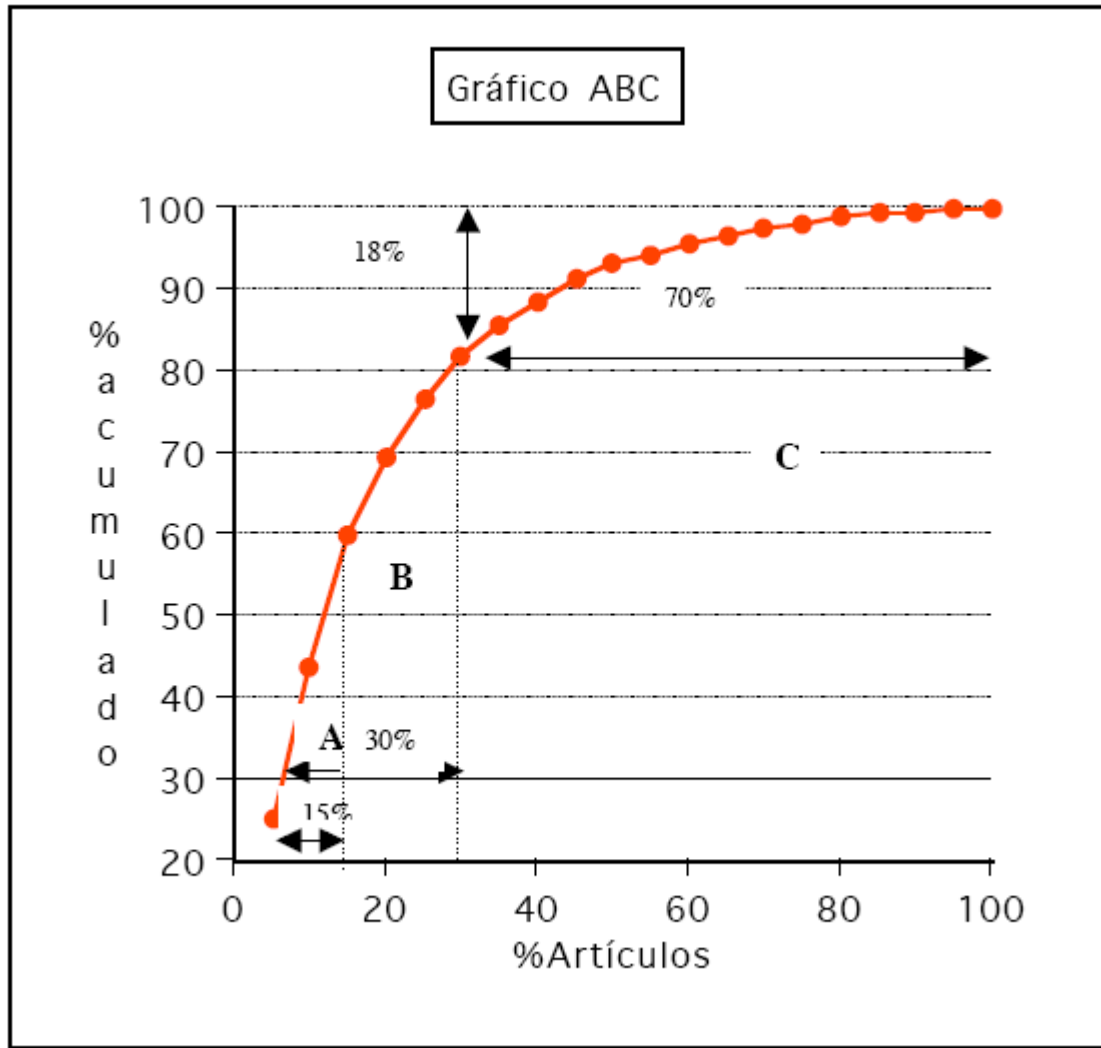
Columna n° 4: Nos muestra el % que representa cada una de las valorizaciones en el valor total del inventario.

2. Ahora se deben reordenar las columnas 1 y 4, tomando las participaciones de cada artículo en sentido decreciente, lo que dará origen a la tabla 4.

Tabla 4. Determinación de la participación monetaria de cada artículo en el valor total de inventario.

Art.Nº	%participación	% valorización	% partic. acum.	% valor. acum.	Clase
14	5	25.47	5	25.47	A
19	5	18.55	10	44.02	
13	5	16.08	15	60.10	
3	5	9.27	20	69.37	B
6	5	7.20	25	76.57	
11	5	5.30	30	81.87	
15	5	3.78	35	85.65	
9	5	3.09	40	88.74	
12	5	2.65	45	91.39	C
20	5	1.65	50	93.04	
18	5	1.39	55	94.43	
16	5	1.12	60	95.55	
2	5	1.06	65	96.61	
4	5	1.06	70	97.67	
1	5	0.66	75	98.33	
10	5	0.53	80	98.86	
8	5	0.50	85	99.36	
7	5	0.33	90	99.69	
17	5	0.16	95	99.85	
5	5	0.15	100	100.00	

### 3. Trazado de la gráfica y determinación de zonas ABC.



A partir de los datos de la tabla 23 y la gráfica se puede observar que unos pocos artículos son los de mayor valorización. Si solo se controlaran estrictamente los tres primeros, se estaría controlando aproximadamente el 60% del valor del inventario asignamos la zona A para estos artículos.

Controlando también los art. 3, 6 y 11, se estaría controlando, en forma aproximada, el 82% del valor del inventario. (Zona B)

Se ve claramente en la gráfica que el 15% del inventario justifica el 60% del valor, mientras que el 30% del mismo justifica el 82% de dicho valor; a su vez, el 70% del inventario justifica el 18% del valor. Si se tiene en cuenta los costos de mantenimiento y de control de estos últimos, se llega a la conclusión que no es necesario controlarlos estrictamente, ya que son de poca valorización, y que debe mantenerse el mínimo stock posible de los mismos.

La asignación de las zonas A, B y C en la gráfica que estamos analizando se realizó en función del alto % de valorización de los tres primeros artículos (25,47%, 18,55% y 16,08%, respectivamente), sin embargo, las zonas pueden asignarse de forma diferente, por ejemplo, incluyendo en la zona A los seis primeros artículos, que representan alrededor del 80% del valor del inventario, en la zona B los siguientes tres artículos, y los restantes en la zona C. De esta forma, controlando el 30% del inventario (zona A) se estaría controlando aproximadamente el 80% del valor del mismo.

Observando las zonas A y B de la gráfica que se da a continuación, se puede ver que el 45% del inventario justifica alrededor del 90% de su valor y que el 55% del inventario justifica, aproximadamente, el 10% del mismo valor.

## CAPITULO 2: MODELOS DE INVENTARIOS DETERMINISTICOS.

### Introducción

Es intención analizar en esta primera parte los modelos básicos de inventarios dada la importancia que tienen para comprender como es el comportamiento de estos modelos y la relación entre los diferentes parámetros que manejan, no importando volver a tratarlos mas adelante en la clasificación en cuanto a la cantidad a ordenar o en la decisión de cada cuanto ordenar.

En esta parte se agrupan los modelos que manejan un solo artículo y cuya demanda es conocida, se pueden aplicar a procesos de producción, como a ventas al menudeo. Para esta clasificación se tiene en cuenta la propuesta de JAMES E. SHAMBLIN y G.T. STEVENS<sup>8</sup>

### Lección 6. Modelos de Orden Económica (EOQ).

El modelo de orden económica o lote económico (EOQ. Economic order Quantity), es el modelo de inventario de mayor uso y popularidad dado su simplicidad y amplia aplicabilidad y sirven de base para modelos mas avanzados. Fue creado por Ford W Harris entre 1913-1915.

Los modelos que se presentan a continuación buscan dar respuesta a las preguntas básicas que se presentan en un modelo de inventarios: ¿Cuál debe ser el tamaño del pedido u orden de producción? Y ¿Cuándo se debe emitir la orden de compra o de producción?

---

<sup>8</sup> SAMMBLIN, James, STEVENS, G.t,Jr. (1975) Investigación de Operaciones. México: Mc Graw Hill

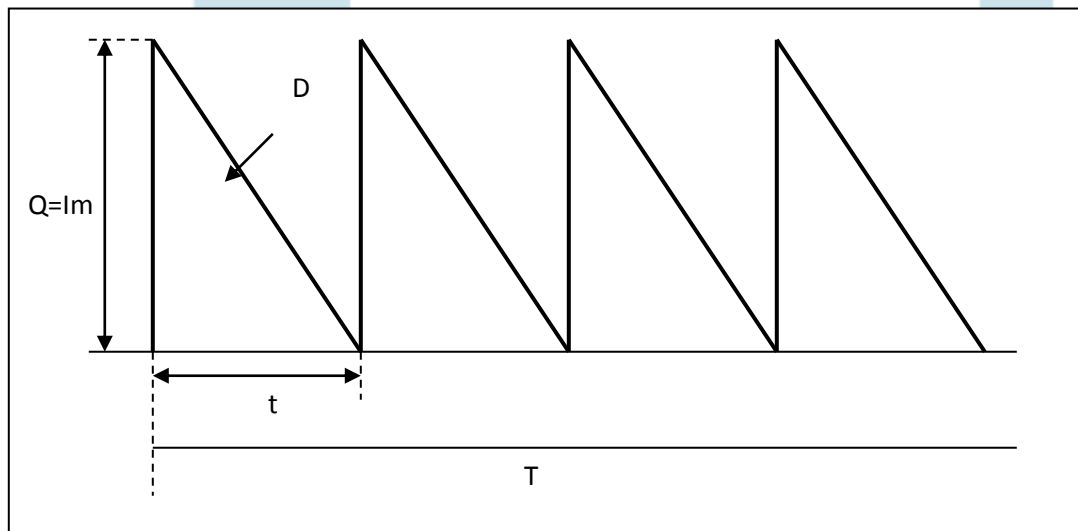
## Sección 1. Modelo de compra sin escasez.

Este modelo es uno de los más sencillos, para su desarrollo se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- La demanda es constante, se conoce con anterioridad.
- El reaprovisionamiento es instantáneo, todo el lote se coloca en el inventario al mismo tiempo.
- La tasa de reaprovisionamiento es infinita.
- Los parámetros de costos son todos constantes,
- No permite faltantes.
- Dado que la demanda y el tiempo de entrega son parámetros conocidos se puede calcular exactamente cuando se debe realizar el pedido.

En la figura 1 se muestra el comportamiento de este modelo. Para este modelo  $Q$  es el inventario máximo,  $T$  corresponde al tiempo de análisis, para sencillez del modelo se toma un año,  $t$  corresponde al tiempo entre pedidos.

Figura 2: Modelo de compra sin Déficit.



Las variables del modelo se conocen y son las siguientes:

$Q$  = Cantidad del pedido.

$C_p$  = Costo total por periodo.

A medida que pasa el tiempo ( $t$ ), el inventario se va consumiendo a una tasa constante  $D$  (pendiente de la recta), cuando el nivel del inventario es cero se ordenan  $Q$  unidades, el nivel del inventario llega al inventario máximo en  $Q$  unidades (el modelo supone que el reaprovisionamiento es instantáneo) de ahí en adelante se repite el proceso.

A continuación se definen los parámetros del modelo:

$CA$  = Costo total por año.

$N$  = Número de pedidos / año.

$Ca = C_p * N$

$C_1$  = costo por unidad

$C_2$  = costo de preparación del pedido (\$ / orden)

$i$  = Costo de mantener el inventario en %

$C_3$  = costo de almacenamiento o de mantener el inventario  $C_3 = i * C_1$

$D$  = Demanda

$t$  = Tiempo entre pedidos.

$T$  = Tiempo de análisis un año.

El costo total anual del inventario del modelo corresponde al costo por periodo multiplicado por el número de periodos por año:

$$C_A = C_p * N$$

El costo por periodo  $C_p$  corresponde a la sumatoria del costo unitario, el costo de ordenar (realizar el pedido o preparación del pedido), el costo de mantener el inventario (costo de almacenamiento) por periodo.

$$C_p = C_1Q + C_2I + C_3t \frac{Q}{2}$$

Donde:

$C_1Q$  = Costo por unidad por el número de unidades del pedido ó cantidad pedida.

$C_2I$  = Costo de ordenar multiplicado por el número de pedidos por año, uno en este caso.

$C_3 t Q/2$  = Costo de almacenamiento por periodo multiplicado por el tiempo entre pedidos (uno por año para este caso), por el inventario promedio ( $Q/2$ ).

$$C_A = C_p N = (C_1Q + C_2I + C_3t \frac{Q}{2})N$$

Si expresamos el tiempo ( $t$ ) como el tiempo entre pedidos o lo que es igual al la cantidad pedida ( $Q$ ) dividida entre la demanda ( $D$ ) tenemos:

Tiempo entre  
pedidos

$$t = \frac{1}{N} = \frac{Q}{D}$$

Entonces :

$$N = \frac{D}{Q}$$

Número de  
Pedidos por  
periodo

Reemplazando nuevamente en la fórmula del costo anual el valor de  $t$  y el valor de  $N$ , se llega a la siguiente fórmula para el costo anual:

$$C_A = (C_1Q + C_2 \cdot 1 + C_3t \frac{Q}{2}) \frac{D}{Q}$$

$$C_A = C_1D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

El valor óptimo se obtiene derivando el costo anual respecto de  $Q$  e igualando a cero la derivada, igualando a cero la función alcanza su punto mínimo.

$$\frac{\partial C_A}{\partial Q} = -\frac{C_2D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} = 0$$

$$Q^2 = \frac{2C_2D}{C_3}$$

Despejando  $Q$  de la anterior ecuación se obtiene el valor óptimo de  $Q$ .

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3}}$$

Algunos autores al deducir la fórmula del costo total lo hacen teniendo en cuenta solamente los costos variables por lo tanto el costo total anual se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$C_A = C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

Para el desarrollo de ejercicios en este módulo si el problema plantea el costo de compra o de manufactura  $C_1$ , se tendrá en cuenta en la fórmula del costo total del inventario.

Ejemplo: La demanda de un artículo comprado es de 1500 unidades al mes el costo de cada unidad es de 20 pesos, el costo de preparación de la compra es de 6000 pesos y el costo de tenencia de cada unidad es de 20 pesos al año, si el artículo no permite déficit calcular:

- Cantidad óptima a comprar.
- El número de pedidos por año.
- El tiempo entre pedidos.
- El costo total óptimo

Datos:

$$D = 1500 \text{ unidades / mes}$$

$$C_1 = 20\$/\text{unidad}$$

$$C_2 = 6000\$/\text{pedido}$$

$$C_3 = 20\$/\text{unidad} - \text{año} = \frac{20}{12}\$/\text{unidad} - \text{mes}$$

¡OJO!

CON LAS

UNIDADES

Se deben expresar en el mismo periodo de tiempo

Solución:

a. Cantidad óptima a comprar.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * 6000 * 1500}{1.667}} = 3286.33 \text{ unidades}$$

Respuesta: se Deben comprar 3287 Unidades.

b. Número de pedidos por año.

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{1500 \text{ unidades / mes}}{3286 \text{ unidades}} = 0.4564 \text{ pedidos / mes}$$

$$N = 0.4564 \text{ pedidos / mes} * 12 \text{ meses / año} = 5.477 \text{ pedidos / año}$$

En un año se realizan 5.47 pedidos.

c. Tiempo entre pedidos.

$$t = \frac{Q}{D} = \frac{3286 \text{ unidades}}{1500 \text{ unidades / mes}} = 2.2 \text{ meses}$$

¡OJO!  
 CON LAS  
 UNIDADES

El tiempo que transcurre entre pedidos es de 2.2 meses.

d. Costo total:

$$C_A = C_1D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

$$C_a^* = (20 \$ / \text{unidad} * 1500 \text{ unidades} * 12 \text{ meses} / \text{año}) + (6000 \$ / \text{pedido} * 5.477 \text{ pedidos} / \text{año}) + (20 \$ / \text{unidad} - \text{año} * 3286 / 2 \text{ unidades}) = 425680 \$ / \text{año}$$

Costo total del pedido: \$425.728

## Sección 2. Modelo de Compra con Déficit.

En este modelo es posible aplazar el pedido, por lo que se presenta un tiempo de consumo con déficit, una vez se reciba el pedido el déficit desaparece.

En este modelo se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

La demanda es constante.

Los parámetros de costos son constantes.

La tasa de reaprovisionamiento es infinita.

Se permite déficit.

Durante el intervalo de tiempo  $T$ , el nivel del inventario es suficiente para satisfacer la demanda durante un lapso de tiempo  $t_1$ , después de este tiempo se presenta el déficit o faltantes, durante un tiempo  $t_2$ , estos faltantes se entregan inmediatamente se recibe el pedido.

A demás de los parámetros del anterior modelo tenemos:

$S$ = Cantidad de déficit (faltante) permitido por periodo.

$C_4$ = Costo de déficit de una unidad por periodo.

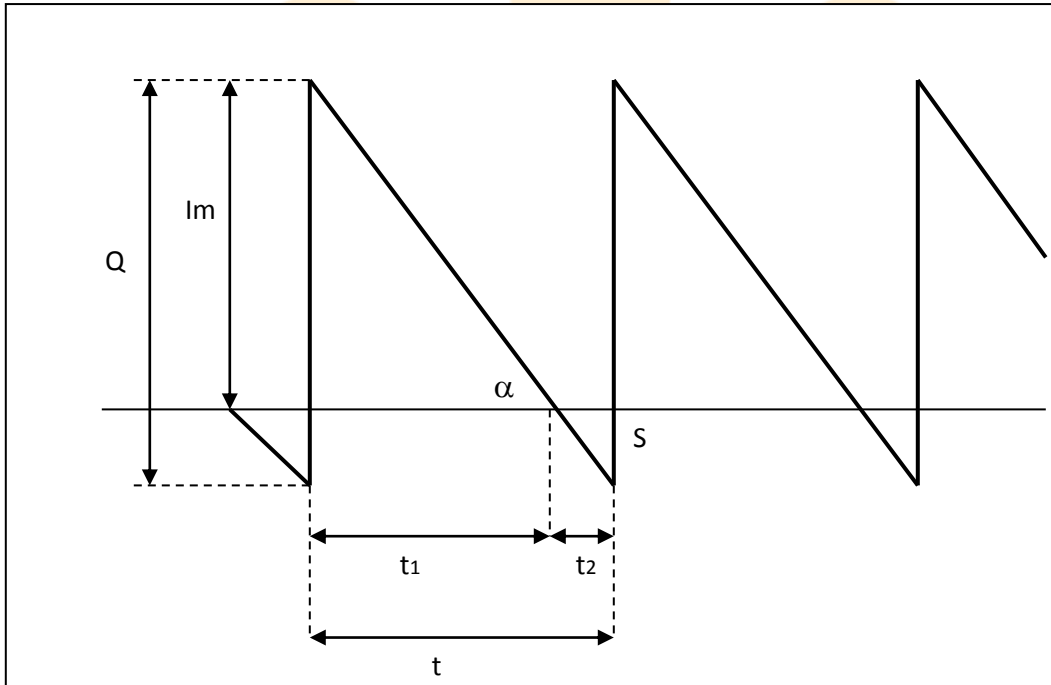
$t_1$ = Tiempo de almacenamiento (consumo sin déficit)

$t_2$ = Tiempo de consumo con déficit.

$Q$ = cantidad a pedir = Inventario máximo ( $I_m$ ) más el Déficit permitido ( $S$ )

En la figura 3 se muestra el comportamiento de este modelo.

Figura 3: Modelo de Compra con Déficit.



Los costos del déficit son ocasionados por el agotamiento de las existencias, incluyendo el costo por déficit, el costo por periodo sería el siguiente:

$$C_P = C_1 Q + C_2 1 + C_3 \frac{I_M}{2} t_1 + C_4 \frac{S}{2} t_2$$

$$Q = I_M + S \rightarrow I_M = Q - S$$

$$D = \frac{Q}{t} \rightarrow t = \frac{Q}{D}, N = \frac{1}{t} = \frac{D}{Q}$$

$$t = t_1 + t_2$$

El costo por periodo corresponde a la sumatoria de los siguientes costos:

$C_1 Q$  = Costo por unidad por el número de unidades del pedido ó cantidad pedida.

$C_2 1$  = Costo de ordenar multiplicado por el número de pedidos por año, uno en este caso.

$C_3 \cdot t_1/2 =$  Costo de almacenamiento por periodo multiplicado por el tiempo entre pedidos (uno por año para este caso), por el inventario promedio ( $I_m/2$ ).

$C_4 \cdot S/2 \cdot t_2 =$  costo debido a los faltantes multiplicado por la cantidad promedio de faltantes por el tiempo de consumo con déficit.

