

# Capítulo 6

## Electrodinámica y ondas

### Introducción

El modelo electrodinámico, formulado por Maxwell, fue el comienzo de una revolución en la comprensión de los fenómenos electromagnéticos que dio origen, en 1905, al famoso artículo “Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento” en donde Albert Einstein presentaba su teoría de la relatividad especial.

Este conjunto de ecuaciones lograron unificar los conocimientos sobre la fenomenología electromagnética en un modelo coherente, reducido y matemáticamente consistente que permitió entre otras cosas la predicción y posterior descubrimiento de las ondas electromagnéticas.

Hoy en día, el modelo electrodinámico de Maxwell tiene plena vigencia en los sistemas de telecomunicaciones, los cuales dan vida a todos los avances tecnológicos de nuestros días, las redes inalámbricas de comunicaciones, los sistemas de comunicación en astronáutica, la televisión y la radio, son algunos ejemplos de ello.

### Ley de Inducción de Faraday

En el año de 1831, Michael Faraday reportó la inducción exitosa de corriente eléctrica a partir del magnetismo, en un capítulo de su libro: “On experimental researches in electricity - I”, titulado “Induction of electric currents”.

Desde ese momento quedó establecida la Ley de Inducción Electromagnética, también llamada Ley de Inducción de Faraday.

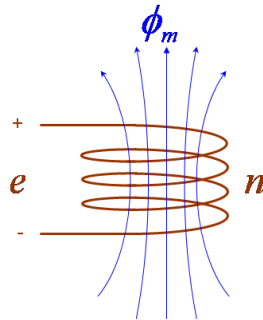
De acuerdo con esta ley, en presencia de un campo magnético variable en el tiempo, se induce sobre los materiales conductores una fuerza electromotriz FEM cuya intensidad es proporcional a la variación temporal del flujo magnético.

$$e = \frac{d\phi_m}{dt}$$

Hoy en día, el concepto ha sido ampliado a la variación temporal de los enlazamientos de flujo, entendiendo por enlazamiento de flujo el contacto de una línea de fuerza de campo magnético con un conductor.

Por supuesto, la medida del número de líneas de flujo presentes en un medio es el flujo magnético, por lo que el número de enlazamientos de flujo corresponde al producto del número de conductores enlazados por el flujo magnético, según se observa en la figura 76.

$$\psi = n\phi_m$$



**Figura 76.** Enlazamientos de flujo de un campo magnético

Un ajuste a la Ley de Inducción de Faraday fue hecho por Lenz,<sup>17</sup> en el año de 1833, quien estableció que la FEM inducida es de tal naturaleza que se opone a la variación de los enlazamientos de flujo que la produjeron.

En estas condiciones, esta FEM trata de oponerse al aumento de los enlazamientos de flujo en un campo creciente, o a la reducción de los mismos en el caso de un campo decreciente.

En estas condiciones, la Ley de Inducción de Faraday, formulada en términos de los enlazamientos de flujo, queda:

$$e = -\frac{d\psi_m}{dt}$$

Cuando se tiene un solo conductor se vuelve a la forma clásica:

$$e = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Para incorporar este nuevo elemento a la formulación del modelo electrostático, se hace necesario entonces considerar la tensión inducida en la llamada Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK).

La sumatoria de voltajes a lo largo de un camino cerrado, incluida la tensión inducida, según la Ley de Inducción de Faraday, es igual a cero.

<sup>17</sup> Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804 - 1865), físico estonio nacido en Tartú.

$$-\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \frac{d\phi_m}{dt} = 0$$

**Ecuación 50.** Ley de Voltajes de Kirchoff considerando la FEM inducida

A partir de la ecuación 50 se puede deducir una nueva formulación diferencial de la LVK

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Mediante el Teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

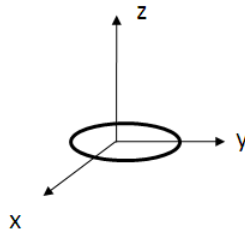
Para que las integrales sean iguales, los integrandos deben serlo, por lo tanto:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

**Ecuación 51.** Ley de Inducción de Faraday en formulación diferencial

**Ejemplo 55.** Cálculo de la tensión inducida en una espira.

Una espira conductora circular de 10 cm. de radio se encuentra localizada sobre el plano XY con centro en el origen, como se muestra en la figura.