Teniendo en cuenta un periodo de análisis de un año, el costo total anual de inventario es:

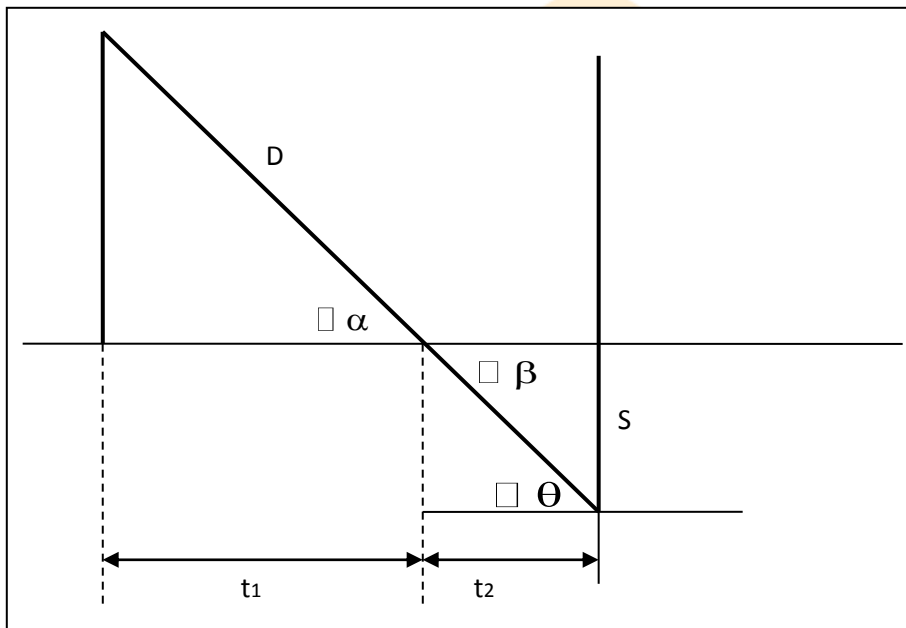
$$C_A = C_p \cdot N$$

Es necesario expresar  $t_1$  y  $t_2$  en función de  $Q$  y  $S$ , (Ver figura 3)

$$\tan \alpha = \frac{I_m}{t_1} = D \quad \rightarrow t_1 = \frac{I_m}{D} = \frac{Q-S}{D}$$

$$\tan \theta = \frac{S}{t_2} = D \quad \rightarrow t_2 = \frac{S}{D}$$

Figura 4: Valores de  $t_1$  y  $t_2$ .



Reemplazando en la formula del costo total anual se tiene:

$$C_A = \left[ C_1 Q + C_2 + C_3 \left( \frac{Q-S}{2} \right) \left( \frac{Q-S}{D} \right) \left( \frac{D}{Q} \right) + C_4 \left( \frac{S}{2} \right) \left( \frac{S}{D} \right) \right] \left( \frac{D}{Q} \right)$$

$$C_A = \left[ (C_1 Q) \left( \frac{D}{Q} \right) + (C_2) \left( \frac{D}{Q} \right) + C_3 \left( \frac{Q-S}{2} \right) \left( \frac{Q-S}{D} \right) \left( \frac{D}{Q} \right) + C_4 \left( \frac{S}{2} \right) \left( \frac{S}{D} \right) \left( \frac{D}{Q} \right) \right]$$

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_4 \frac{S^2}{2Q}$$

La fórmula anterior corresponde al costo total por año para el inventario, Como el costo total tiene dos variables Q y S y se quiere hallar su valor óptimo, se calculan las derivadas parciales respecto a cada una de las variables.

Derivando la función de costo respecto de S, e igualando a cero, se obtiene el valor óptimo de S:

$$\frac{\partial C_A}{\partial S} = \frac{\partial \left( C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_4 \frac{S^2}{2Q} \right)}{\partial S}$$

$$-C_3 + \frac{C_3 S}{Q} + \frac{C_4 S}{Q} = 0$$

Despejando S se obtiene:

$$S = Q \left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} \right)$$

Derivando la función de costo respecto de Q, e igualando a cero, se obtiene el valor óptimo de Q:

$$\frac{\partial C_A}{\partial Q} = \frac{\partial \left( C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_4 \frac{S^2}{2Q} \right)}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial Q} = -C_2 \frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} - \frac{C_3 S^2}{2Q^2} - \frac{C_4 S^2}{2Q^2} = 0$$

$$-C_2 \frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} - \frac{S^2}{2Q^2} (C_3 + C_4) = 0$$

Reemplazando el valor de S en la ecuación anterior se tiene:

$$-C_2 \frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} - \left( \frac{C_3 + C_4}{2Q^2} \right) \left( Q \left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} \right) \right)^2 = 0$$

$$-C_2 \frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} - \left( \frac{C_3^2}{2(C_3 + C_4)} \right) = 0$$

$$-C_2 \frac{D}{Q^2} + \frac{2C_3^2 + 2C_3C_4 - 2C_3^2}{4(C_3 + C_4)} = 0$$

$$-C_2 \frac{D}{Q^2} + \frac{C_3C_4}{2(C_3 + C_4)} = 0$$

$$\frac{C_2D}{Q^2} = \frac{C_3C_4}{2(C_3 + C_4)}$$

$$Q^2 = \frac{2C_2D}{C_3} \left( \frac{C_3 + C_4}{C_4} \right)$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3} \left( \frac{C_3 + C_4}{C_4} \right)}$$

$$S^* = Q \left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} \right) = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_4} * \frac{C_3}{C_3 + C_4}}$$

### Ejemplo:

La demanda de un artículo adquirido es de 1000 unidades/mes, y se permite déficit. El costo unitario es de 1.50 \$/unidad, el costo de hacer una compra es de \$600, el costo de tenencia de una unidad es de 2\$/año y el costo de déficit de una unidad es de 10\$/año, determinar:

- La cantidad óptima a comprar.
- El número óptimo de unidades de déficit.
- Costo total anual óptimo.
- El número de pedidos por año.
- Tiempo entre pedidos.

f. Duración del déficit.

g. El inventario máximo.

Solución:

Datos del problema:

$$C_1 = 150 \text{ \$/unidad}$$

$$C_2 = 600 \text{ \$/pedido}$$

$$C_3 = 2 \text{ \$/unidad-año}$$

$$C_4 = 10 \text{ \$/unidad-año}$$

$$D = 1000 \text{ unidades/mes} = 12000 \text{ unidades/año}$$

a. Cantidad óptima a comprar:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3} \left( \frac{C_3 + C_4}{C_4} \right)} = \sqrt{\frac{2 * 600 * 12000}{2} \left( \frac{2 + 10}{10} \right)} = 2940$$

$$S^* = Q \left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} \right)$$

b. Déficit permitido:

$$S^* = Q \left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} \right) = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_4} * \frac{C_3}{C_3 + C_4}}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 * 600 * 12000}{10} * \frac{2}{2 + 10}} = 489.89 \text{ Unidades}$$

$$S^* \cong 490 \text{ Unidades}$$

==

c. Costo total anual del inventario:

$$C_A = C_1D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_4 \frac{S^2}{2Q}$$

$$C_A = (150 * 12000) + (600 * \frac{12000}{2940}) + \left( 2 \frac{(2940 - 490)^2}{2 * 2940} \right) + 10 * \frac{(490)^2}{2 * 2940}$$

$$C_A = (1800000 + 2449 + 2042 + 408) \$ / \text{año}$$

$$C_A = 1804899 \cong 1.804.900 \$ / \text{Año}$$

d. Numero de pedidos por año:

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{12000}{2940} = 4.08 \text{ pedidos/año}$$

e. Tiempo entre pedidos:

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{1}{N} = 0.245 \text{ Años} = 2.94 \text{ Meses}$$

f. Duración del déficit:

$$t_2 = \frac{S}{D} = \frac{490 \text{ unidades}}{1000 \text{ unidades/mes}} = 0.49 \text{ Meses}$$

g. Inventario Máximo:

$$I_m = Q - S = 2940 - 490 = 2450 \text{ Unidades}$$

## Lección 7: Modelos de Lote Económico.

### Sección 1. Modelo de Manufactura (Producción) sin Déficit.

Este modelo busca determinar el tamaño del lote a producir.

Se tienen en cuenta las siguientes suposiciones:

- La demanda es constante.
- La tasa de reaprovisionamiento es constante, finita y mayor que la demanda.
- Parámetros de costos constantes.
- No se permite déficit o faltantes.
- En este modelo el costo de compra se reemplaza por el costo de organizar una corrida de producción.

D= Demanda del producto

R= Tasa de reaprovisionamiento, tasa de manufactura, tasa de producción, es constante finita y siempre  $R > D$

t = tiempo entre pedidos

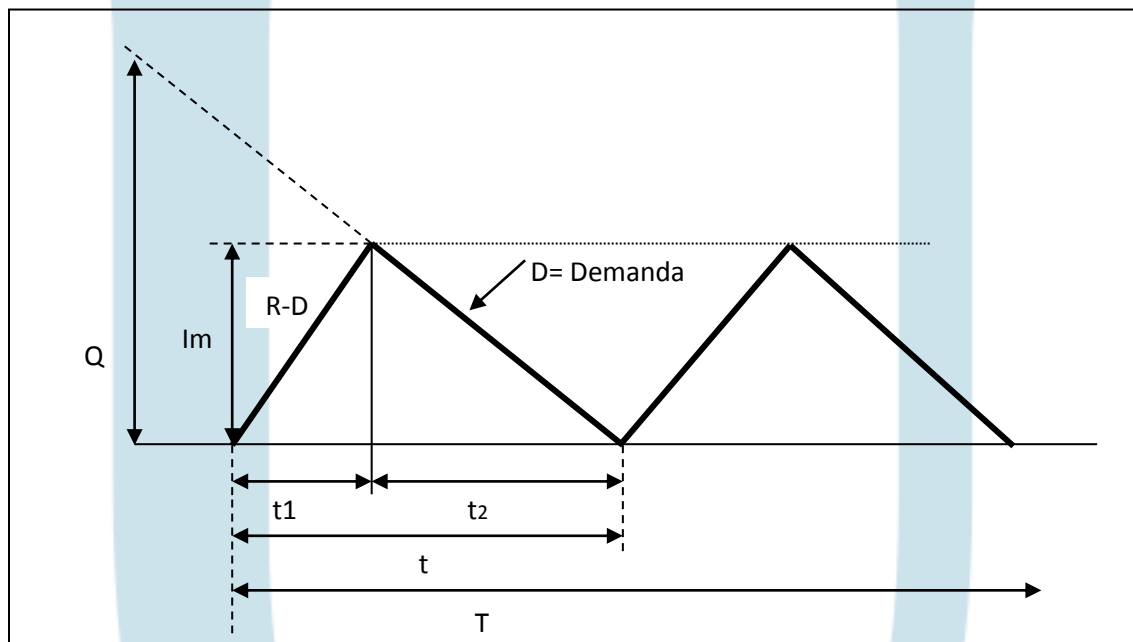
t1= Tiempo de producción y consumo

t2= Tiempo de consumo exclusivo.

Cp= Costo de producción por periodo.

En la figura 4, se muestra el comportamiento de este modelo.

Figura 5: Modelo de Manufactura sin Déficit.



Teniendo en cuenta un periodo de análisis de un año, el costo total anual del inventario es:

$$C_A = C_p * N$$

El costo por periodo corresponde a la sumatoria de los siguientes costos:

$C_1Q$  = Costo por unidad por el número de unidades del pedido ó cantidad pedida.

$C_2$  = Costo de organizar una corrida de producción multiplicado por el número de pedidos por año, uno en este caso.

$C_3 \frac{I_m}{2} t$  = Costo de almacenamiento por periodo multiplicado por el tiempo entre pedidos, por el inventario promedio ( $I_m/2$ ).

$$C_p = C_1Q + C_2 + C_3 \frac{I_m}{2} t$$

El inventario máximo por periodo es igual al tiempo de manufactura ( $t_1$ ) multiplicado por la tasa de acumulación R-D (Tasa de producción menos la demanda), entonces:

$$I_m = \frac{Q}{R} (R - D),$$

$$D = \frac{Q}{T}, \quad N = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$$

$$t = \frac{1}{N} = \frac{Q}{D} = t_1 + t_2$$

Al multiplicar la ecuación del costo por periodo por el número de periodos por año se obtiene el costo total anual así:

$$C_p = \left( C_1 Q + C_2 1 + C_3 \frac{I_m}{2} t \right) N$$

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \left( \frac{Q}{2} \right) \left( 1 - \frac{D}{R} \right) \frac{1}{N} N$$

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{D}{R} \right)$$

donde  $(1 - D/R)$  = Índice de crecimiento del inventario

Para hallar el valor óptimo de Q, se logra Derivando la función del costo anual con respecto a Q e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{\partial C_A}{\partial Q} = \frac{\partial \left( C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{D}{R} \right) \right)}{\partial Q} = 0$$

$$-\frac{C_2 D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} \left( 1 - \frac{D}{R} \right)$$

$$\frac{C_2 D}{Q^2} = \frac{C_3}{2} \left( 1 - \frac{D}{R} \right)$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_3 \left( 1 - \frac{D}{R} \right)}}$$

Ejemplo:

Una compañía necesita 12000 artículos por año para emplearlos en su proceso de producción, la compañía fabrica estos artículos a una tasa de 48000 unidades al año. Si el costo unitario de fabricación se de \$5, el costo de tenencia es de \$9,6 al año y el costo de hacer una corrida de producción es de \$100.

Determinar:

- a. Cantidad óptima a manufacturar.
- b. Costo total anual óptimo.
- c. Inventario máximo.
- d. Tiempo de manufactura.
- e. Tiempo entre tandas de producción.
- f. Número de tandas de producción.

Solución:

Datos del problema:

$$C_1 = 5 \text{ \$/unidad}$$

$$C_2 = 100 \text{ \$/pedido}$$

$$C_3 = 9.6 \text{ \$/unidad-Año}$$

$$D = 12000 \text{ unidades/Año}$$

$$R = 48000 \text{ unidades/Año}$$

- a. Cantidad óptima a manufacturar.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3\left(1-\frac{D}{R}\right)}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2*100*12000}{9.6\left(1-\frac{12000}{48000}\right)}} = 577.35 \text{ Unidades}$$

b. Costo total anual óptimo.

$$C_A = C_1D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

$$C_A = 5 * 12000 + 100 * \frac{12000}{577.35} + 9.6 \frac{577.35}{2} \left(1 - \frac{12000}{48000}\right)$$

$$C_A = 64.153$$

c. Inventario máximo.

$$I_m = \frac{Q}{R} (R - D) = Q \left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

$$I_m = 577.35 \left(1 - \frac{12000}{48000}\right) = 433 \text{ Artículos}$$

d. Tiempo de manufactura.

$$t_1 = \frac{Q}{R} = \frac{577.35 \text{ Unidades}}{48000 \text{ unidades/año}} = 0.012 \text{ Años} = 0.144 \text{ Meses}$$

e. Tiempo entre tandas de producción.

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{577.35 \text{ Unidades}}{12000 \text{ unidades / año}} = 0.0481 \text{ Años} = 0.577 \text{ Meses}$$

f. Número de tandas de producción.

$$\frac{1}{N} = \frac{Q}{D} \quad N = \frac{D}{Q} = \frac{12000 \text{ Unidades / año}}{577.35 \text{ Unidades}} = 20 \text{ Tandas de Producción / año}$$

## Sección 2. Modelo de Manufactura (Producción) con déficit.

El modelo busca determinar la cantidad a producir, cuando se permite déficit, faltantes o pedidos pendientes.

Se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

La demanda es constante.

La tasa de reaprovisionamiento es constante y finita.

Parámetros de costos constantes.

Se permite déficit.

R= tasa de reaprovisionamiento.

$R > D$

$t_1$  = Tiempo de producción y consumo sin faltantes.

$t_2$  = Tiempo de consumo sin producción sin faltantes.

$t_3$  = Tiempo de consumo exclusivo con déficit.

$t_4$  = Tiempo de producción y consumo con déficit.

$t_1 + t_2$  = Tiempo de almacenamiento durante el periodo.

$t_3 + t_4$  = tiempo de déficit durante el periodo.

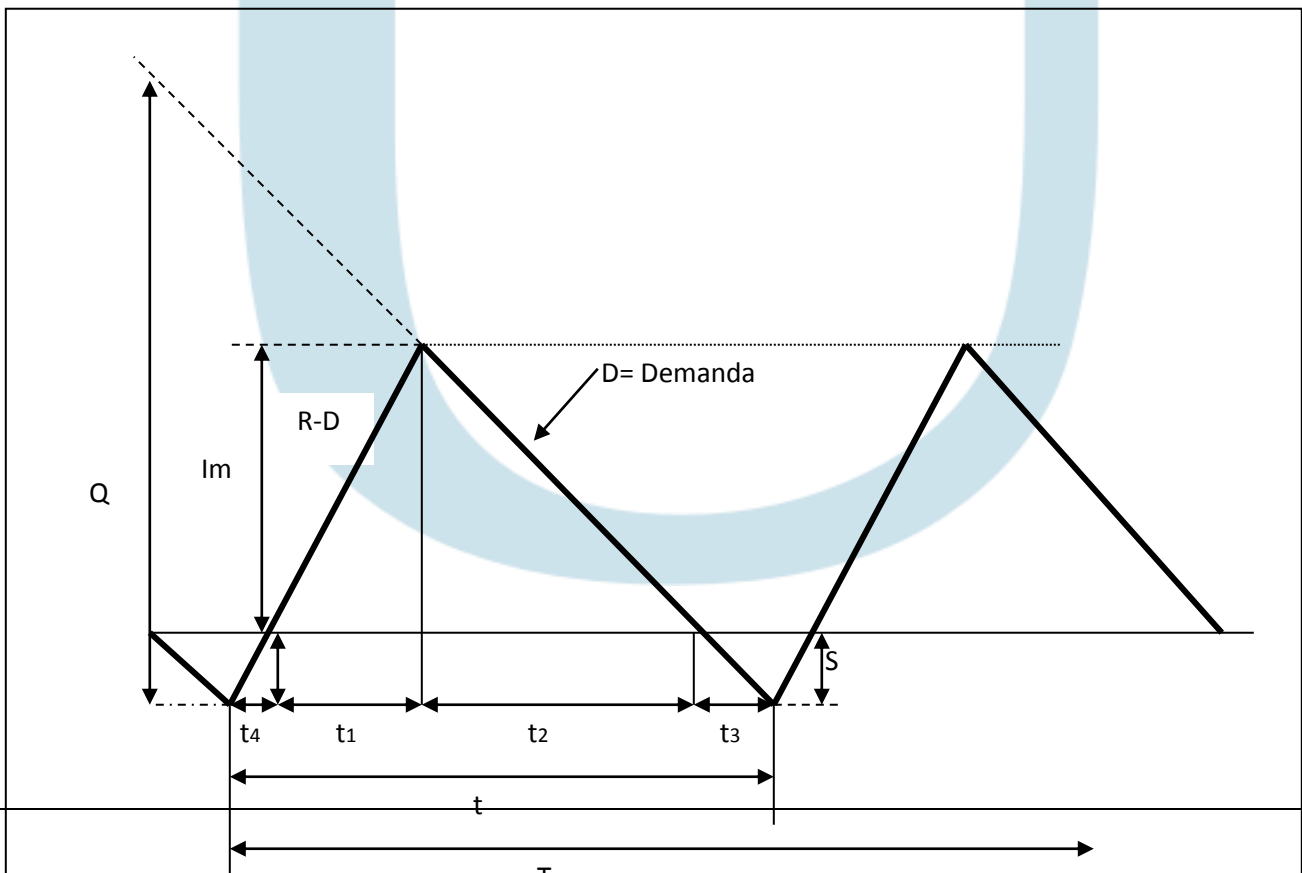
$t_1 + t_4$  = Tiempo de producción y consumo.

$t_2 + t_3$  = tiempo de déficit del periodo.

$C_p$  = Costo de producción.

En la figura 5, se muestra el comportamiento de este modelo.

Figura 6: Modelo de Manufactura con Déficit.



En primer lugar se deben calcular los valores de  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , e  $I_m$

Teniendo en cuenta la figura 5, se obtienen algunas relaciones importantes:

$$t_1 = \frac{I_m}{R - D} \quad t_2 = \frac{I_m}{D} \quad t_3 = \frac{S}{D} \quad t_4 = \frac{S}{R - D}$$

$$t_1 + t_4 = \frac{Q}{R} \quad t_2 + t_3 = \frac{I_m + S}{D}$$

$$I_m = Q\left(1 - \frac{D}{R}\right) - S$$

$$t_1 + t_2 = I_m \left(\frac{1}{R - D} + \frac{1}{D}\right) \quad t_3 + t_4 = S \left(\frac{1}{R - D} + \frac{1}{D}\right)$$

El costo por periodo para este modelo es:

$$C_A = C_p N \quad N = \frac{D}{Q} = \frac{1}{T}$$

$$C_p = C_1 Q + C_2 I + C_3 (T_1 + T_2) \frac{I_m}{2} + C_4 (T_3 + T_4) \frac{S}{2}$$

$$C_A = \left( C_1 Q + C_2 I + C_3 (T_1 + T_2) \frac{I_m}{2} + C_4 (T_3 + T_4) \frac{S}{2} \right) N$$

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + \frac{C_3}{2Q} \left[ \left( 1 - \frac{D}{R} \right) - S \right]^2 \frac{1}{1 - D/R} + \frac{C_4}{2Q} S^2 \left( \frac{1}{1 - D/R} \right)$$

Para hallar las cantidades óptimas de Q y S, se hallan las derivadas parciales con respecto a Q y respecto a S

$$\frac{\partial C_A}{\partial Q} = Q^* \quad \frac{\partial C_A}{\partial S} = S^* \quad \text{CON } Q^* \text{ Y } S^* \text{ SE OBTIENE } C_A^*$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_3 \left( 1 - \frac{D}{R} \right)} * \left( \frac{C_3 + C_4}{C_4} \right)} \quad S^* = Q^* \left( 1 - \frac{D}{R} \right) \left( \frac{C_3 + C_4}{C_4} \right)$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_4} \left( 1 - \frac{D}{R} \right) \left( \frac{C_3 + C_4}{C_4} \right)}$$

Ejemplo:

La demanda de un artículo es de 1.500 unidades al mes, se permite déficit. El artículo se puede manufacturar a una tasa de 6.000 unidades al mes, el costo de

cada producto es de \$35 por unidad el costo de ordenar un pedido es de \$900, el costo de tenencia de una unidad es de \$3 por año y el costo de déficit es de \$15 por unidad al año, determinar:

- Cantidad optima a manufacturarse y déficit permitido
- Costo total anual optimo
- Numero de tandas de producción
- Tiempo entre tandas de producción y Tiempo de fabricación
- Duración del déficit e Inventario máximo

Solución:

$D = 1.500 \text{ unid/mes} = 18.000 \text{ unid/año.}$

$R = 6.000 \text{ unid/mes}$

$C1 = \text{Costo del producto} = 35 \text{ \$/unidad}$

$C2 = \text{Costo de organizar una corrida de producción} = 900 \text{ \$/orden}$

$C3 = \text{Costo de almacenamiento por periodo} = 3 \text{ \$/año.}$

$C4 = \text{Costo déficit} = 15 \text{ \$/unidad/año}$

- Cantidad optima a manufacturarse y déficit permitido

$$\text{Si: } (1 - D/R) = (1 - 1500/6000) = (0.75)$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3(1-D/R)} * \left(\frac{C_3 + C_4}{C_4}\right)}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * 900 * 18.000}{3(0.75)} * \left(\frac{3 + 15}{15}\right)}$$

$$Q^* = 4.157 \text{ Unidades}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_4} (1 - D/R) \left(\frac{C_3 + C_4}{C_4}\right)}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 * 900 * 18000}{15} (0.75) \left(\frac{3 + 15}{15}\right)}$$

$$S^* = 1394 \text{ Unidades}$$

b) Costo total anual optimo

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + \left( \frac{C_3}{2Q} \left[ \left( 1 - \frac{D}{R} \right) - S \right]^2 \frac{1}{1 - \frac{D}{R}} \right) + \frac{C_4}{2Q} S^2 \left( \frac{1}{1 - \frac{D}{R}} \right)$$

$$C_1 D = 35 * 18.000 = 630.000$$

$$C_2 \frac{D}{Q} = 900 \frac{18.000}{4.157} = 3.897$$

$$\left( 1 - \frac{D}{R} \right) = 3/4 = 0.75$$

$$\frac{1}{1 - \frac{D}{R}} = 4/3 = 1.33$$

$$\left( \frac{C_3}{2Q} \left[ \left( 1 - \frac{D}{R} \right) - S \right]^2 \frac{1}{1 - \frac{D}{R}} \right) = \frac{3}{2 * 4157} (3/4 - 1394)^2 * 4/3 = 934$$

$$\frac{C_4}{2Q} S^2 \left( \frac{1}{1 - \frac{D}{R}} \right) = \frac{15}{2 * 4157} (1394)^2 (4/3) = 4.674$$

$$C_A = 630.000 + 3.897 + 934 + 4.674 = 639.505 \text{ \$/año}$$

c) Numero de tandas de producción

$$\frac{1}{N} = \frac{Q}{D} \quad N = \frac{D}{Q} = \frac{18000 \text{ Unidades/año}}{4157 \text{ Unidades}} = 4.33 \cong 5 \text{ Tandas de Producción/año}$$

d) Tiempo entre tandas de producción y Tiempo de fabricación

$$t = \frac{Q}{D} = \frac{4.157 \text{ Unidades}}{18.000 \text{ unidades/año}} = 0,2309 \text{ Años} = 2,7713 \text{ Meses}$$

$$t_1 + t_4 = \frac{Q}{R} = \frac{4.157 \text{ Unidades}}{6.000 \text{ Unidades/mes}} = 0.6928 \text{ Meses} = 20.78 \text{ Días}$$

e) Duración del déficit e Inventario máximo

$$t_3 + t_4 = S \left( \frac{1}{R - D} + \frac{1}{D} \right) = 1394 \text{ Unidades} \left( \frac{1}{6000 \text{ Unid / mes} - 1500 \text{ Unid / mes}} + \frac{1}{1500 \text{ Unid / mes}} \right)$$

$$t_3 + t_4 = 1.2391 \text{ Meses} = 37.17 \text{ días}$$

$$I_m = Q \left( 1 - \frac{D}{R} \right) - S = 4157 \text{ Unidades} \left( 1 - \frac{1500 \text{ unidades / mes}}{6000 \text{ Unid / mes}} \right) - 1394 \text{ Unidades}$$

$$I_m = 1723.75 \text{ unidades}$$

### Lección 8: Descuentos por Cantidad.

En los modelos anteriores el costo por unidad es independiente de la cantidad solicitada. Con frecuencia se observa que los proveedores cobran menos cuando las cantidades solicitadas superan cierto número de unidades, las empresas manejan este tipo de descuentos por proporcionar costos más bajos que los costos de mantener el inventario.

Aunque existen muchas formas de descuento las más utilizadas son:

**Descuento en todas las unidades:** cuando el descuento se aplica a todas las unidades en un pedido. Por ejemplo si una empresa compra artículos al por mayor según la siguiente tabla de descuentos:

Tabla 5. *Datos ejemplo descuentos en todas las unidades.*

Cantidad			
De	A	Costo por unidad	% de Descuento
0	5.000	\$500	0
5.001	10.000	\$475	5
10.001	20.000	\$450	10
20.001	En adelante	\$425	15

Si la empresa compra 5.000 unidades el costo de todas las unidades es de \$2.500.000, resultado de  $(5.000 \times 500)$ . En el caso de comprar 20.000 unidades el costo total de la compra es de \$9.000.000, resultado de  $(20.000 \times 450)$ .

**Descuentos Incrementales:** cuando el descuento aplica al precio de las unidades que exceden la cantidad de corte. Trabajando con la misma información del ejemplo anterior, si la empresa compra 15.000 unidades el costo total de la compra es:

5.000 unidades a \$500, las siguientes 5.000 unidades a \$475 y las siguientes 5.000 unidades a \$450, para un costo total es:

$$Ct = (5.000 \times 500) + (5.000 \times 475) + (5.000 \times 450) = \$7.125.000$$

A continuación se desarrollan los modelos que permiten tomar la decisión de cuantas unidades pedir en cada uno de los casos.

Sección 1. Descuento en todas las unidades.

El objetivo del modelo de inventario es encontrar la cantidad a pedir que minimice el costo total por periodo.

Para el desarrollo de este modelo se considera que no se permite escasez y la reposición se realiza instantáneamente, el costo total por periodo incluye el costo de compra, el costo fijo de hacer el pedido y el costo de mantenimiento del inventario, sea:

$C_a$  = costo por unidad cuando  $Q > q$

$C_b$  = costo por unidad cuando  $Q \geq q$

donde  $C_a > C_b$

En primer lugar se calcula el valor de Q empleando la fórmula de lote económico.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3}}$$

Luego se calcula el costo total cuando  $Q < q$  es:

$$C_{A1} = C_a D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

Cuando  $Q > q$  el costo es:

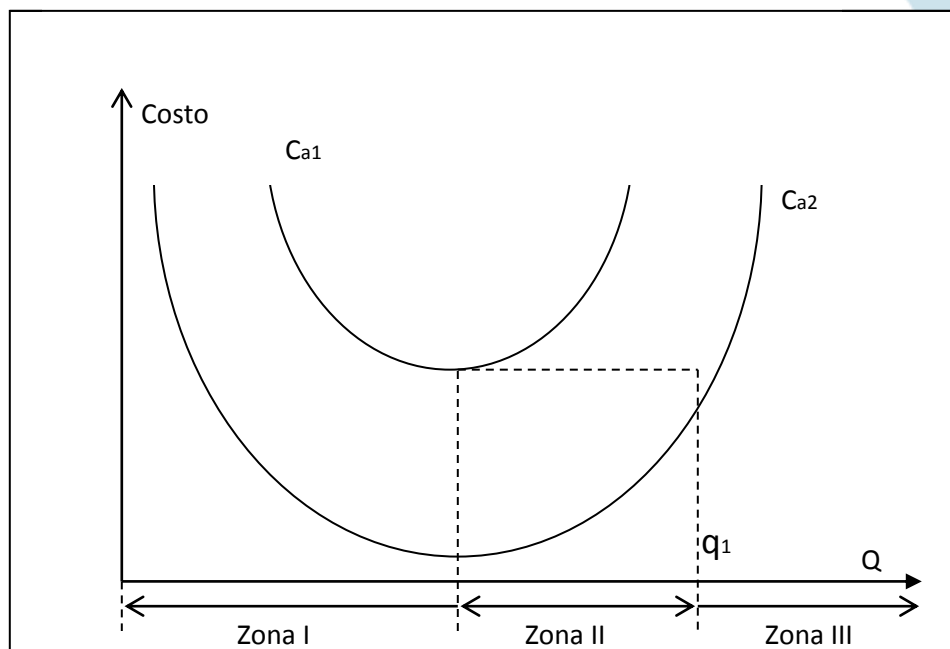
$$C_{A2} = C_b D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

Las funciones de costo  $CA1$  y  $CA2$  se muestran en la figura 6, donde se observa que la cantidad económica a pedir depende del valor de  $q$ , el cual puede estar en las zonas 1, 2 o 3 definidas al hallar el valor  $q_1$  a partir de la siguiente fórmula:

$$C_{A1}(q) = C_{A2}(q_1)$$

$$C_a D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} = C_b D + C_2 \frac{D}{q_1} + C_3 \frac{q_1}{2}$$

Figura 7: Funciones de Costo



Fuente: El Autor

Como  $q_1$  tendrá dos valores por definición se escoge el mayor.

La cantidad óptima a pedir se define de la siguiente manera:

$$Q^* = \begin{cases} Q, & \text{si } 0 \leq q < Q \quad (\text{zona 1}) \\ q, & \text{si } Q \leq q < q_1 \quad (\text{zona 2}) \\ Q, & \text{si } q \geq q_1 \quad (\text{zona 3}) \end{cases}$$

Ejemplo:

Un artículo se consume a razón de 300 artículos por mes. El costo por unidad es de \$100 para cantidades menores o iguales a 350 y \$80 para cualquier otra cantidad. El costo de mantenimiento del inventario por unidad es de \$15, y el costo de hacer un pedido es de \$6. Suponiendo que el modelo no permite escasez. Calcular la cantidad de artículos a pedir.

D= 300 Unidades por mes

Ca= \$100 por unidad.

Cb= \$80 por unidad.

C2= \$ 6 por unidad.

C3= \$15 por pedido.

q= 350

Primero se calcula la cantidad a pedir.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3}}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * 6 * 300}{15}} = 15.49 \text{ Unidades} \cong 16 \text{ Unidades}$$

Se evalúa este valor en la zona I, así:

$$Q^* = \begin{cases} Q, & \text{si } 0 \leq q < Q \quad (\text{zona 1}) \\ q, & \text{si } Q \leq q < q_1 \quad (\text{zona 2}) \\ Q, & \text{si } q \geq q_1 \quad (\text{zona 3}) \end{cases}$$

Como  $Q = 16$  Unidades y  $q = 350$  Unidades,  $Q$ , **no** se encuentra en la zona 1, por lo tanto se debe analizar si  $Q$  se encuentra en la zona 2 o la zona 3.

$$C_{A1} = C_a D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

$$C_{A1} = 100 * 300 + 6 * \frac{300}{16} + 15 * \frac{16}{2}$$

$$C_{A1} = 30157,5$$

$$C_{A2} = C_b D + C_2 \frac{D}{q_1} + C_3 \frac{q_1}{2}$$

$$C_{A2} = 80 * 300 + 6 * \frac{300}{q_1} + 15 * \frac{q_1}{2}$$

Como

$$C_{A1}(q) = C_{A2}(q_1)$$

$$C_a D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} = C_b D + C_2 \frac{D}{q_1} + C_3 \frac{q_1}{2}$$

$$30157.5 = 24000 + \frac{1800}{q_1} + 7.5 * q_1$$

$$30157.5 - 24000 = \frac{1800 + 7.5q_1^2}{q_1}$$

$$6157.5q_1 = 1800 + 7.5q_1^2$$

Ordenando la ecuación se tiene:

$$7.5q_1^2 - 6157.5q_1 + 1800 = 0$$

Resolviendo la anterior ecuación cuadrática así:

$$q_1 = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$$

$$q_1 = \pm \sqrt{\frac{(6157.5)^2 - 4(7.5)(1800)}{2(7.5)}}$$

$$q_1 = \pm 1578$$

Se analiza este nuevo valor con el valor de cada intervalo así:

$$Q^* = \begin{cases} Q, & \text{si } 0 \leq q < Q \quad (\text{zona 1}) \\ q, & \text{si } Q \leq q < q_1 \quad (\text{zona 2}) \\ Q, & \text{si } q \geq q_1 \quad (\text{zona 3}) \end{cases}$$

Ya que  $q = 350$ , se deduce que esta en la zona II. Por lo tanto la cantidad a pedir corresponde a 350 Unidades.

El costo del pedido es:

$$C_{A2} = C_b D + C_2 \frac{D}{q_1} + C_3 \frac{q_1}{2}$$

$$C_{A2} = 80 * 300 + 6 * \frac{300}{350} + 15 * \frac{350}{2}$$

$$C_{A2} = 24000 + 5.14 + 2625$$

$$C_{A2} = 26630.14$$

En el ejemplo anterior se manejan solamente dos límites de precio, ahora en el siguiente ejemplo se plantea el procedimiento a seguir cuando se manejan más de dos límites de precios.

**PASO 1:** Calcular la cantidad óptima a pedir para cada intervalo de descuentos que se manejen utilizando la fórmula de la cantidad económica a pedir teniendo en cuenta que se manejan diferentes precios.

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3}}$$

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{i * C_1}}$$

Donde:

Q\*= Cantidad óptima a pedir.

D= Demanda.

C1= Costo de compra unitario.

C2= Costo de preparación del pedido (\$ / orden)

C3= Costo de almacenamiento o de mantener el inventario  $C3 = i * C1$

i = Costo de mantener el inventario en %

**Paso 2:** Determinar si  $Q_i$  es viable comparando el valor obtenido de  $Q_i$  con respecto al intervalo de costo correspondiente. Cuando el valor obtenido no es viable el valor óptimo de  $Q_i$  se define por el límite inferior del intervalo.

**Paso 3:** Calcular el costo total par cada uno de los valores de  $Q_i$  obtenidos en el paso anterior. Teniendo en cuenta la fórmula de costo total:

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

**Paso 4:** Comparar los costos totales y escoger el menor costo, este menor costo determinara el número de unidades que se deben pedir.

Ejemplo: Determinar la cantidad económica a ordenar para un artículo con los siguientes precios:

Tabla 6. *Datos ejemplo cantidad Económica a Ordenar*

Intervalo	Cantidad (Q)	Precio
1	0 a 500	30
2	501 a 1000	25
3	1001 en adelante	20

Si la demanda del producto es de 600 unidades al mes, el costo de hacer un pedido es de \$800, y los costos de mantenimiento del inventario se calculan sobre una base de interés del 10% mensual.

**Paso 1:** Determinar la cantidad óptima a pedir para cada intervalo de descuentos.

D= 600 Unidades/mes

C<sub>11</sub> = 30

C<sub>12</sub> = 25

$$C13 = 20$$

$$C2 = 800$$

$$C31 = 30 * 0.1 = 3$$

$$C32 = 25 * 0.1 = 2.5$$

$$C33 = 20 * 0.1 = 2$$

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3}}$$

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2 * 800 * 600}{3}} = 565.68 \text{ Unidades}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2 * 800 * 600}{2.5}} = 619.67 \text{ Unidades}$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2 * 800 * 600}{2}} = 692.82 \text{ Unidades}$$

**Paso 2:** Determinar si  $Q_i$  es viable comparando el valor obtenido de  $Q_i$  con respecto al intervalo de costo correspondiente. Cuando el valor obtenido no es viable el valor óptimo de  $Q_i$  se define por el límite inferior del intervalo.

$$0 < 565.68 < 500 \quad \text{No Viable}$$

$$\text{Por lo cual } Q_1 = 0$$

$$500 < 619.67 < 1000 \quad \text{Viable}$$

$$1000 < 692.82 < \infty \quad \text{No viable}$$

$$\text{Por lo cual } Q_3 = 1000$$

**Paso 3:** Calcular el costo total par cada uno de los valores de  $Q_i$  obtenidos en el paso anterior:

$$C_{A1} = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

$$C_{A1} = 30 * 600 + 800 \frac{600}{0} + 3 \frac{0}{2}$$

$$C_{A1} = 18000$$

$$C_{A1} = 18000$$

$$C_{A2} = 25 * 600 + 800 \frac{600}{619.67} + 2.5 \frac{619.67}{2}$$

$$C_{A2} = 15000 + 774.60 + 774.58$$

$$C_{A2} = 16549.18$$

$$C_{A3} = 20 * 600 + 800 \frac{600}{1000} + 2 \frac{1000}{2}$$

$$C_{A3} = 12000 + 480 + 1000$$

$$C_{A3} = 13480$$

**Paso 4:** Comparar los costo totales y escoger el menor costo.

$$C_{A1} = 18000$$

$$C_{A2} = 16549.18$$

$$C_{A3} = 13480$$

En conclusión el mínimo costo total corresponde a  $CA3 = 13480$ , por lo tanto el número de unidades a pedir es de 1000 unidades.

## Sección 2. Descuentos Incrementales.

En este modelo se maneja un precio de compra en referencia a la cantidad solicitada. La idea del modelo es calcular la cantidad óptima a pedir en base a la escala de descuentos que se manejen.

En la figura 7 se evalúa el costo unitario para cada región de corte de precios, con los costo unitarios se calcula el costo anual para cada intervalo.

La función del costo promedio anual para un determinado intervalo es la siguiente:

$$\text{Si: } q_{j-1} < Q < q_j$$

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

$$\text{Si } C_3 = i * C_j$$

$$C_A = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + (i * C_j \frac{Q}{2})$$

El costo promedio anual se obtiene dividiendo la función de costo anual por la cantidad a pedir Q

$$\frac{C_A}{Q} = \left[ C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + (i * C_j \frac{Q}{2}) \right] / Q$$

$$\frac{C_A}{Q} = \frac{C_1 D}{Q} + \frac{C_2 D}{Q} + \frac{i C_j Q}{2Q}$$

Derivando la función del costo anual promedio respecto de Q e igualando a cero se obtiene la cantidad económica a pedir:

$$Q_i = \sqrt{\frac{2D(C_2 + C_{Ai-1} + C_1(q_i - q_{i-1}))}{i * C_j}}$$

Donde

$C_{Ai-1}$  = costo total del periodo anterior.

$C1(q_i - q_{i-1}) =$  Costo unitario de las unidades del intervalo  $i$ .