Si en la región existe un campo magnético variable:

$$\mathbf{B} = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\omega t) \vec{a}_z \quad \omega = 10^3 \text{ rad/seg}$$

Calcule la tensión inducida sobre la espira y la corriente, en el caso de que el alambre conductor tenga una resistencia de 100mΩ/cm.

**Solución:**

De acuerdo con la Ley de Inducción de Faraday la FEM inducida se puede calcular como:

$$e = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Pero el flujo magnético a su vez es la integral de la densidad de flujo sobre el área de la espira.

$$\Phi_m = \int B \cdot dS$$

Como la espira es circular se pueden usar Coordenadas Cilíndricas para el diferencial de superficie.

$$\vec{dS} = r dr d\varphi \vec{a}_z$$

La densidad de flujo en Cilíndricas queda:

$$B = r \cos(\omega t) \vec{a}_z \quad \omega = 10^3 \text{ rad/seg}$$

El flujo magnético queda:

$$\Phi_m = \int_0^{2\pi} \int_0^{10^{-1}} r^2 \cos(\omega t) dr d\varphi$$

Evaluando

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{3} \times 10^{-3} \cos(\omega t)$$

La FEM inducida:

$$e = -\frac{d}{dt} \left( \frac{2\pi}{3} \times 10^{-3} \cos(\omega t) \right)$$

$$e = \frac{2\pi}{3} \times 10^{-3} \omega \text{ Sen}(\omega t)$$

Reemplazando:

$$e = \frac{2\pi}{3} \text{ Sen}(\omega t)$$

La longitud del alambre en cm es:

$$L = 2\pi r = 20\pi \text{ cm}$$

La resistencia eléctrica:

$$R = 0.1 \Omega/\text{cm} \times 20\pi \text{ cm} = 2\pi \Omega$$

La corriente queda:

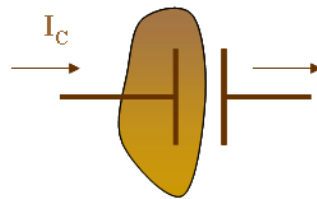
$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{1}{3} \text{ Sen}(\omega t) \quad \omega = 10^3 \text{ rad/seg}$$

## Corriente de desplazamiento

La corriente de desplazamiento, postulada, en 1865, por James Clerk Maxwell, quien formuló su modelo matemático del electromagnetismo.

Maxwell encontró una contradicción en la formulación diferencial de las leyes del electromagnetismo conocidas hasta entonces, mientras pensaba en el problema de flujo de carga eléctrica en el proceso de carga de un condensador.

Maxwell encontró que la ecuación de continuidad de la corriente violaba aparentemente la Ley Circuital de Ampere.



De acuerdo con la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

La Ley Circuital de Ampere establece que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Sin embargo, la divergencia del rotacional de un Campo Vectorial es cero, por lo que debería ser:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$$

Pero en realidad se tiene:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Lo cual implica que ambas ecuaciones son contradictorias en regiones del espacio en las que exista corriente de convección.

La forma de conciliar esta formulación matemática fue integrar en la ecuación de continuidad una nueva componente proveniente de la Ley de Gauss.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Las derivadas temporal y espacial se pueden intercambiar, por lo tanto:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Maxwell reemplazó esta componente en la ecuación de continuidad y la llamó corriente de desplazamiento, así obtuvo un modelo matemático completamente coherente y que correspondía perfectamente con las observaciones.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) = 0 \quad \mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

En estas condiciones, la corriente total es la suma de la corriente de conducción y la de desplazamiento. El modelo entonces quedó completo y era plenamente consistente con las observaciones.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampere}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{Ley de Inducción de Faraday}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad \text{Ley de Gauss}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

**Ecuación 52.** Ecuaciones electrodinámicas de Maxwell

**Ejemplo 56.** Cálculo de corriente de desplazamiento en conductores.

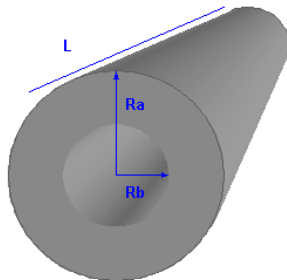
En el cilindro metálico, que se muestra en la figura, transporta una corriente armónica  $i(t) = 10 \cos(\omega t) \text{ mA}$  en dirección de L (entrando a la página) y que se distribuye de manera uniforme por el conductor.

Calcule el campo eléctrico y el campo magnético en la región  $r_b < r < r_a$

Calcule la corriente de desplazamiento en el interior del conductor.