Como se trabajan varios intervalos cada uno con diferente precio debemos tener en cuenta esta diferencia de precio para el cálculo del costo anual

El siguiente es el resumen de los pasos para solucionar un modelo que contiene descuentos incrementales:

**Paso 1:** Calcular por separado el valor de  $Q$  correspondiente a cada intervalo de precios. Es necesario que la fórmula para hallar el valor de  $Q$  se tenga en cuenta el costo unitario del producto.

**Paso 2:** Determinar cual de los valores calculados anteriormente caen en el intervalo correcto.

**Paso 3:** Hallar el costo total correspondiente a los valores de  $Q$  fijados en el paso 2, y compararlos y elegir el mínimo.

Ejemplo: Determinar la cantidad económica a ordenar para un artículo con los siguientes precios con descuento incremental:

Tabla 7. *Datos ejemplo Cantidad Económica con Descuento Incremental.*

Intervalo	Cantidad (Q)	Precio
1	0 a 500	30
2	501 a 1000	25

3	1001 en adelante	20
---	------------------	----

Si la demanda del producto es de 600 unidades al mes, el costo de hacer un pedido es de \$800, y los costos de mantenimiento del inventario se calculan sobre una base de interés del 10% mensual.

**Paso 1:** Determinar la cantidad óptima a pedir para cada intervalo de descuentos.

$$D = 600 \text{ Unidades/mes}$$

$$C_{11} = 30$$

$$C_{12} = 25$$

$$C_{13} = 20$$

$$C_2 = 800$$

$$C_{31} = 30 * 0.1 = 3$$

$$C_{32} = 25 * 0.1 = 2.5$$

$$C_{33} = 20 * 0.1 = 2$$

En la siguiente tabla se muestran los datos necesarios del problema:

Tabla 8. *Desarrollo Inicial Cantidad Económica*

Intervalo i	$C_i$	$q_i$	$C_{A_{i-1}} + C_1(q_i - q_{i-1})$
1	30	500	$(30 * Q) - 0 = 15000$
2	25	1000	$15000 - 25(500) = 2500$

3	20	>1000	25000 – 20 (1000)
---	----	-------	-------------------

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2D(C_2 + C_{Ai-1} + C_1(q_i - q_{i-1}))}{i * C_i}}$$

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2 * 800(600 + 0 - 0)}{3}} = 565.68 \text{ Unidades}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2 * 800(600 + 15000 - 25 * 500)}{2.5}} = 1408.54 \text{ Unidades}$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2 * 800(600 + 25000 - 20 * 1000)}{2}} = 2116.60 \text{ Unidades}$$

**Paso 2:** Determinar si  $Q_i$  es viable comparando el valor obtenido de  $Q_i$  con respecto al intervalo de costo correspondiente. Cuando el valor obtenido no es viable el valor óptimo de  $Q_i$  se define por el límite inferior del intervalo.

$0 < 565.68 < 500$  No Viable

Por lo cual  $Q_1 = 0$

$500 < 1408.54 < 1000$  NoViable

Por lo cual  $Q_2 = 500$

$1000 < 2116.60 < \infty$  viable

Por lo cual  $Q_3 = 2116.60$

**Paso 3:** Calcular el costo total par cada uno de los valores de  $Q_i$  obtenidos en el paso anterior:

$$C_{A1} = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

$$C_{A1} = 30 * 600 + 800 \frac{600}{0} + 3 \frac{0}{2}$$

$$C_{A1} = 18000$$

$$C_{A1} = 18000$$

$$C_{A2} = 25 * 600 + 800 \frac{600}{500} + 2.5 \frac{500}{2}$$

$$C_{A2} = 15000 + 960 + 625$$

$$C_{A2} = 16585$$

$$C_{A3} = 20 * 600 + 800 \frac{600}{2116.60} + 2 \frac{2116.60}{2}$$

$$C_{A3} = 12000 + 226.77 + 2116.60$$

$$C_{A3} = 14343.37$$

**Paso 4:** Comparar los costo totales y escoger el menor costo.

$$C_{A1} = 18000$$

$$C_{A2} = 16585$$

$$C_{A3} = 14343$$

En conclusión el mínimo costo total corresponde a  $C_{A3} = 14343$ , por lo tanto el número de unidades a pedir es de 2117 unidades.



## Lección 9: Políticas para el Manejo de Inventarios.

Los sistemas de administración o Gestión de inventarios es una de las principales preocupaciones en una empresa, independientemente de su tamaño o sector de su actividad, debido a la importancia que tiene el:

- No hacer esperar al cliente.
- Efectuar la producción a un ritmo regular aunque la demanda fluctúe.
- Comprar los bienes al precio más bajo.

Es por esto que se hace necesario definir perfectamente lo siguiente:

- ¿Qué artículos pedir?
- ¿Qué cantidad debemos pedir?, debe ser una cantidad fija o una cantidad variable según el nivel del inventario.
- ¿Cuándo debemos hacer el pedido?, a fecha fija o a fecha variable, dependiendo del nivel del inventario.

De acuerdo con lo anterior se deben tomar decisiones sobre la gestión de los inventarios, las cuales podemos clasificar en base a lo siguiente:

- a) POLÍTICAS DE INVENTARIOS, para las cuales se definen diferentes modelos de análisis.
- b) DIMENSIONAMIENTO DE LAS CANTIDADES A ORDENAR, las cuales están en función de las Políticas definidas.
- c) SISTEMAS DE CONTROL A IMPLEMENTAR.

La Política de Inventario se refiere a la Revisión y Disciplina utilizada para ordenar y controlar los inventarios.

La política de Inventario trata de responder a las siguientes interrogantes:

- ¿Cuándo debe ser emitida la orden?
- ¿Cuánto se debe comprar (tamaño del lote)?

Existen dos tipos de Políticas de Revisión de Inventarios: Política de Revisión Periódica y Política de Revisión Continua.

La elección de un sistema de revisión dependerá de varios factores:

En el caso de Sistemas de Revisión Periódica, estos sistemas están asociados básicamente a modelos de reaprovisionamiento. Como ventajas de estos sistemas de revisión periódicos se pueden mencionar:

- Fácil de llevar.
- Es bueno para coordinar ítems relacionados, ya que aprovecha mejor la infraestructura de transporte.
- Es bueno en el caso de que se quiera manejar artículos baratos.
- Como desventajas de los sistemas de revisión periódicos se pueden mencionar:
  - Es más caro, del punto de vista de que maneja una mayor cantidad de mercadería en inventario.
  - Es susceptible a que ocurran faltas cuando la demanda es variable.

En el caso de los Sistemas de Revisión Continua, como ventajas tenemos que:

- Optimiza los niveles de recursos involucrados.
- El nivel de servicio es mejor, ya que mejora la probabilidad de que el pedido sea abastecido con el inventario existente.

- Es apropiado para artículos caros.

Pero el sistema de revisión continua tiene los siguientes inconvenientes:

- Tiene un alto costo por manejos de registro y requiere una constante atención en el producto.

De acuerdo con lo anterior se pueden considerar cuatro sistemas de reaprovisionamiento para cada artículo, como se muestra en la tabla 9.

Tabla 9. Sistemas de reaprovisionamiento del inventario.

PERIODO	CANTIDAD
FIJO	FIJO
VARIABLE	FIJO
FIJO	VARIABLE
VARIABLE	VARIABLE

Fuente: Logística Empresarial

Teniendo en cuenta la tabla 1 se puede describir una política de gestión de stocks indicando, mediante un par ordenado, *cuándo (periodo)* y *cuánto (cantidad)* se pide, así: una política **(s,Q)** significará que se lanza una orden de tamaño fijo **Q** cada vez que la posición del stock sea inferior a **s** unidades. Otras políticas posibles son: **(T,S)** con la cual se lleva a cabo un pedido cada **T** unidades de tiempo, de tamaño igual a la diferencia entre la cobertura **S** y el nivel de stock detectado; la política **(s,S)**, la cual implica la solicitud de un pedido de un tamaño suficiente para abastecer la cobertura **S** cada vez que la posición del stock sea inferior al punto de pedido **s**; y la política **(T,Q)**, en la que se solicitaría un pedido fijo **Q** cada **T** unidades de tiempo.

## Sección 1 Políticas de Revisión Continua.

En la política de revisión continua se revisa el nivel del inventario en forma continua, cuando el nivel del inventario llega al punto de pedido o punto de reorden (R) se debe ordenar una cantidad Q.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

- IDENTIFICACIÓN DEL MODELO:  
MODELO DE COMPRA SIN DEFICIT.

- CALCULAR LOS PARÁMETROS DEL MODELO:

Recordemos los resultados de un modelo de compra sin déficit:

$$Q^* = 3286 \text{ Unidades}$$

$$t = 2.2 \text{ Meses} = 66 \text{ Días.}$$

- DETERMINAR EL TIEMPO DE ANTICIPACIÓN. Definir en este modelo el tiempo de anticipación es un dato histórico,  $L=30$  Días. Calcular la demanda durante este tiempo de anticipación.

$$D_L = D.L = 1500 \frac{\text{unidades}}{\text{Mes}} \times 1 \text{ Mes} = 1500 \text{ Unidades}$$

- CALCULAR EL PUNTO DE PEDIDO ( $D_p$ ).

En este caso  $D_p$  es igual a  $DL$

$$D_p = D \times L = 1500 \text{ Unidades}$$

#### ADMINISTRACIÓN:

Revisar el nivel del inventario en forma continua. Cuando el nivel del inventario sea igual al punto de pedido (1500 unidades) ordenar una cantidad  $Q$  (3286 unidades).

En el ejemplo anterior el tiempo de anticipación es menor que el tiempo del ciclo.

En el ejemplo siguiente se tiene un tiempo de anticipación mayor que el tiempo del ciclo.

Suponer que  $L = 75$  Días.

#### MODELO: COMPRA SIN DEFICIT.

#### PARÁMETROS:

$$Q^* = 3286 \text{ Unidades}$$

$$t = 2.2 \text{ Meses} = 66 \text{ Días.}$$

✚ DEMANDA DURANTE EL TIEMPO DE ANTICIPACIÓN:

$$D_L = D.L = 50 \text{ unidades/Día} \times 75 \text{Días} = 3750 \text{ Unidades}$$

✚ CALCULAR EL PUNTO DE PEDIDO:

$$D_p = D_L = 3750 \text{ Unidades}$$

Como se puede apreciar la cantidad del punto de pedido es mayor que la cantidad a ordenar de 3286 unidades.

Cuando el tiempo de anticipación es mayor que el tiempo del ciclo es necesario cambiar la administración del sistema.

✚ ADMINISTRACIÓN:

Cuando el nivel del inventario (existencias disponibles en el momento) MAS el número de unidades pedidas ( $U_p$ ), pero no recibidas sea igual al punto de pedido se debe ordenar  $Q$  unidades. En este caso se tiene:

#P= Número de pedidos pendientes

#P= parte entera entre:  $(L/t)$

#P= ENT(75 Días/ 66 Días)= 1 Pedido.

$$UP = \#P. Q = 3286 \text{ Unidades}$$

$$D_p = ED + U_p$$

$$ED = D_p - U_p = D_p - (\# P.Q)$$

Por lo tanto el nuevo punto de pedido es:

$$N_{Dp} = D_p - \# P.Q$$

$$N_{Dp} = 3750 - 3286 = 464 \text{ Unidades}$$

En conclusión: Cuando el nivel del inventario llegue a 464 unidades, lo cual sucede 9 días antes de agotarse las existencias del inventario se debe solicitar un nuevo pedido Q de 3286 unidades.

## Sección 2. Políticas de Revisión Periódica.

Bajo esta política, los Niveles de Inventario son monitoreados a intervalos de tiempo T, donde T es la longitud de tiempo determinada según sea el criterio ordenado.

Cuando el sistema de inventario es Determinísticos y la tasa de demanda es constante, existe poca diferencia entre el sistema P y el sistema Q.

A través del siguiente ejemplo se desarrolla la administración del inventario por el sistema P.

Datos:

Demanda del artículo = 1500 Unidades por mes, se permite Déficit, los costos del modelo son:

Costo unitario del producto = 20\$/unidad.

Costo de preparación del pedido = 6000\$/pedido.

Costo de almacenamiento = 20 \$/unidad-año.

Costo por faltantes = 100 \$/unidad-año.

✚ MODELO: COMPRA CON DEFICIT.

✚ PARÁMETROS:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3} \cdot \left(\frac{C_3 + C_4}{C_4}\right)} = \sqrt{\frac{2 * 6000 * 1500}{20} \left(\frac{20 + 20}{20}\right)}$$

$$Q^* = 3600 \text{ Unidades}$$

$$t^* = \frac{Q}{D} = \frac{3600}{1500} = 2,4 \text{ Meses} = 72 \text{ Días.}$$

$$S^* = Q \left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} \right) = 600 \text{ Unidades}$$

$$I_m = Q - S = 3000 \text{ Unidades}$$

✚ TIEMPO DE ANTICIPACIÓN:

$$L = 30 \text{ Días.}$$

Cantidad a pedir:  $C_p = Q^* + E_s - E_d - U_p + D_L - S$

$E_s$  = Existencias de seguridad = 0, para un modelo determinístico.

$E_d$  = Existencias Disponibles =  $D_p - U_p = (D \cdot L) - \#P \cdot Q$

$U_p$  = Unidades pedidas pero no recibidas = 0, cuando no hay pedidos pendientes, en este caso  $L < t$ .

$S$  = Déficit Permitido = 0, cuando se trabaja un modelo sin déficit.

$D_L$  = Demanda durante el tiempo de anticipación =  $D \cdot L = 50 \cdot 30 = 1500$  Unidades.

$$C_p = Q^* + E_s - E_d - U_p + D_L - S$$

$$C_{p1} = 3600 - 0 - 1500 - 0 + 1500 - 600 = 3000 \text{ Unidades}$$

$$C_{p2} = 3600 - 0 - 900 - 0 + 1500 - 600 = 3600 \text{ Unidades}$$

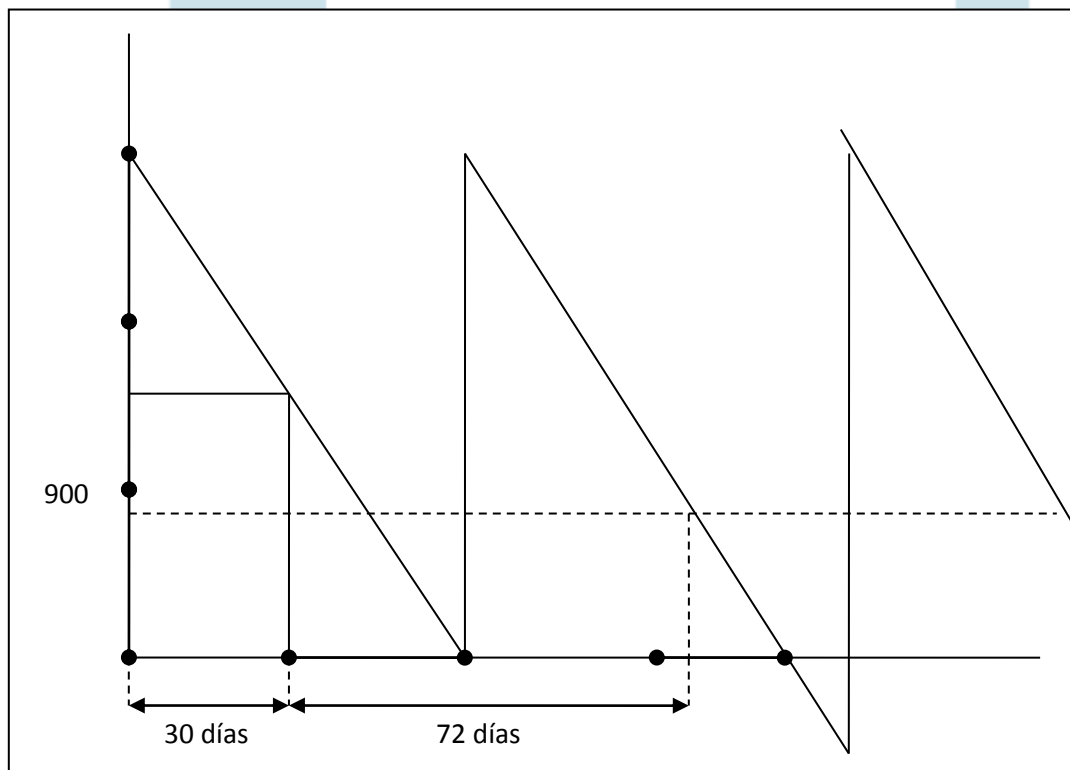
$$C_{p3} = 3600 - 0 - 900 - 0 + 1500 - 600 = 3600 \text{ Unidades}$$

### ADMINISTRACIÓN:

Revisar el nivel del inventario en forma periódica, cada 72 días y en ese momento colocar un pedido de  $C_p$  Unidades. Ver figura 7

Inicialmente la primera revisión se hace a los 30 días (tiempo de anticipación).

Figura 8: Comportamiento de un modelo administrado por el sistema P.



Cuando el tiempo de anticipación es mayor que el tiempo del ciclo el número de pedidos pendientes se calcula con la siguiente fórmula:

#P= Número de pedidos pendientes

#P= parte entera entre:  $(L/t)$

Ejemplo:

L= tiempo de anticipación= 75 días.  $L > t$


✚ Modelo de Compra con Déficit.

✚ Parámetros:

Q = 3600 Unidades

t = 72 Días.

S= 600 Unidades

 L = 75 Días

#P= ENT(75 Días/ 72 Días)= 1 Pedido.

UP = #P. Q = 3600 Unidades

Tiempo para la primera revisión= 30 días.

Demanda durante el tiempo de anticipación:  $DL= D*L=50*75=3750$  Unidades.

Nuevo tiempo de anticipación:

$$L' = L - \#P * t = 75 - (1 * 72) = 3 \text{ días}$$

Es= Existencias de seguridad = 0, para un modelo determinístico.

$$C_p = Q^* + Es - Ed - Up + D_L - S$$

$$C_{p1} = 3600 - 0 - 1500 - 3600 + 3750 - 600 = 2650 \text{ Unidades}$$

$$C_{p2} = 3600 - 0 - 1500 - 1650 + 3750 - 600 = 3600 \text{ Unidades}$$

$$C_{p3} = 3600 - 0 + 450 - 3600 + 3750 - 600 = 3600 \text{ Unidades}$$

## Lección 10: Análisis de Sensibilidad en los Modelos de Inventarios

Los modelos vistos anteriormente parten del hecho de que la información del modelo se conoce con certeza pero en muchos de los casos esto no es cierto, la mayoría de las veces las variables del modelo se trabajan con datos estimados o aproximadamente constantes. Debido a lo anterior los resultados obtenidos con estos modelos en algunas ocasiones no son viables lo cual le resta validez al modelo.

Para Víctor Jaime García Urdaneta<sup>9</sup>, el análisis de sensibilidad que se describen a continuación busca no restringir la gran cantidad de aplicaciones que tienen los modelos que manejan variables aproximadamente constante y no restringir la aplicación de estos modelos.

### Sección 1. Análisis de sensibilidad Tipo 1

Este tipo de análisis permite medir los cambios que se generan en la cantidad económica de pedido ante cambios en las variables de entrada, los cuales pueden deberse a fallas en su estimación (deben ser relativamente pequeñas si se efectúan correctamente), o a cambios en las condiciones del mercado o de la empresa que de alguna manera obligan a replantear las estimaciones iniciales.

Estos cambios se pueden medir manejando los valores reales sobre los presupuestados, según:

D = Demanda real  
Co = Costo de pedido real

Dt = Demanda teórica o estimada  
Cot = Costo de pedido teórico o estimado

<sup>9</sup> García Urdaneta, Víctor Jaime (2002). Análisis de Sensibilidad. Consultado en 2007 en <http://basicamente.usta.edu.co/antiores/numero2/mainartic2.htm>.

$C_c$  = Costo de mantenimiento real       $C_{ot}$  = Costo de mantenimiento teórico

Que al remplazar en la expresión:

$$K = \frac{Q}{Q_t} = \sqrt{\frac{D * C_{ot} * C_c}{D_t * C_{ot} * C_c}}$$

Conduce a un valor de K que nos permite ver el cambio en la cantidad económica de pedido. Estos cambios pueden en un momento determinado mostrar una faceta diferente a la que se obtendría a partir del análisis financiero, donde uno de los indicadores que se maneja es rotación de inventarios, el cual debe mantenerse en determinados parámetros de acuerdo a algunos teóricos, quienes afirman que los cambios en la cantidad a pedir deben moverse en la misma proporción y sentido que los cambios en la demanda y desconocen el efecto que pueden generar en los costos de pedido y de conservación. Desde la óptica que estamos utilizando podemos demostrar que: *“la cantidad económica de pedido varía en proporción directa a la raíz cuadrada de los cambios en la demanda y en el costo de pedido y en relación inversa a la raíz cuadrada de los cambios en los costos de mantenimiento”*.

La gran ventaja de este tipo de análisis de sensibilidad, a diferencia del que se emplea en otros temas, es que nos permite ver los efectos combinados de cambios en las diferentes variables de entrada en forma conjunta y/o separada.

Ejemplo:

Una empresa, después de un cuidadoso estudio del comportamiento de su mercado y de sus costos, estimó que la demanda para el próximo periodo va a ser de 500.000 unidades, con un costo de pedido de \$40.000 y un costo de conservación de \$100. De acuerdo a estos datos, es necesario encontrar la cantidad económica de pedido y estimar como varía si se presentan incrementos en la demanda, en los costos de pedido y en los costos de mantenimiento del 10%.

En las condiciones estimadas la cantidad económica de pedido será:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 500.000 \times 40.000}{100}} = 20.000$$

--Un incremento del 10% en la demanda implicaría una nueva cantidad, de la siguiente forma:

$$K = \sqrt{\frac{550.000}{500.000}} = \sqrt{1.1} = 1.04881$$

$$Q_f = 1.04881 \times 20.000 = 20.976,18$$

Lo que nos permite ver que un incremento en la demanda del 10% tan solo incrementa mi cantidad de pedido en un 4,88% (976,8/20000).

-- Un incremento del 10% en el costo de pedido, implica exactamente los mismos cambios que el incremento que acabamos de analizar en la demanda, ya que el K se obtendría de calcular la raíz cuadrada del incremento, es decir, de 1.1.

-- El incremento en el costo de mantenimiento tiene un tratamiento diferente, ya que:

$$K = \sqrt{\frac{100}{110}} = \sqrt{0,9091} = 0,9535$$

$$Q_f = 0,9535 \times 20.000 = 19.069,25$$

En este caso, un incremento en los costos de mantenimiento del 10% implica una disminución de la cantidad a pedir del 4,65%

-- En caso de querer analizar los cambios en la tres variables de entrada simultáneamente el nuevo valor a pedir será:

$$K = \sqrt{\frac{550.000 \times 44.000 \times 100}{500.000 \times 40.000 \times 110}} = \sqrt{1.1} = 1.04881$$

$$Q_f = 1.04881 \times 20.000 = 20.976.18$$

Donde podemos apreciar que los cambios en las variables de entrada se pueden compensar en un momento dado, logrando de esta forma que mis cambios en la política de inventarios no sean significativos, siempre y cuando las estimaciones sean coherentes con la realidad.

## Sección 2. Análisis de sensibilidad tipo 2

Este tipo de análisis nos permite ver cómo se incrementan los costos asociados al manejo de inventarios, cuando por condiciones externas al modelo se deben pedir cantidades diferentes; las fórmulas a utilizar son:

$$k = \frac{Q_{real}}{Q_{teórico}}$$
$$L = \frac{k + \frac{1}{k}}{2}$$

Donde la constante  $k$  permite medir el cambio entre la cantidad real y la cantidad económica de pedido teórica, y la constante  $L$  el incremento en los costos asociados al modelo.

Ejemplo:

Una empresa estima que su demanda anual es uniforme y de 420.000 unidades del insumo A25, el cual es muy importante en su proceso productivo y tiene un costo de pedido de \$50.000 y un costo de mantenimiento de \$200; debe determinarse, en primer lugar, la política de inventarios a seguir y, en segundo lugar, si el proveedor solo despacha múltiplos de 5.000 unidades, cómo debe cambiar la política de compras y el nuevo costo asociado.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 420.000 \times 50.000}{200}} = 14.491,37$$

$$N = \frac{420.000}{14.491,37} = 28,98$$

$$tc = \frac{14.491,37}{420.000} \times 360 = 12,42$$

$$CA = \sqrt{2 \times 420.000 \times 50.000 + 200} = 2.898.275,34$$

Inicialmente la empresa debe efectuar compras de 14.491,37 unidades si desea trabajar de acuerdo a un modelo clásico, dicha política le representa un costo asociado de \$2.898.257,37, en caso de tener que comprar solamente múltiplos de cinco mil unidades, debe ensayar con los valores más cercanos a dicha cantidad, que para el ejemplo serían diez y quince mil unidades, valores que cumplen por encima y por debajo de la cantidad teórica.

Con diez mil unidades:

$$k = \frac{Q_{real}}{Q_{teórico}} = \frac{10.000}{14.491,37} = 0,6901$$

$$L = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} = \frac{0,6901 + 1/0,6901}{2} = 1,0696$$

Con quince mil unidades:

$$k = \frac{Q_{real}}{Q_{teórico}} = \frac{15.000}{14.491,37} = 1,0351$$

$$L = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} = \frac{1,0351 + 1/1,0351}{2} = 1,00059$$

De acuerdo con los valores encontrados, el pedir una cantidad inferior a la teórica, en este caso diez mil unidades, implica un incremento cercano al 7% en los costos asociados al modelo, mientras que si se piden quince mil unidades podemos apreciar que un incremento en la cantidad a pedir del 3.5% con respecto a la cantidad teórica tan solo incrementa los costos en un 0.05%, cantidad que no es realmente significativa.

Con el ejemplo anterior podemos ver que si los condicionamientos externos al modelo no obligan cambios importantes, el manejar valores aproximados a la cantidad teórica no implica grandes diferencias en los costos asociados al modelo, al contrario, si los cambios son relativamente importantes, la variación en los costos asociados puede disminuir considerablemente la rentabilidad de la empresa, por lo que resulta necesario conocer tales cambios para poder diseñar políticas que permitan a la empresa manejar en forma adecuada la situación; se debe ser muy cuidadoso al estudiar la magnitud de los cambios, ya que si estos son relativamente altos pueden disparar nuestros costos considerablemente y si no somos conscientes de ello podemos incurrir en pérdidas sin darnos cuenta.

## CAPITULO 3: MODELO PARA MÚLTIPLES ARTÍCULOS CON RESTRICCIÓN DE RECURSOS

### Introducción

Los modelos de inventario analizados anteriormente se aplican para un solo producto. Cuando una empresa maneja varios artículos se puede aplicar estos modelos a cada producto por separado. Sin embargo pueden existir restricciones que hacen no óptima la solución obtenida, como el espacio suficiente para el almacenamiento o no contar con los recursos suficientes para su adquisición.

En muchas ocasiones las restricciones de recursos y almacenamiento son las mas comunes, para la explicación del modelo se maneja cada una por separado y luego se realiza el análisis al caso de las dos restricciones.

**Lección 11:** Modelo para Varios Artículos con Limitaciones en Almacenamiento.

Sea **A**, el área máxima disponible para el almacenamiento de **n** artículos, **a<sub>i</sub>** el área ocupada por cada artículo y **Q<sub>i</sub>** la cantidad a ordenar por cada uno de los artículos, la restricción de almacenamiento esta dada por la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=1}^n a_i Q_i \leq A$$

Para el desarrollo del modelo se supone que el artículo se repone instantáneamente, no hay descuentos por cantidad, y no se permite escasez.

Para hallar el valor óptimo se obtiene minimizando el costo anual

Como primera parte de la solución es necesario verificar si la restricción es activa o no, lo cual se logra hallando la cantidad óptima  $Q_i$ , para cada producto y verificando si estas cantidades satisfacen la restricción de almacenamiento.

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2C_{2i}D_i}{C_{3i}}}$$

Si

$$\sum_{i=1}^n a_i Q_i \leq A \quad (\text{Restricción No Activa})$$

$$\sum_{i=1}^n a_i Q_i > A \quad (\text{Restricción Activa})$$

Recuerde que:

Si la restricción es No activa, la solución esta dada por los valores  $Q_i$  obtenidos y terminaría el problema.

Cuando la restricción es activa, es necesario buscar nuevos valores para  $Q_i$  que satisfacen la restricción de almacenamiento en el sentido de la igualdad.

En esta segunda parte del problema se utiliza la función de LAGRANGE, la cual considera tanto la función objetivo como la restricción.

$$L(\lambda, Q_1, Q_2 \dots Q_n) = C_A(Q_1, Q_2 \dots Q_n) - \lambda \left( \sum_{i=1}^n a_i Q_i - A \right)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de LAGRANGE.

Igualando a cero las primeras derivadas parciales se obtiene los valores óptimos de  $Q_i$  y  $\lambda$

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2C_{2i}D_i}{C_{3i} + 2\lambda^*a_i}}$$

Como el valor de  $\lambda^*$  es negativo, se puede encontrar por prueba y error asignado valores sucesivos a  $\lambda^*$  de manera que los  $Q_i^*$  satisfagan la restricción de almacenamiento.

$$\text{Min } C_A = \sum_{i=1}^n \left( \frac{C_{2i}D_i}{Q_i} + \frac{C_{3i}Q_i}{2} \right)$$

Sujeto a :

$$\sum_{i=1}^n a_i Q_i \leq A$$

$$Q_i > 0, \text{ para toda } i$$

Ejemplo: Determine la cantidad optima a ordenar de cada uno de los productos que maneja una determinada empresa, la información sobre este problema se presenta a continuación.

Tabla 10. *Datos Problema con Restricciones de Almacenamiento.*

	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Demanda	10, 000	8, 000	12, 000
Costo de Ordenar	\$ 120	\$ 150	\$ 130

Costo de mantener	\$ 5	\$ 7	\$ 6
Costo unitario	\$ 25	\$ 15	\$ 30
Área que ocupa	0.5 m <sup>2</sup>	1.0 m <sup>2</sup>	1.2 m <sup>2</sup>

La empresa cuenta con un almacén de 1 500 m<sup>2</sup>, no tiene restricción sobre el capital a invertir.

Solución:

Para desarrollar este problema aplicaremos el algoritmo antes descrito.

### PASO 1:

Determinar las cantidades óptimas para cada uno de los productos.

$$Q = \sqrt{\frac{2D_i C_{2i}}{C_{3i}}}$$

$$Q_1 = 692.82 \text{ (Producto 1)}$$

$$Q_2 = 585.54 \text{ (Producto 2)}$$

$$Q_3 = 721.11 \text{ (Producto 3)}$$

### PASO 2:

Ahora se evalúa si la restricción de área es activa o no, esto se realiza multiplicando la cantidad óptima obtenida para cada producto por el área que ocupa cada producto.

$$Q_1 = 692.82(0.5\text{m}^2) = 346.41$$

$$Q_2 = 585.54(1.0\text{m}^2) = 585.54$$

$$Q_3 = 721.11(1.2\text{m}^2) = 865.33$$

El espacio total que ocupa pedir estas cantidades es:

$$\text{Espacio total} = 1\ 797.28$$

Por lo tanto la restricción es activa, entonces se desarrollará el algoritmo recursivo para encontrar un intervalo donde se encuentre el valor de la restricción.

La cantidad óptima se determinará por la siguiente ecuación.

$$Q = \sqrt{\frac{2D_i C_{2i}}{C_{3i} + 2\lambda a_i}}$$

El valor de  $\lambda$  se encuentra tomando diferentes valores hasta que se encuentre la restricción de espacio de almacenamiento de 1500 metros cuadrados.

Tabla 11 Calculo de  $\lambda$  para problemas con Restricción de Almacenamiento

$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_i a_i$
0.005	692.45(0.5m <sup>2</sup> )	585.12(1.0m <sup>2</sup> )	720.39(1.2m <sup>2</sup> )	1795.82
1	632.45(0.5m <sup>2</sup> )	516.39(1.0m <sup>2</sup> )	609.44(1.2m <sup>2</sup> )	1563.95
1.2	622.17(0.5m <sup>2</sup> )	505.29(1.0m <sup>2</sup> )	592.74(1.2m <sup>2</sup> )	1527.67
1.5	607.64(0.5m <sup>2</sup> )	489.89(1.0m <sup>2</sup> )	570.08(1.2m <sup>2</sup> )	1477.80
1.3664	613.98(0.5m <sup>2</sup> )	496.89(1.0m <sup>2</sup> )	579.85(1.2m <sup>2</sup> )	1499.39

Como se puede apreciar el intervalo dentro de cual se encuentra 1 500 es 1.2 y 1.5.

Para determinar el valor exacto se realiza una interpolación, dando como resultado  $\lambda = 1.3664$ . las cantidades optimas para cada producto serán:

$Q_1 = 613.98$  unidades

$Q_2 = 496.89$  unidades

$Q_3 = 579.85$  unidades

## Lección 12: Modelo para varios Artículos con limitaciones en varios Recursos (espacio y presupuesto).

Existen ocasiones en donde se involucran otro tipo de variables con referencia a la cantidad óptima a pedir, como por ejemplo el capital con que se cuente y el espacio para almacenar las unidades adquiridas. Cuando una empresa maneja varios tipos de productos se vuelve complicado. La empresa debe de ajustar la cantidad óptima a pedir para todos sus productos a las restricciones de capital y área de almacenaje.

Por ejemplo una empresa maneja tres productos A, B, C y debe de realizar pedidos de estos productos. El costo de estos pedidos no debe exceder el capital con que cuente la empresa y el espacio del almacén destinado para almacenar estos pedidos.

Para este caso una o ambas restricciones puede ser inactiva, el problema se puede plantear como sigue:

$$\text{Min } C_A = \sum_{i=1}^n \left( \frac{C_{2i} D_i}{Q_i} + \frac{C_{3i} Q_i}{2} \right)$$

Sujeto a :

$$\sum_{i=1}^n C_i Q_i \leq C \text{ Restricción de presupuesto}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i Q_i \leq A \text{ Restricción de almacenamiento}$$

$$Q_i > 0, \text{ para toda } i$$

El procedimiento se resume en los siguientes pasos:

Paso 1. Resolver el problema sin tener en cuenta las restricciones, si ambas restricciones son inactivas la solución es óptima.

Paso 2. Si las restricciones son activas, se incluye una de las restricciones y se determinan los valores de  $Q_i$ . Si la restricción se cumple la respuesta es óptima.

Paso 3. Si la restricción no se cumple se repite el proceso con la otra restricción,

Paso 4. Cuando ninguna de las soluciones anteriores se cumple, ambas restricciones son activas. Por lo que se debe resolver el problema con ambas restricciones según la siguiente fórmula.

$$C(Q_i, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^n \left( C_i D_i + \frac{C_{2i} D_i}{Q_i} + \frac{C_{3i} Q_i}{2} \right) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n C_i Q_i - C \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n a_i Q_i - A \right)$$

Para solucionar el problema se resuelven las ecuaciones simultáneamente

$$\frac{\partial C}{\partial Q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial C}{\partial \lambda_2} = 0$$

Se desarrolla este procedimiento con un ejemplo:<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Sipper Daniel / Bulfin Robert L., Planeación y control de la producción, 1ª edición, México D.F., Mc. Graw Hill, Junio 1999, pp. 248 -252

HiEnd, una pequeña compañía de computadoras, compra dos tipos de lectoras de discos. Debido al bajo volumen que maneja la compañía, el gerente limita la inversión en inventario a un máximo de \$ 5000. El precio de estas dos lectoras es de \$50 y \$80, respectivamente, y su demanda anual es 250 y 484 unidades, respectivamente. La compañía tiene un gasto de \$50 para procesar la orden de cualquiera de estas lectoras, y el gerente usa un 20% anual para las evaluaciones financieras. Como HiEnd no tiene espacio para almacenar las lectoras de discos, si cada tipo de lectora requiere de 10 y 8 unidades de espacio respectivamente, y se cuenta con un espacio para un total de 500 unidades. ¿Cuántas unidades de cada lectora se deben comprar de manera que se satisfagan las restricciones de espacio y presupuesto?

### Solución:

Paso 1. Resolver el problema sin tener en cuenta las restricciones:

Datos:

$$C_{11} = \$50$$

$$C_{12} = \$80$$

$$D_1 = 250 \text{ Unidades}$$

$$D_2 = 484 \text{ Unidades}$$

$$C_{21} = \$50$$

$$C_{22} = \$ 50$$

$$C_{31} = 0.2 * 50 = \$10$$

$$C_{32} = 0.2 * 80 = \$16$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 * 50 * 250}{0.2 * 50}} = 50 \text{ Unidades}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2 * 50 * 484}{0.2 * 80}} = 55 \text{ Unidades}$$

Usando estos dos valores se calcula la inversión en el inventario:

$$(50) \cdot (50) + (80) \cdot (55) = 6900$$

Como:  $6900 > 5000$  se viola la restricción de presupuesto, por lo tanto, se aplica el método de multiplicadores de Lagrange.

$$C(Q_i, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^n \left( C_i D_i + \frac{C_{2i} D_i}{Q_i} + \frac{C_{3i} Q_i}{2} \right) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n C_i Q_i - C \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n a_i Q_i - A \right)$$

Se calcula Q1 y Q2 usando derivadas parciales:

Implica que:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2 * C_2 * D}{C_3 + 2\lambda C_1}} =$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{25000}{10 + 100\lambda}} =$$

$$Q_1 = \frac{50}{\sqrt{1 + 10\lambda}}$$

Y

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2 * C_2 * D}{C_3 + 2\lambda C_1}} =$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{48400}{16 + 160\lambda}}$$

$$Q_2 = \frac{55}{\sqrt{1 + 10\lambda}}$$

$$\frac{\partial C(Q_i, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda} = 0$$

Implica que:

$$C_1 * Q_1 + C_2 * Q_2 = 5000$$

$$\text{Si: } X = \sqrt{1 + 10\lambda}$$

Entonces:

$$C_1 * Q_1 + C_2 * Q_2 = 5000$$

$$\frac{50 * 50}{X} + \frac{80 * 55}{X} = 5000$$

Despejando

$$X = 1.38$$

Reemplazando en:

$$X = \sqrt{1+10\lambda}$$

Tenemos:

$$\lambda = 0.09044$$

Así:

$$Q_1 = 36.23 \cong 36$$

$$Q_2 = 39.86 \cong 40$$

Entonces la inversión total en el inventario es de:  $(36)*(50)+(40)*(80)= 5000$

### Lección 13: Modelos con Demanda Determinística Dinámica (Modelos Sencillos)

Corresponden a las decisiones de cantidad en modelos con demanda estática pero variable o irregular.

En todos los modelos anteriores, se ha supuesto que la demanda es homogénea, a lo largo del periodo de evaluación, sin embargo esta afirmación no siempre es cierta; En la vida real existen muchos casos en los que la demanda aunque de carácter determinista, es variable debido a diversos factores, principalmente debido a la estacionalidad.

Estos modelos en los cuales a pesar que se conoce la demanda esta cambia cada periodo, algunos autores la denominan demanda irregular, se clasifican según Sipper y Bulfin de la siguiente manera: Reglas Simples, reglas Heurísticas, Wagner-Whitin y regla de Peterson-Silver.

## Sección 1. Modelos Sencillos.

Se dividen en demanda de periodo Fijo, Cantidad a Ordenar por Periodo y Lote por Lote.

- DEMANDA DE PERIODO FIJO: Hace referencia a un solo artículo y esta basado en la cantidad, es equivalente a ordenar la sumatoria de la Demanda de  $n$  periodos siguientes, se pueden usar días, semanas o meses.

EJEMPLO: En la siguiente tabla se dan los pronósticos de demanda para 7 semanas:

Tabla12. *Datos problema Demanda de periodo fijo*

Semana	1	2	3	4	5	6	7
Demanda	50	70	30	90	80	10	100

Evaluar la cantidad a ordenar para 4 y 7 semanas de demanda.

a) Cantidad a ordenar para 4 semanas:

$$Q = \sum_{i=1}^n D_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^4 D_i = 50 + 70 + 30 + 90$$

$$Q = 240 \text{ Unidades.}$$

b) Cantidad a ordenar para 7 semanas:

$$Q = \sum_{i=1}^n D_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^7 D_i = 50 + 70 + 30 + 90 + 80 + 10 + 100$$

$$Q = 430 \text{ Unidades.}$$

**CANTIDAD A ORDENAR POR PERIODO:** Es una modificación del modelo de periodo fijo, que usa la estructura del modelo para determinar un periodo fijo lo cual se logra dividiendo la demanda promedio entre el tamaño del lote promedio.

Ejemplo: En la siguiente tabla se dan los pronósticos de demanda para 5 semanas:

Tabla 13. Datos problema Cantidad a Ordenar por Periodo

Calcular la cantidad a ordenar por periodo, para  $Q = 100, 150$  unidades respectivamente.

a) Para Q= 100:

Semana	1	2	3	4	5
Demanda	50	70	30	90	80

$$\bar{D} = \frac{50 + 70 + 30 + 90 + 80}{5} = \frac{320}{5}$$

$$\bar{D} = 64 \text{ Unidades / semana}$$

$$P_{\text{fijo}} = \frac{\bar{Q}}{\bar{D}} = \frac{100}{64} = 1.56 \text{ Semanas}$$

Por lo tanto se debe ordenar 100 unidades cada 1.56 semanas.

b) Para Q= 150:

$$\bar{D} = \frac{50 + 70 + 30 + 90 + 80}{5} = \frac{320}{5}$$

$$\bar{D} = 64 \text{ Unidades / semana}$$

$$P_{\text{fijo}} = \frac{\bar{Q}}{\bar{D}} = \frac{150}{64} = 2.34 \text{ Semanas}$$

Ordenar 150 unidades cada 2.34 semanas.

**LOTE POR LOTE:** En este caso la cantidad a ordenar es la demanda de cada periodo, mediante este método se reduce los niveles de inventario y su costo de mantenimiento pero aumentan los costos de pedido al tener que solicitar mas frecuentemente. Generalmente se usa para aquellos artículos que tienen un alto costo y cuya demanda es irregular.

Ejemplo: En la tabla 14, se dan los pronósticos de demanda para 5 semanas:

Tabla 14. Datos problema Lote por Lote

Semana	1	2	3	4	5
Demanda	50	70	30	90	80

a) Calcular la cantidad a ordenar utilizando la regla de lote por lote.

Para la semana 1  $Q = 50$  Unidades.

Para la semana 2  $Q = 70$  Unidades.

Para la semana 3  $Q = 30$  Unidades

Para la semana 4  $Q = 90$  Unidades

Para la semana 5  $Q = 80$  Unidades

#### **Lección 14:** Modelos Óptimos.

**-ALGORITMO DE WAGNER- WHITIN:** Es un modelo heurístico que minimiza los costos variables, los costos de mantener el inventario y los costos de almacenamiento durante el horizonte de planeación. El procedimiento de optimización esta basado en la programación dinámica lo especial de este algoritmo es que se puede aplicar a funciones de costo decrecientes lo cual ocurre

cuando los costos por unidad son constantes, o cuando se presentan los descuentos por cantidad.

El algoritmo tiene en cuenta dos condiciones que permiten tener cálculos simplificados:

1. Dado un inventario inicial cero, se puede satisfacer la demanda de cualquier periodo, ya sea con nueva producción o desde el inventario de entrada pero nunca se pueden presentar ambos casos.

2. La cantidad óptima a producir para un periodo puede ser cero o satisfacer la demanda exacta para uno o más periodos sucesivos contiguos.

Sea:

$Z_i$  = Cantidad Ordenada

$D_i$  = Demanda para el periodo  $i$

$x_i$  = Inventario Inicial

$C_2$  = Costo de preparación

$C_3$  = Costo por unidad de almacenamiento

La función de costo para un periodo determinado es:

$$C_i(Z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ c_2 + c_1(z_i), & z_i > 0 \end{cases}$$

El algoritmo minimiza los costos de producción y almacenamiento para todos los periodos.

Utilizando la ecuación recursiva de avance del modelo de programación dinámica la función de costo es:

$$f_1(x_2) = \min\{c_1(z_1) + h_1x_2\}$$

$$f_i(x_2) = \min\{c_1(z_1) + h_1x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ejemplo: Determinar la cantidad a pedir utilizando el algoritmo de Wagner-Whitin para cuatro periodos con los datos que se presentan en la tabla 15.

Tabla 15. Datos problema Wagner-Whitin

Periodo i	Demanda =D (unidades)	Costo de preparación cpi (\$)
1	76	98
2	26	114
3	90	185
4	67	70

Inventario inicial= 15 Unidades.

Costo de producción  $c_1 = \$ 2$

Costos de almacenamiento =  $h_i = \$ 1$  para todos los periodos.

Los resultados para el primer periodo se muestran en la tabla 16.

Tabla 16. Desarrollo primer periodo Wagner-Whitin

		C1(z1)+h1x2				solución óptima	
		Z1= 61	87	177	244		
x2	h1x2	c1(z1)+cp = 220	c1(z2)+cp = 272	c1(z3)+cp = 452	c1(z4)+cp = 586	fi(xi+1)	zi
0	0	220	----	----	----	220	61
26	26	----	298	----	----	298	87
116	116	----	-----	568	----	568	177
183	183	----	----	-----	769	769	244
Orden en 1 para:		1	1,2	1,2,3	1,2,3,4		

Los resultados para el segundo periodo se muestran en la tabla 17.

Tabla 17. Desarrollo segundo periodo Wagner-Whitin

		C2(z2)+h2x3+f1(x3+d2-z2)				solución óptima	
		Z2= 0	26	166	183		
X3	h2x3	C2(z2)+cp = 0	c1(z2)+cp = 166	c1(z2)+cp = 346	c1(z2)+cp = 480	fi(xi+1)	zi
0	0	0+298=298	166+220= 386	----	----	298	0

90	90	$90+568=658$	----	$436+220=$ 656	----	656	116
157	157	$157+769=926$	----	-----	$637+220=$ 857	857	183
Orden en 2 para:		----	2	2,3	2,3,4		

Los resultados para el tercer primer periodo se muestran en la tabla 18.

Tabla 18. Desarrollo tercer periodo Wagner-Whitin

		$C3(z3)+h3x4+f2(x4+d3-z3)$			solución óptima	
		$Z3= 0$	90	157		
$x4$	$h3x4$	$C1(z3)+cp$ = 0	$c1(z3)+cp$ = 365	$c1(z3)+cp$ = 499	$fi(xi+1)$	$Zi$
0	0	$0+656= 656$	$365 + 298$ = 663	----	656	0
67	67	$67+857=924$	-----	$566+298=$ 864	864	157
Orden en 3 para:		----	3	3,4		

Los resultados para el tercer periodo se muestran en la tabla 19.

Tabla 19. Desarrollo cuarto periodo Wagner-Whitin

		$C4(z4)+h4x5+f3(x3+d4-z4)$	solución óptima		
		$Z4= 0$	67		
$x4$	$h3x4$	$C1(z4)+cp = 0$	$c1(z4)+cp = 204$	$f_i(x_i+1)$	$z_i$
0	0	$0+864= 864$	$204 + 656 = 860$	860	67
Orden en 4 para:		----	4		

La solución al problema es:

Ordenar para el periodo 1= 61 Unidades

Para el periodo 2 = 116 Unidades.

Para el periodo 3 = 0 Unidades.

Para el periodo 4 = 67 Unidades.

El costo total es de \$860.

**Lección15:** Modelos Heurísticos.

A continuación se presentan algunos modelos donde los resultados obtenidos se han logrado a través de la experiencia o intuición.

- METODO SILVER-MEAL (SM).

Este método consiste en ordenar para varios periodos futuros, considerando el costo de ordenar mas el costo de mantener el inventario, la idea es lograr el costo promedio mínimo.

Sea:

$D_1, D_2, D_3, \dots, D_m$  la demanda para m periodos siguientes.

$C_{pm}$  el costo promedio por periodo si la orden cubre m periodos

$C_2$  = Costo de preparación del pedido

$C_3$  = Costo de mantener una unidad en el inventario durante un periodo

Suponiendo que el costo de mantener el inventario ocurre al final del periodo y que la cantidad necesaria para el periodo se usa al principio del mismo, el costo para el primer periodo, si se ordenan  $D_1$  unidades es:

$$C_{p1} = C_2$$

Si se ordenan  $D_1 + D_2$  unidades en el periodo 1 para cubrir la demanda de los periodos 1 y 2, el costo del inventario para el periodo 2 es el siguiente:

$$C_{p2} = \frac{1}{2} (C_2 + C_3 D_2)$$

Recordar que  $C_3$  es el costo e almacenamiento durante un periodo, como se almacenan  $D_2$  unidades para el periodo siguiente, para obtener el costo promedio se divide entre dos periodos.

Para el tercer periodo se tiene:

$$C_{p3} = \frac{1}{3} (C_2 + C_3 D_2 + 2C_3 D_3)$$

En forma general la fórmula será:

$$C_{pm} = \frac{1}{m} (C_2 + C_3 D_2 + 2C_3 D_3 + \dots (m-1)C_3 D_m)$$

Cuando  $C_{p(m+1)} > C_{pm}$  se obtiene la solución óptima. Es decir que cuando el costo promedio por periodo comienza a crecer se debe ordenar  $Q^* = D_1 + D_2 + \dots D_m$  unidades con las cuales se cubren  $m$  periodos futuros.

El proceso se repite durante todo el periodo de planeación.

### Ejemplo

Los datos del problema se presentan tabla 20.

Tabla 20. Datos ejemplo SILVER-MEAL

PERIODOS	DEMANDA (UNIDADES)
1	500
2	3100
3	600
4	6500
5	7700
6	6500
Costo de preparación del pedido= \$750	Costo de mantener una unidad en el inventario durante un periodo= \$0.2

Costo para el primer periodo:

$$C_{p1} = C_2$$

$$C_{p1} = 750$$

Este costo es debido exclusivamente al costo de preparación del pedido, ya que el pedido se utilizara inmediatamente, no hay costo de almacenamiento.

Si se solicita una cantidad suficiente para cubrir la demanda de los dos primeros periodos, la cantidad solicitada sería de  $500+3100= 3600$  unidades, de estas 500 unidades se utilizarían inmediatamente, y el resto se dejarían para el inicio del segundo periodo: por lo tanto se tiene un stock de 3100 unidades durante el periodo, lo cual supone un costo de almacenamiento.

$$C_{p2} = \frac{1}{2} (C_2 + C_3 D_2)$$

$$C_{p2} = \frac{1}{2} (750 + 0.2 * 3100) = 685$$

Se observa que es más económico solicitar este último lote que no sólo el que cubra el primer periodo.

No olvidar que la solución óptima se obtiene cuando cumple con la condición:

$$C_{p(m+1)} > C_{pm}$$

Cálculo para solicitar la demanda de los tres primeros periodos:

El tamaño del lote sería de 4200 unidades. De estas 500 se utilizarían inmediatamente y 3700 se almacenarían durante un periodo, de estas 3100 se utilizarían al principio del segundo periodo, y 600 quedan en stock hasta principios del tercer periodo.

El costo promedio sería:

$$C_{p3} = \frac{1}{3}(C_2 + C_3D_2 + 2C_3D_3)$$

$$C_{p3} = \frac{1}{3}(750 + 0.2 * 3100 + 2(0.2 * 600)) = 536.66$$

Como se puede observar este costo es menor y es la mejor opción que la anterior.

Se realiza el análisis se solicita la demanda para los cuatro primeros periodos, el costo promedio sería:

$$C_{pm} = \frac{1}{m}(C_2 + C_3D_2 + 2C_3D_3 + \dots\dots\dots(m-1)C_3D_m)$$

$$C_{p4} = \frac{1}{4}(750 + 0.2 * 3100 + 2(0.2 * 600) + 3(0.26500))$$

$$C_{p4} = 1377,50$$

Como:

$$C_{p(m+1)} > C_{pm}$$

$$C_{p4} > C_{p3}$$

$$1377,50 > 536,66$$

La solución óptima es solicitar un pedido de 4200 unidades con el cual cubrir la demanda de los tres primeros periodos. Una vez tomada esta decisión el proceso se repite durante todo el periodo de planeación.

- COSTO UNITARIO MINIMO.

Este método consiste en ordenar para varios periodos futuros, considerando el costo de ordenar mas el costo de mantener el inventario, la idea es lograr el costo promedio mínimo. La diferencia con el método de Silver-Meal radica en que la decisión se toma en base al costo variable promedio por unidad.

Sea

$C'_{p(m)}$  = Costo promedio variable por unidad para m periodos.

$$C'_{p(1)} = \frac{C_2}{D_1}$$

$$C'_{p(2)} = \frac{C_2 + C_3 D_2}{D_1 + D_2}$$

$$C'_{p(3)} = \frac{C_2 + C_3 D_2 + 2C_3 D_3}{D_1 + D_2 + D_3}$$

En general

$$C'_{p(m)} = \frac{C_2 + C_3 D_2 + 2C_3 D_3 + \dots \dots (m - 1)C_3 D_m}{D_1 + D_2 + D_3 + \dots \dots D_m}$$

Cuando  $C'_{p(m+1)} > C'_{pm}$  se obtiene la solución óptima. Es decir que cuando el costo promedio por periodo comienza a crecer se debe ordenar

$Q^* = D_1 + D_2 + \dots + D_m$  unidades con las cuales se cubren  $m$  periodos futuros.

El proceso se repite durante todo el periodo de planeación.

Ejemplo: utilizando los mismos datos de la tabla 16.

En el periodo 1:

$$C'_{p(1)} = \frac{C_2}{D_1}$$

$$C'_{p(1)} = \frac{750}{500} = 1.5$$

En el periodo 2:

$$C'_{p(2)} = \frac{C_2 + C_3 D_2}{D_1 + D_2}$$

$$C'_{p(2)} = \frac{750 + 0.2 * 3100}{500 + 3100} = 0,38$$

Como:

$$C'_{p(m+1)} > C'_{pm}$$

$$0,38 < 1,5$$

Se debe continuar.

En el periodo 3:

$$C'_{p(3)} = \frac{C_2 + C_3 D_2 + 2C_3 D_3}{D_1 + D_2 + D_3}$$

$$C'_{p(3)} = \frac{750 + 0,2 * 3100 + 2(0,2 * 600)}{500 + 3100 + 600}$$

$$C'_{p(3)} = 0,355$$

Como:

$$C'_{p(m+1)} > C'_{pm}$$

$$0,355 < 0,38$$

Se debe continuar.

Para el periodo 4:

$$C'_{p(4)} = \frac{C_2 + C_3 D_2 + 2C_3 D_3 + 3C_3 D_4}{D_1 + D_2 + D_3 + D_4}$$
$$C'_{p(4)} = \frac{750 + 0,2 * 3100 + 2(0,2 * 600) + 3(0,2 * 6500)}{500 + 3100 + 600 + 6500}$$
$$C'_{p(4)} = 0.515$$

Como:

$$C'_{p(m+1)} > C'_{pm}$$
$$0,515 > 0,355$$

La solución es:

$$Q^* = D_1 + D_2 + \dots + D_m$$
$$Q^* = 500 + 3100 + 600 = 4200$$

La solución óptima es ordenar un pedido de 4200 unidades con el cual cubrir la demanda de los tres primeros periodos. Una vez tomada esta decisión el proceso se repite durante todo el periodo de planeación.

## ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 1

1. Un contratista tiene que proveer de 10000 llantas por día a un fabricante de automóviles. Encuentra que, inicia un lote de producción, puede producir 25000 llantas por día. El costo de mantener una llanta en el almacén por un año es de \$200, y el costo de arranque de un lote de producción es de \$1800. ¿Qué tan frecuentemente deben fabricarse los lotes de producción?

Tenga en cuenta que se trabajan 365 días por año.

2. Una empresa adquiere 12000 unidades de un determinado artículo teniendo en cuenta la siguiente tabla de descuentos:

Cantidad		Costo por unidad	% de Descuento
De	A		
0	5.000	\$500	0
5.001	10.000	\$475	5
10.001	20.000	\$450	10
20.001	En adelante	\$425	15

Si se aplica el concepto de descuento en todas las unidades. El costo de las 12000 unidades es??

3. El gerente de compras de una importante compañía, quiere añadir un nuevo producto a su lista de compras, las ventas de este producto son de 1500 unidades al mes, El gerente compra el producto directamente al fabricante a un costo unitario de \$200. Donde cada entrega tarda 30 días en llegar. El gerente estima que el costo anual de mantener los productos en inventario es 10% de su costo de adquisición. También estima que el costo administrativo asociado con colocar la orden es \$6000. ¿Cuál sería la política de administración mas apropiada para este caso?

4. Los Modelos de inventarios Heurísticos son modelos cuyos resultados obtenidos se han logrado a través de la experiencia o intuición. Uno de estos modelos consiste en ordenar para varios periodos futuros, considerando el costo de ordenar más el costo de mantener el inventario. A este modelo de le denomina?



## UNIDAD 2

Nombre de la Unidad	<b>SISTEMAS DE INVENTARIO PROBABILISTICOS.</b>
Introducción	<p>Hasta el momento los diferentes modelos de inventario manejan una demanda Determinística, es decir que la información se conoce con certeza. Esta información no es cierta para todos los casos la demanda puede ser una variable aleatoria, para lo cual es necesario utilizar una función de probabilidad para poder representar en este caso el comportamiento de la demanda. Se supone que se conoce la distribución de probabilidad para la demanda, pero que esa demanda es impredecible en un día o mes dado.</p> <p>La incertidumbre al predecir la demanda significa que siempre existe la posibilidad de que haya faltantes, es decir, de quedar sin artículos en almacén. El riesgo puede reducirse teniendo un inventario grande, pero nunca puede eliminarse.</p>
Justificación	
Intencionalidades Formativas	<p>En esta unidad se plantean los principales modelos de inventarios, en los cuales la demanda cambia con el tiempo y tiene como finalidad que el estudiante este en capacidad conocer y plantear un modelo para el control de inventarios de acuerdo a los requerimientos de necesidades que se pueda presentar en un momento dado dentro de una organización.</p>
Denominación de capítulos	

## CAPITULO 1: DEFINICIONES BÁSICAS.

### Introducción

Hasta el momento hemos venido suponiendo que la demanda es conocida y cierta. Sin embargo la mayoría de los casos nos muestran demandas inciertas y desconocidas. Suponiendo que la demanda para un período es una variable aleatoria, es posible conocer su distribución de probabilidad. En este primer capítulo se tratarán nuevos conceptos relacionados con este tipo de inventarios.

### Lección 1: Definiciones Acerca del Nivel de Inventario.

Una primera definición a tener en cuenta en el manejo de los Inventarios Probabilístico es el Nivel de Servicio<sup>11</sup>, el cual se define como el porcentaje de clientes que hacen un pedido para ser servidos en plazos habituales (no se incluyen excepciones) y que pueden ser atendidos en el primer intento.

Un nivel alto en los inventarios no necesariamente resulta en un mejor servicio al cliente, pero si muy seguramente tiene un alto impacto en las utilidades de la empresa. Por el contrario, un nivel bajo en los niveles de inventario, particularmente si no se tiene un control eficiente del mismo, pueden resultar en faltantes de producto, con fuertes implicaciones en le servicio al cliente.

Por otra parte, el *inventario de seguridad* es el inventario neto promedio justo antes de que llegue un pedido. Un valor positivo del inventario de seguridad permite tener unidades en inventario para responder a demandas mayores que la demanda promedio durante el tiempo efectivo que tarda en llegar un pedido, al cual denominaremos *tiempo de reposición* o *Lead Time*. El inventario de seguridad

---

<sup>11</sup> En: <http://www.scribd.com/doc/2252684/Niveles-de-Servicio-del-Inventario>

depende de las fluctuaciones de la demanda durante el tiempo de reposición, o equivalentemente, de la desviación estándar de los errores del pronóstico de la demanda total sobre el tiempo de reposición. Intuitivamente, esto se explica porque si los pronósticos fueran absolutamente seguros, entonces no habría razón para tener inventarios de seguridad, así se tuviera demanda variable con el tiempo como la tratada en el capítulo anterior.

## **Lección 2:** Requisiciones Pendientes u Órdenes Pendientes.

Cuando ocurre una ruptura de stock, existen dos posibilidades extremas con respecto a lo demandado por el cliente. Primero, el cliente puede aceptar que su orden completa sea clasificada como requisición pendiente, y esperar a que sea satisfecha. Segundo, el cliente puede cancelar la orden completa y la venta total se perdería. Ambas situaciones ocasionan costos adicionales para la organización, ya que en el primer caso se incurre en gastos adicionales para cumplir con la orden urgentemente y en el segundo caso se deja de percibir la utilidad neta de la venta perdida.

En la realidad es más común encontrar situaciones intermedias entre los dos extremos descritos, como por ejemplo, la cancelación parcial de una orden por parte del cliente. Todos los métodos desarrollados para la administración de inventarios tienen en cuenta los costos de uno u otro extremo, pero no tratan situaciones intermedias debidas principalmente a que la estimación de los costos de falta de inventario para situaciones intermedias se torna muy difícil. Afortunadamente, si se trabaja a niveles de servicio muy altos para el cliente, la ocurrencia de una falta de inventario no es muy común y, por lo tanto, el sistema no es muy sensible a cambios en estos costos.

## **Lección 3:** Preguntas Básicas para el Control de Inventarios Probabilístico.

Hay tres preguntas claves a responder en cualquier sistema de control de inventarios:

- ¿Con qué **frecuencia** debe revisarse el nivel de inventario?
- ¿**Cuándo** debe ordenarse?
- ¿Qué **cantidad** debe ordenarse en cada pedido?

Cuando la demanda probabilística, estas tres preguntas son mucho más difíciles de responder. La respuesta a la primera pregunta implica altos costos de revisión frecuente del nivel de inventario, comparados con los costos de mantener inventario de seguridad para responder a la demanda durante el tiempo de reposición.

Para responder la segunda pregunta debe tenerse en cuenta el equilibrio entre los costos de mantenimiento de inventario al ordenar anticipadamente y el nivel de servicio que se quiere dar al cliente.

Finalmente, la respuesta a la tercera pregunta tiene en cuenta de nuevo el costo total relevante y, para algunos casos, está muy relacionada con la segunda pregunta.

#### **Lección 4:** Modelo Estocástico para un Solo Periodo

Este tipo de modelo se maneja para productos que se ordenan una sola vez para satisfacer la demanda de un periodo determinado, es el caso de los productos de temporada los cuales son obsoletos después de la temporada. El modelo necesita determinar el número de unidades a ordenar antes del periodo para el cual se requiere.

Sección 1. Demanda Determinística: Para el caso de la demanda determinística el problema se soluciona ordenando el número exacto de unidades demandadas.

En el caso cuando la demanda es desconocida pero se puede describir mediante una función de probabilidad, se pueden presentar dos casos en los que los modelos manejan o no costos de preparación.

Sección 2. Demanda probabilística: En los modelos de un solo periodo se utilizan en situaciones como la determinación de políticas de pedido para productos alimenticios de corta duración, o determinación del tamaño de un lote de producción para artículos con una vida útil corta, o cuya demanda es sólo durante periodos cortos de tiempo, (por ejemplo durante la temporada navideña, temporadas de ingreso al colegio). Un ejemplo típico de este modelo es el modelo denominado modelo de **repartidor de periódicos**

El objetivo de este modelo es encontrar un equilibrio entre los costos de pedido y los costos originados por la pérdida potencial de ventas en otras palabras lograr un equilibrio entre los costos originados por pedir muy poco y los costos originados por pedir demasiado.

En este modelo se pide un solo producto al principio del periodo, y solo se puede usar para satisfacer la demanda de dicho periodo.

Las variables que se manejan son las siguientes:

$D$ = Demanda probabilística durante el periodo.

$f(D)$ = función de densidad de probabilidad durante el periodo.

$F(D)$ = función de densidad de probabilidad acumulada.

$Q$ = Cantidad pedida.

$cf$  = Costo de penalización por unidad faltante al final del periodo.

$ce$ = Costo de excedente por unidad que sobra al final del periodo.

El costo de compra del producto puede incorporarse dentro de los costos de excedentes y faltantes, o no tenerse en cuenta dado que no afecta la solución del problema.

**Análisis Incremental:** Mediante este método se compara el costo o pérdida de ordenar una unidad adicional, con el costo de no ordenar una unidad adicional.

Desarrollo de la fórmula: El costo esperado del excedente corresponde al número esperado de unidades sobrantes por el costo de excedente:

$$F(Q) * ce$$

El costo esperado de faltantes corresponde al número esperado de unidades faltantes por el costo de faltantes:

$$(1 - F(Q)) * cf$$

El valor óptimo de Q corresponde al punto donde el valor del costo por faltantes es igual al valor del costo por excedentes:

$$F(Q) * ce = (1 - F(Q)) * cf$$

Al despejar el valor de F(Q) se obtiene:

$$F(Q) * ce = cf - F(Q) * cf$$

$$F(Q) * ce + F(Q) * cf = cf$$

$$F(Q)(ce + cf) = cf$$

$$F(Q^*) = \frac{cf}{(ce + cf)}$$

Esta fórmula se conoce como razón crítica y corresponde a la probabilidad de satisfacer la demanda durante un periodo correspondiente.

La cantidad a ordenar Q se determina con el uso de la distribución normal (ver anexo 1), que satisface la condición  $F(Q^*)$  dada la media y la desviación estándar.

Ejemplo: Una compañía fabrica un producto MN para la temporada de fin de año, con base en la experiencia la demanda del producto tiene una distribución normal con media de 1500 unidades y desviación estándar de 100 unidades. El costo de excedente o costo de sobre estimar la demanda es de \$ 80 por unidad, el costo de penalización por cada unidad que falte es de \$200 por unidad. Con base en la anterior información la compañía debe decidir cuantas unidades debe fabricar.

$$D = 1500$$

$$\text{Desviación estándar} = 100$$

$$cf = 200 \text{ Unidades.}$$

$$ce = 80 \text{ Unidades.}$$

$$F(Q^*) = \frac{cf}{(ce + cf)}$$

$$F(Q^*) = \frac{200}{(80 + 200)} = 0,7142$$

En una tabla de la Distribución normal se encuentra el valor que satisface la condición de que la demanda sea menor que  $Q^*$ . En la tabla de la distribución normal se encuentra que 0,7142 corresponde a un valor de  $z$  de 0,57.

Con lo cual:

$$Q^* = \mu + z\sigma$$

$$Q^* = 1500 + 0,57 * 100$$

$$Q^* = 1557 \text{ Unidades}$$

### Lección 5: Sistema para Determinar el nivel de existencias de reserva.<sup>12</sup>

Toda compañía corre el riesgo de no tener existencias de un material o un artículo cuando el inventario ha bajado a su mínimo nivel; esto ocurre durante el período de reorden, o sea, durante la espera de la mercancía en tránsito.

Por tanto, la determinación de la existencia de reserva que ha de mantenerse para reducir al mínimo los faltantes y la inversión en el inventario, depende del consumo durante el período de reorden, es decir, entre el pedido y la entrega de la mercancía. Por ejemplo, los consumos durante el período que comprende desde el momento en que se hace el pedido al proveedor hasta la llegada al almacén, pueden ser tan variados como los siguientes:

<sup>12</sup> <http://www.mailxmail.com/curso-optimizacion-inventarios/sistemas-probabilisticas>

Mes	Consumo
Ene-03	180
Feb-03	100
Mar-03	175
Abr-03	170
May-03	160
Jun-03	175
Jul-03	100
Ago-03	180
Sep-03	200
Oct-03	160
Nov-03	150
Dic-03	170
<b>Total</b>	<b>1920</b>

El total, de 1,920 unidades, dividido entre 12 meses da un promedio de 160 unidades; pero tal promedio nos dice poco, puesto que en ocasiones se han consumido 100 unidades mensualmente y en otras 200. Entonces recurrimos al cálculo de la desviación estándar como sigue:

Lo primero que debe hacerse, es obtener la diferencia existente entre el promedio del consumo (160 unidades) y la salida real.

Como se puede observar, se presentan lo mismo diferencias positivas que negativas, sin embargo para el cálculo de la Desviación Estándar, se hará una suma algebraica, de tal manera que los signos no afectarán el resultado.

	<b>Variación vs</b>
<b>Mes</b>	<b>Promedio</b>
Ene-03	20
Feb-03	-60
Mar-03	15
Abr-03	10
May-03	0
Jun-03	15
Jul-03	-60
Ago-03	20
Sep-03	40
Oct-03	0
Nov-03	-10
Dic-03	10
<b>Desv. Std.</b>	<b>31</b>

La desviación estándar, es de 31 unidades para el ejemplo propuesto.

Éste cálculo se puede hacer de manera muy sencilla, ya que la determinación de la Desviación Estándar, se puede localizar en el programa de Excel como una función, con el nombre de DESVESTA ( ). Tal función, se inserta al final de la serie de los números que resultaron de comparar el promedio contra el consumo real. Dentro del paréntesis, se indica la celda de inicio y la celda final, separadas estas con dos puntos ( Ejem, A1: A13).

En éste caso, desde la primera celda en la que se encuentra 20, hasta la última celda, en la que se encuentra, 10; y el programa de Excel, automáticamente calcula la Desviación Estándar, que como ya se dijo antes, es de 31 unidades.

A continuación se presenta la determinación manual de la misma Desviación Estándar, mostrando a detalle los pasos necesarios:

Mes	X	X'	(X-X')	
				al cuadrado
Ene-03	180	160	20	400
Feb-03	100	160	-60	3,600
Mar-03	175	160	15	225
Abr-03	170	160	10	100
May-03	160	160	0	0
Jun-03	175	160	15	225
Jul-03	100	160	-60	3,600
Ago-03	180	160	20	400
Sep-03	200	160	40	1,600
Oct-03	160	160	0	0
Nov-03	150	160	-10	100
Dic-03	170	160	10	100
Promedio	160			10,350

- 1.- Se determina el promedio (160 unidades).
- 2.- Se compara el promedio vs resultados reales y se obtienen las variaciones,(20,-60,etc).
- 3.- Se elevan esas variaciones al cuadrado y se suman (10,350)
- 4.- Se dividen los 10,350 entre 11,(12-1) dando como resultado = 940.909
- 5.- Se calcula la raíz cuadrada de 940.909 para obtener el resultado de = 30.67 ó 31 unidades.

Ahora determinamos qué grado de certeza es el deseado. Por ejemplo, supongamos que la compañía establece la política de administrar un 5 % de faltantes, o sea de alcanzar un 95 % de seguridad.

<i>Tabla de Factores de Seguridad Para Distribución Normal</i>			
<i>Nivel de Servicio</i>	<i>Factor de Seguridad</i>	<i>Unidades</i>	<i>Costo anual de la reserva</i>
<i>( % sin faltante)</i>	<i>usando Desv. Std.</i>		
50.00%	0.00	0	\$0.00
75.00%	0.67	21	\$205.49
80.00%	0.84	26	\$257.63
84.13%	1.00	31	\$306.70
85.00%	1.04	32	\$318.97
89.44%	1.25	38	\$383.38
90.00%	1.28	39	\$392.58
93.32%	1.50	46	\$460.05
94.00%	1.56	48	\$478.45
94.52%	1.60	49	\$490.72
95.00%	1.65	51	\$506.06
96.00%	1.75	54	\$536.73
97.00%	1.88	58	\$576.60
97.72%	2.00	61	\$613.40
98.00%	2.05	63	\$628.74
98.61%	2.20	67	\$674.74
99.00%	2.33	71	\$714.61
99.18%	2.40	74	\$736.08
99.38%	2.50	77	\$766.75
99.50%	2.57	79	\$788.22
99.60%	2.65	81	\$812.76
99.70%	2.75	84	\$843.43
99.80%	2.88	88	\$883.30
99.86%	3.00	92	\$920.10
99.90%	3.09	95	\$947.70
99.93%	3.20	98	\$981.44
99.99%	4.00	123	\$1,226.80

Buscamos en la tabla, el valor de 95 % de seguridad y encontramos que 1.65 es el número de desviaciones estándar que corresponde y multiplicamos 1.65 por 31 unidades, que es el factor de seguridad que determinamos anteriormente, y obtenemos 51 unidades de reserva.

Si deseamos conocer el punto de reorden con éstos datos; bastará con sumar las 160 unidades del consumo mensual + las 51 unidades de reserva y tendremos que deberá ordenarse una nueva compra, cuando el nivel de existencias llegue a 211 unidades (160 + 51).

El costo anual de mantenimiento de la existencia de reserva para garantizar un nivel de confiabilidad del 95 % le representa a la compañía \$ 506.06, ya que se estimó el costo de cada unidad en \$10.00.

## CAPITULO 5: MODELOS ESTOCÁSTICOS DE REVISIÓN CONTINUA.

### Introducción

En los modelos de inventarios vistos anteriormente la Demanda se ha considerado como un valor conocido con cierto grado de certeza (modelos Determinísticos), pero en la realidad la demanda es un variable cuyo valor se conoce con una determinada probabilidad de ocurrencia en este capítulo trataremos los modelos de inventario con demanda probabilística estática dada la complejidad de los modelos con demanda probabilística dinámica para los cuales hay que recurrir a la simulación para poder resolverlos.

### Lección 6: Modelo Estocástico con y sin Déficit. (Sistema Q)

En este modelo se cuenta con un inventario de seguridad (Is) que permita cubrir el déficit que se pueda presentar en un momento determinado. El inventario de seguridad sirve como protección contra la incertidumbre que se pueda presentar en el comportamiento de la demanda o en el tiempo de entrega.

Se utilizan las mismas formulas de los modelos de compra o manufactura sin déficit, reemplazando la demanda conocida por la demanda promedio obtenida a través de la siguiente fórmula:

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^n x * p(x)$$

**Sistema Q – (Tiempo de anticipación constante / Demanda Variable.)**

Se desea un sistema de inventario sabiendo que cada producto vale \$2, el costo de una compra es de \$ 160, y el costo de almacenamiento de 1 unidad es de 10 centavos por semana.

Sistema Q.

Tiempo de anticipación: 2 semanas

En la tabla 21 se muestra la demanda aleatoria, expresada en unidades por semana:

Tabla 21. *Demanda aleatoria por periodo problema estocástico.*

Cantidad (unidades/semana)	Probabilidad
150	0.3
200	0.4
250	0.3

Demanda promedio en el tiempo de anticipación

$$D = 150 * 0,3 + 200 * 0,4 + 250 * 0,3 = 200 \text{ Unidades}$$

Cantidad a Pedir (unidades):

$$Q = \sqrt{(2 * C_2 * D / C_3)} = \sqrt{(2 * 160 * 200 / 0,1)} = 800 \text{ Unidades}$$

Tiempo promedio entre pedidos (semanas):

$$T = Q / D = 800 / 200 = 4 \text{ Semanas}$$

En la tabla 22 se muestran las distintas demandas en el tiempo de anticipación

Tabla 22. Demanda durante le tiempo de anticipación problema Estocástico

Demanda Primera Semana	Demanda Segunda Semana	Demanda	Probabilidad
150	150	300	$0.3 \cdot 0.3 = 0.09$
150	200	350	$0.3 \cdot 0.4 = 0.12$
150	250	400	$0.3 \cdot 0.3 = 0.09$
200	150	350	$0.4 \cdot 0.3 = 0.12$
200	200	400	$0.4 \cdot 0.4 = 0.16$
200	250	450	$0.4 \cdot 0.3 = 0.12$
250	150	400	$0.3 \cdot 0.3 = 0.09$
250	200	450	$0.3 \cdot 0.4 = 0.12$
250	250	500	$0.3 \cdot 0.3 = 0.09$

En la tabla 23 se muestran los cálculos de las probabilidades de faltantes durante el tiempo de anticipación.

Tabla 23. Probabilidad de faltante o déficit durante el tiempo de anticipación.

Demanda en el tiempo de anticipación	Probabilidad	Probabilidad Acumulada	Déficit (1-PA)
300	0.09	0.09	0.91
350	0.12+0.12=0.24	0.33	0.67
400	0.09+0.16+0.09=0.34	0.67	0.33
450	0.12+0.12=0.24	0.91	0.09
500	0.09	1.0	0

El riesgo de déficit es: 1 – Probabilidad Acumulada.

El número de unidades de las existencias de seguridad (Is), depende del déficit pretendido:

- Si no se quiere déficit, (déficit, S= 0), se elige el stock que corresponde a la mayor demanda en el período de anticipación. (500 Unidades).

$$I_s = D_{d=0\%} \cdot \bar{D} \cdot L = 500 - (200 \cdot 2) = 100 \text{ Unidades}$$

- Para un déficit del 10%, se toma la demanda correspondiente a 450 unidades.

$$I_s = D_{d=10\%} - \bar{D} * L = 450 - (200 * 2) = 50 \text{ Unidades}$$

Para un déficit del 33%, se toma la demanda de 400 unidades

$$I_s = D_{d=33\%} - \bar{D} * L = 400 - (200 * 2) = 0$$

La cantidad a pedir se determina mediante la siguiente fórmula:

Cantidad a pedir =  $Q$  óptimo + Existencias de Seguridad – Inv. Disponible -  
Unidades pedidas pero no recibidas + Demanda durante el  
Periodo de Anticipación.

Cantidad a pedir en el caso de no permitir déficit.

Inv. Disponible = Corresponde a la demanda promedio.

Unidades pedidas pero no recibidas = 0 Unidades (El tiempo entre pedidos es menor que el tiempo de anticipación).

Cantidad a pedir =  $800 + 100 - 500 - 0 + 400 = 800$  Unidades.

Costo Anual:

$$D = 200, Q = 800, I_s = 100$$

$$\text{Costo por Semana} = (C_1 * D) + (C_2 * D / Q) + (C_3 * Q / 2) + C_3 * I_s$$

$$\text{Cps} = 2*200 + 160*200 / 800 + 0,1* 800/ 2 + 0,1*100$$

$$\text{Cps} = 400 + 40 + 40 + 10 = 490 \text{ por Semana}$$

$$\text{Costo Anual} = \text{Cps} * 50 \text{ Semanas/año} = 490 * 50 = \$ 24500 \text{ por año.}$$

Administración del Inventario: **VERIFICAR CONTINUAMENTE EL NIVEL DEL INVENTARIO Y CUANDO ESTE LLEGUE A 500 UNIDADES, HACER UN PEDIDO DE 800 UNIDADES.**

### Lección 7. Sistema Q – Distribución Normal

En el ejemplo anterior se trabajó con una distribución empírica, en algunos casos es posible reemplazar las distribuciones empíricas por distribuciones teóricas, por ejemplo la distribución Normal o la distribución de Poisson, cuando esta distribución describe adecuadamente la demanda o el tiempo de entrega.

Inicialmente se supone que el tiempo de entrega es Determinístico, la demanda es una variable aleatoria representada mediante una función de densidad de probabilidad  $f(d)$ ,

Se tiene:

$\bar{D}$  = Demanda Esperada para un periodo

$\sigma$  = Desviación Estandar de la Demanda

L = Tiempo de Entrega o Tiempo de Anticipación

La demanda y la desviación estándar durante el tiempo de anticipación se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{D}_L = \bar{D} * L$$

$$\sigma_L = \sigma\sqrt{L}$$

Recuerde que la demanda y el tiempo de entrega deben tener las mismas unidades de tiempo.

Ejemplo: un fabrica requiere para su proceso de producción de talco para pintura, la demanda de este producto se puede representar mediante una distribución normal con una demanda promedio de 900 unidades anuales, y una desviación estándar de 26 unidades. El tiempo de entrega es de 6 días, el costo de compra es de \$1600 y el costo de almacenamiento es de \$200. Determinar la política de administración del inventario para que el riesgo de déficit no sea mayor a 5%.

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2\bar{D}}{C_3}} = \sqrt{\frac{2(1600)(900)}{200}} = 120 \text{ Unidades}$$

Ahora se calcula la demanda y la desviación estándar durante el tiempo de anticipación.

$\bar{D}_L$  = Demanda durante el periodo de anticipación

$$\bar{D}_L = \bar{D} * L$$

$$\bar{D}_L = 900 * (6 / 250) = 21.6 \cong 22 \text{ Unidades}$$

Como la demanda esta en años y el tiempo de entrega en días es necesario hacer la conversión (suponer 250 días por año)

$\bar{\sigma}_L$  = Desviación estándar durante el tiempo de anticipación

$$\bar{\sigma}_L = \sigma\sqrt{L}$$

$$\bar{\sigma}_L = 26\sqrt{6} = 63.68 \text{ Unidades}$$

Si:  $D_{d=5\%}$  = Demanda para un déficit del 5%

Para hallar el valor de la demanda para un déficit del 5% se evalúa la distribución estándar normal:

$$Z = \frac{D_{d=5\%} - \bar{D}_L}{\bar{\sigma}_L}$$

El valor de Z para un 95 % (1-0.05) de éxito se obtiene de una tabla de la distribución Normal, para este caso  $Z=1.645$ . Reemplazando en la fórmula anterior se tiene:

$$1,645 = \frac{D_d - 21,6}{63,68}$$

$$D_d = (1,645 * 63,68) + 21,6 = 126,35 \cong 126 \text{ Unidades}$$

Las existencias de seguridad son:

$$I_s = D_{d=5\%} - \bar{D}_L = 126 - 22 = 104 \text{ Unidades}$$

**Administración del Inventario:** Revisar continuamente el nivel del inventario, cuando el nivel llegue a 126 Unidades se deben pedir 120 Unidades

### **Lección 8:** Inventario Base.

Es un sistema híbrido porque tiene características de los sistemas P y Q.

Lee J. Krajewski<sup>13</sup> en su libro Administración de Operaciones sostiene: En su forma simple, el sistema de inventario base expide una orden de reabastecimiento, Q, cada vez que se realiza un retiro, por la misma cantidad extraída en dicho retiro. Esta política de sustitución “uno por uno” mantiene la posición del inventario en un nivel de inventario base igual a la demanda esperada durante el tiempo de entrega, más un inventario de seguridad. Por lo tanto, el nivel de inventario base es equivalente al punto de reorden en un sistema Q.

Por ejemplo si el nivel del inventario es de 200 unidades y se retiran 50 unidades, se emite una orden por 50 unidades, para elevar nuevamente el nivel de inventario a 200 unidades.

Sin embargo ahora las cantidades de los pedidos varían para mantener la posición del inventario en el nivel del punto de reorden en todo momento. Puesto que esta posición representa la posición del inventario más baja posible que permitiría

---

<sup>13</sup> Lee J. Krajewski (2000). Administración de Operaciones. México: Perason. Pág. 568

mantener un nivel de servicio especificado, el sistema de inventario base puede usarse para minimizar el inventario del ciclo. De este modo se hacen más pedidos, pero cada uno de ellos es más pequeño. Este sistema es apropiado para artículos muy costosos. No se maneja un inventario mayor que la demanda máxima esperada mientras se recibe el pedido de reaprovisionamiento.

### **Lección 9. Dos Contenedores.**

Es un sistema visual, es decir un sistema que permite al encargado del manejo de inventarios, hacer pedidos cuando el inventario alcanza una marca determinada. En el sistema de dos contenedores el inventario de un artículo de terminado se maneja en dos depósitos o contenedores diferentes. Cuando el primer contenedor esta vacío, el segundo contenedor sirve de respaldo para cubrir la demanda hasta que llegue el pedido correspondiente al pedido de reabastecimiento. Cuando el primer contenedor esta vacío se hace un nuevo pedido. Cuando llega el nuevo pedido, el segundo contenedor se vuelve a llenar hasta su nivel normal y el resto se coloca en el primer depósito. En el sistema de dos contenedores, el primero funciona como un sistema Q y el segundo contenedor representa el punto de reorden.

Si cerca de los contenedores se colocan formularios de pedido totalmente llenos el encargado del manejo del inventario puede enviar uno al departamento de compras.

El sistema de dos contenedores puede implementarse con un solo contenedor, si previamente se ha marcado el nivel correspondiente al punto de reorden.

### **Lección 10: Sistema (s, S)**

En este sistema de control continuo<sup>14</sup>, cada vez que el inventario efectivo cae al punto de reorden  $s$  o por debajo de él, se ordena una cantidad tal que se incremente el inventario efectivo hasta el nivel máximo  $S$ . La cantidad a ordenar

---

<sup>14</sup> Fundamentos de Gestión de Inventarios. Carlos Julio Vidal Holguín (Universidad del Valle – Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística)

depende del inventario efectivo y del nivel máximo, y, por lo tanto, puede variar entre un período y otro. Si las transacciones de demanda son siempre unitarias, entonces este método de control es exactamente igual al anterior, ya que apenas el nivel de inventario efectivo caiga a  $s$ , entonces se ordena una cantidad constante  $Q = S - s$ . Sin embargo, en la práctica la demanda no ocurre necesariamente a niveles unitarios, y, por lo tanto, las cantidades a ordenar pueden ser variables. Este sistema se denomina usualmente un sistema “min-max”, ya que normalmente el nivel de inventario efectivo permanece entre un valor máximo  $S$  y un valor mínimo  $s$ , excepto por una caída de inventario temporal bajo el punto de reorden  $s$  cuando la demanda no ocurre en forma unitaria.

Se puede demostrar que el mejor sistema de control ( $s, S$ ) tiene costos totales de pedido, mantenimiento de inventario y falta de inventario menores o iguales que aquéllos del mejor sistema ( $s, Q$ ). Sin embargo, el esfuerzo computacional para encontrar el mejor sistema ( $s, S$ ) no justifica su aplicación para ítems clase B, e incluso para no todos los ítems clase A. Este método se encuentra a menudo en la práctica, pero los parámetros de control se fijan usualmente de forma arbitraria. Una desventaja potencial del sistema ( $s, S$ ) es su susceptibilidad de errores debido a que los tamaños de orden son variables.

## CAPITULO 6: MODELOS ESTOCÁSTICOS DE REVISIÓN PERIÓDICA.

### Introducción

En este sistema los ciclos de abastecimiento están controlados por períodos preestablecidos. La periodicidad puede ser semanal, quincenal, mensual o de acuerdo con cualquier otro ciclo. Sin embargo el tamaño de la orden varía en cada ciclo para absorber las fluctuaciones del consumo entre un período y otro.

**Lección 11:** EOQ: Sistema P – (Tiempo de anticipación Variable. / Demanda constante)

Se desea un sistema de inventario sabiendo que cada producto vale \$2, el costo de una compra es de \$ 160, y el costo de almacenamiento de 1 unidad es de 10 centavos por semana.

Demanda: 200 unidades por semana

El tiempo de anticipación aleatorio, expresado en semanas se muestra en la tabla 24.

Tabla 24. *Probabilidad del tiempo de Anticipación*

Semanas	Probabilidad
1	0.25
2	0.5
3	0.25

Cantidad a Pedir (unidades):

$$Q = \sqrt{(2 \cdot C_2 \cdot D / C_3)} = \sqrt{(2 \cdot 160 \cdot 200 / 0,1)} = 800 \text{ Unidades}$$

Tiempo promedio entre pedidos (semanas):

$$T = Q / D = 800 / 200 = 4 \text{ Semanas}$$

El tiempo promedio de anticipación se obtiene multiplicando la probabilidad por cada una de las semanas así:

$$L_p = (1 * 0,25) + (2 * 0,50) + (3 * 0,25) = 2 \text{ Semanas}$$

La demanda en el tiempo de anticipación y entre pedidos se muestra en la tabla 25.

**Tabla 25. Demanda en el tiempo de Anticipación y entre Pedidos.**

Tiempo de anticipación	Intervalo entre pedidos mas tiempo de anticipación	Demanda durante el tiempo de anticipación= Dd	Probabilidad
1	4+1= 5	200*5=1000	0.25
2	4+2= 6	200*6=1200	0.50
3	4+3= 7	200*7=1400	0.25

El riesgo de déficit es:  $1 - \text{Prob.acum.}$

Para un riesgo de déficit cero se elige el stock que corresponde a la mayor demanda en el período de anticipación. (1400 unidades).

Para un riesgo de déficit del 75% (1-0.25) se elige el stock correspondiente a 1200 unidades.

Las existencias de seguridad depende del déficit pretendido, tienen como base el intervalo entre pedidos (T) mas el tiempo promedio de anticipación (Lp).

$$I_s = D_{d=0\%} - D(L_p + T) = 1400 - 200(2 + 4) = 200 \text{ Unidades}$$

Cantidad a pedir en el caso de no permitir déficit.:

Cantidad a pedir= Q óptimo+ Existencias de seguridad – Inventario disponible  
- unidades pedidas + demanda promedio en el tiempo de anticipación

Unidades pedidas pero no recibidas = 0 Unidades (El tiempo entre pedidos es menor que el tiempo de anticipación).

Verificar el stock cada 4 semanas, y calcular en ese momento la cantidad a pedir.

### Lección 12: Sistema (S,T)

El modelo de inventarios (S,T) es un modelo de revisión periódica el cual maneja un inventario meta S. En cada revisión se compara la posición del inventario contra el inventario meta; si el inventario meta es menor se ordenan Q unidades hasta alcanzar el inventario meta propuesto.

Para este modelo:

La demanda es una variable aleatoria.

L= Tiempo de entrega constante.

s = Inventario de seguridad o déficit permitido

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2\bar{D}}{C_3}}$$

$$R = \bar{D} * L + S$$

$$t = \frac{Q}{D}$$

Reemplazando Q se obtiene:

$$t = \sqrt{\frac{2C_2}{C_3\bar{D}}}$$

Para decidir el inventario meta (S) se debe considerar tanto la demanda durante el periodo de anticipación como las existencias de seguridad o inventario de seguridad. Por lo tanto para el sistema (S,T) la orden debe ser lo suficientemente grande que alcance hasta el siguiente periodo de revisión.

$$S = \bar{D}_{(t+L)} + s$$

Para una demanda con distribución normal las existencias de seguridad corresponden a:

$$s = Z * \sigma_{(L+t)}$$

Siendo:  $\sigma_{(L+t)}$  = La desviación estándar de la demanda durante (L+t). La cual se puede halla a partir de la desviación estándar de la demanda:

$$\sigma_{(L+t)}^2 = \sigma^2 (l * t)$$

$$\sigma_{(l+t)} = \sqrt{\sigma^2 (l * t)}$$

Entonces:

$$S = \bar{D}_{(L+t)} + z\sigma_{(L+t)}$$

Un sistema de revisión periódica necesita más inventario de seguridad debido a que el periodo de protección contra faltantes es más grande.

Ejemplo: El dueño de un almacén estima que la demanda anual de cierto producto tiene una distribución normal con  $D = 300$  unidades y desviación estándar = 32 unidades. El tiempo de entrega de una orden es de medio mes.

Si para controlar el inventario se adopta una política de revisión periódica (S,T) y se establece un periodo de revisión mensual. Calcular el punto de reorden para un nivel de servicio del 95%.

$$\bar{D} = 300 \text{ unidades por año}$$

$$\sigma = 32 \text{ unidades}$$

$$t = 1 \text{ mes} = \frac{1}{12} \text{ año}$$

$$L = 0,5 \text{ meses} = \frac{1}{24} \text{ año}$$

$$\bar{D}(t + L) = 300\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = 300\left(\frac{1}{8}\right) = 37,5 \text{ unidades}$$

$$\sigma_{(t+L)} = \sqrt{\sigma^2(t + L)} = \sqrt{32^2 * \left(\frac{1}{8}\right)} = 11.31 \text{ unidades}$$

Como:

$$S = \bar{D}_{(L+t)} + z\sigma_{(L+t)}$$

El valor de Z se halla en las tablas de una distribución normal:

Para:  $\alpha = 95\%$

$z = 1.65$

$$S = \bar{D}_{(L+t)} + z\sigma_{(L+t)}$$

$$S = 37,5 + (1,65 * 11.31)$$

$$S = 56 \text{ Unidades}$$

Por lo tanto se debe revisar el nivel del inventario cada mes y en ese momento solicitar la cantidad necesaria para alcanzar el inventario meta de 56 unidades.

### Lección 13: Sistema (s,S)

En este sistema el punto de reorden se determina teniendo en cuenta el inventario disponible  **$I_d$**  y no la posición del inventario.

Inicialmente es necesario hallar el inventario disponible, el inventario meta y el tiempo de revisión,

Decisión: si el inventario disponible  $I_d$  es menor o igual que el inventario de seguridad se ordenan  $S - I_d$  unidades. Cuando el inventario disponible es mayor no se ordena:

$$I_d \leq s \quad \text{ordenar} \quad S - I_d$$

$$I_d > s \quad \text{No ordenar}$$

Los valores de  $s$  y  $S$  son bastante difíciles de calcular por lo que es común utilizar:

$s$  = punto de reorden

$S$  = Punto de reorden +  $Q$

Ejemplo:

Considere un sistema de inventario (s,S), donde el comportamiento de la demanda se ilustra en la tabla 26.

Tabla 26. *Demanda para un sistema (s,S).*

Mes	1	2	3	4	5
Demanda	30	50	62	55	54

Cuando el punto de reorden es de 45 unidades, el inventario meta es de 140 unidades y existe un inventario inicial de 100 unidades, calcular la política de revisión (s,S) para determinar las cantidades a pedir si se revisa el inventario cada mes.

Primer mes:

$$I_d = 100 - 30 = 70 \text{ unidades}$$

$$I_d > s$$

$$70 > 45 \text{ no se ordena.}$$

Segundo mes:

$$I_d = 70 - 50 = 20 \text{ unidades}$$

$$I_d \leq s$$

$$20 \leq 45$$

*Ordenar :*

$$S - I_d = 140 - 20 = 120 \text{ unidades}$$

Los resultados para todos los periodos se muestran en la tabla 27.

Tabla 27. Resultados para todos los periodos sistema (s,S).

Mes	1	2	3	4	5
Inv.Inicial	100	$100-30=70$	$120+20=140$	78	$117+23=140$
D	30	50	62	55	54
Id	$100-30=70$	$70-50=20$	$140-62=78$	$78-55=23$	$140-54=86$
Q*	0	$140-20=120$	0	$140-23=117$	0

#### Lección 14: Reabastecimiento Opcional

Un sistema de reabastecimiento opcional conlleva la revisión del nivel del inventario con una frecuencia fija (por ejemplo, semanalmente) y ordena un suministro de reposición si el nivel ha caído por debajo de cierta cantidad.

Este sistema<sup>15</sup> es apropiado cuando es común que se presenten variaciones en la demanda relativamente grandes, y es excesivo el costo del inventario de seguridad necesario para cubrir estas variaciones durante el tiempo de obtención combinado con el periodo de revisión.

Por ejemplo, el nivel máximo del inventario llámese  $M$ , puede calcularse con base en la demanda, los costos de los pedidos y los costos de los faltantes. Dado que colocar un pedido requiere de tiempo y dinero, se puede establecer un tamaño de pedido mínimo  $Q$ . Luego cuando quiera que se revise este artículo, la posición del inventario que se llamara  $I$ , se resta del nivel de reposición  $M$ . si este número (que

<sup>15</sup> Administración de producción y operaciones Chase Aquilano Jacobs. Mcgraw- Hill

se llamara  $q$ ) es igual o superior a  $Q$ , se puede ordenar  $q$ . De otra manera, hay que olvidarse de ello hasta la próxima revisión.

Si  $q = M - I$

Entonces: si  $q \geq Q$  se debe ordenar  $q$  unidades, de otra manera no se ordena ningún artículo.

### Lección 15: Sistema ( $R, S$ )

En este sistema<sup>16</sup> de control periódico se conoce también como el sistema del ciclo de reposición y se encuentra a menudo en organizaciones que no utilizan control sistematizado de los inventarios. En este sistema, cada  $R$  unidades de tiempo se revisa el inventario efectivo, y se ordena una cantidad tal que este inventario suba al valor máximo  $S$ .

La principal ventaja de este método es la de permitir el control coordinado de diversos ítems relacionados entre sí, bien sea por ser proporcionados por el mismo proveedor, por compartir un mismo sistema de transporte, por ser producidos en la misma línea de manufactura, o por cualquier otra razón que permita obtener economías de escala en la adquisición o producción del pedido. Igualmente, el nivel máximo de inventario  $S$  puede ser ajustado fácilmente si el patrón de demanda tiende a cambiar con el tiempo. Su principal desventaja es que para un mismo nivel de servicio al cliente, este sistema presenta costos de mantenimiento del inventario mayores que aquéllos de los sistemas continuos, ya que el nivel de inventario de seguridad requerido es mayor. Esto se da porque entre un período de revisión y otro, no se tiene información acerca del inventario efectivo, pudiendo caer éste a niveles indeseables si no se tiene el inventario de seguridad adecuado y, por lo tanto, el inventario de seguridad debe cubrir fluctuaciones de demanda para un tiempo igual al período de revisión  $R$  más el Lead Time  $L$ .

---

<sup>16</sup> Fundamentos de Gestión de Inventarios. Carlos Julio Vidal Holguín (Universidad del Valle – Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística)

## ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2

1. Empleando la distribución mostrada en seguida determinar las existencias de seguridad para un riesgo de déficit del 0 % y del 33 %. Suponer un tiempo de anticipación de 2 meses.

Cantidad (unidades/meses)	Probabilidad
300	0.3
400	0.4
500	0.3

2. La demanda de un producto esta distribuida normalmente con una media de 1000 unidades/mes y una desviación de 120 unidades/mes. Determinar la demanda durante el tiempo de anticipación y las existencias de seguridad de un sistema Q si el tiempo de anticipación es de 2 semanas (1 mes = 4 semanas), si el riesgo de déficit permitido es del 5 %.

3. Una compañía maneja en inventario un cierto componente el cual tiene las siguientes características:

Ventas promedio anuales: 5000 unidades

Costo de ordenar: \$ 40/ orden

Costo de inventario: 25% al año

Costo del artículo: \$ 80/ neumático

Tiempo de entrega: 4 días

Días hábiles por año: 250

Se pide calcular el lote económico y la cantidad de pedidos por año.

14. Una empresa maneja su inventario basado en el modelo de inventario CANTIDAD A ORDENAR POR PERIODO. En la siguiente tabla se dan los pronósticos de demanda de cierto producto para 5 meses:

Semana	1	2	3	4	5
Demanda	300	800	500	900	700

Determine la política del inventario si la cantidad a ordenar por periodo, es de 1400 unidades.

## FUENTES DOCUMENTALES

FOGARTY, etal. Administración de la producción e Inventarios. CECSA. México. 1995.

HILLER, Frederick. LIEBERMAN, Gerald. (1993) Introducción a la investigación de operaciones. Mexico: Mc Graw Hill.

SIPPER, Daniel. BULFIN, Robert. (1998). Planeación y Control de la Producción. McGRaww-Hill. México

TAHA, Hamdy. (1998) Investigación de operaciones, una introducción. México: Prentice Hall.

NAHMIAS, Steven. (2004) Análisis de la producción y las operaciones. México: CECSA.

BEJARANO BARRERA, Hernán. (2000). Métodos Cuantitativos II. UNAD.

SAMMBLIN, James, STEVENS, G.t,Jr. (1975) Investigación de Operaciones. México: Mc Graw Hill

ANDERSON, David y otros, (2004). Métodos Cuantitativos para los Negocios. México: Thomson

HILLER, Frederick S. y otros, (2001). Métodos Cuantitativos para Administración, México: Mc Graw Hill.

Título: Introducción a la Investigación de Operaciones

En: <http://www.investigacion-operaciones.com/> Teoría de Inventarios.

Título: Administración de Inventarios.

En: <http://www.solo cursos.com/> Administración de Inventarios.

Título: Administración Financiera de Inventarios.

En: <http://www.monografias.com/trabajos12/trabajo/trabajo.shtml>.

Título: Investigación de Operaciones. Dr. Ing. Franco Bellini M.

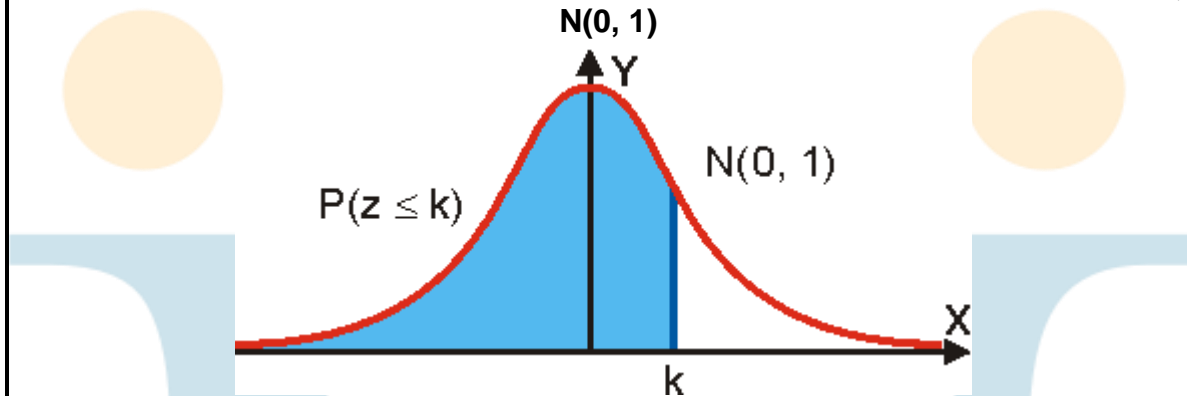
En: <http://www.investigacion-operaciones.com/Modelo%20Inventarios.htm>.

Titulo: Inventarios ABC. **Ing. Tomás A. R. Fucci**. Actualización: Lic. Elda Monterroso, 1999. En [www.unlu.edu.ar](http://www.unlu.edu.ar)

**ANEXOS**

**DISTRIBUCION NORMAL**

**ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR,**



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916



## Anexo 2 RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

### Autoevaluación Unidad 1.

1. 10445 unidades
2. \$ 5.400.000
3. Revisar el nivel del inventario en forma continua. Cuando el nivel del inventario sea igual al punto de pedido (1500 unidades) ordenar una cantidad  $Q = 3286$  unidades.
4. METODO SILVER-MEAL (SM).

### Autoevaluación Unidad 2.

1. a) 0 unidades b) 200 unidades
2. a) 500 Unidades b) 140 Unidades
3. a) 142 neumáticos / orden b) 35 órdenes / año
4. a) Ordenar 1400 unidades b) cada 2.18 meses