Calcule la relación entre la corriente de desplazamiento y la corriente de conducción.

Suponga que el cilindro está hecho de cobre.

**Solución:**

Siendo el área efectiva del cilindro:  $S = \pi(r_a^2 - r_b^2)m^2$

La densidad de corriente viene dada por:  $j(t) = \frac{10^{-2}}{S} \text{Cos } \omega t \quad \frac{A}{m^2} \vec{a}_z$

Por lo tanto el campo eléctrico viene dado por:  $E(t) = \frac{10^{-2}}{\sigma S} \text{Cos } \omega t \quad \frac{V}{m} \vec{a}_z$

La densidad de flujo eléctrico:

$$D(t) = \frac{10^{-2} \epsilon}{\sigma S} \text{Cos } \omega t \quad \frac{V}{m} \vec{a}_z$$

La densidad de corriente de desplazamiento:

$$j_d(t) = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{10^{-2} \omega \epsilon}{\sigma S} (-\text{Sen } \omega t) \quad \frac{A}{m^2} \vec{a}_z$$

La corriente de desplazamiento:  $i_d(t) = \frac{10^{-2} \omega \epsilon}{\sigma} (-\text{Sen } \omega t) \quad \text{Amperios } \vec{a}_z$

La relación entre la corriente de desplazamiento y la corriente de conducción es:

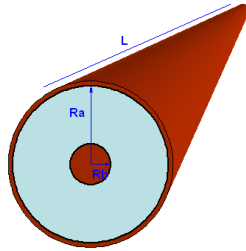
$$\frac{|i_d|}{|i|} = \frac{\omega \epsilon}{\sigma} = 9.6 \times 10^{-16}$$

**Ejemplo 57.** Cálculo de corriente de desplazamiento en dieléctricos.

Calcule la corriente de desplazamiento por unidad de longitud de un cable coaxial sometido a una diferencia de potencial armónica dada por la  $v(t) = 30 \text{ Cos } \omega t$  Voltios y que utiliza como aislante mica.

Compárela con la corriente de fuga de conducción por unidad de longitud del mismo cable.

Utilice.  $R_a = 3\text{mm}$   $R_b = 1\text{mm}$ .

**Solución:**

Calculamos la función de potencial resolviendo la ecuación de Laplace en Coordenadas Cilíndricas.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad SA: \quad v(r_a) = 0 \quad v(r_b) = v(t)$$

$$v(r, t) = \frac{v(t)}{\text{Ln} \left( \frac{r_a}{r_b} \right)} \text{Ln} \left( \frac{r_a}{r} \right)$$

$$E(r, t) = \frac{v(t)}{r \text{Ln} \left( \frac{r_a}{r_b} \right)}$$

La densidad de corriente de conducción viene dada por:

$$J_c(r, t) = \frac{\sigma v(t)}{r \text{Ln} \left( \frac{r_a}{r_b} \right)}$$

La densidad de corriente de desplazamiento:

$$J_d(r,t) = \frac{\partial D(r,t)}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{r \operatorname{Ln}\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \frac{\partial v(t)}{\partial t} = \frac{\omega \varepsilon}{r \operatorname{Ln}\left(\frac{r_a}{r_b}\right)} (-\operatorname{Sen} \omega t)$$

La relación entre las corrientes queda:

$$\frac{|J_d|}{|J_c|} = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma}$$

Para el aislante de mica a una frecuencia de 1kHz se obtiene una relación:

$$\frac{|J_d|}{|J_c|} = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} = \frac{2\pi f \varepsilon_0}{\sigma} = \frac{2\pi \times 10^3 \times 6 \times 8.85 \times 10^{-12}}{10^{-15}} = 3.33 \times 10^8$$

## Corriente en un condensador

La corriente de desplazamiento tiene diferentes propiedades físicas que aparecen cuando un condensador de placas paralelas se excita con un voltaje variante en el tiempo, en este caso, la intensidad de campo eléctrico será aproximadamente igual a la diferencia de potencial dividido entre la distancia que separa las placas si no se toman en cuenta los efectos de borde.

$$E_c(t) = \frac{v_c(t)}{d}$$

La densidad de flujo es proporcional a la intensidad de campo eléctrico, por lo tanto se tiene:

$$D(t) = \varepsilon E_c(t) = \frac{\varepsilon}{d} v_c(t)$$

Cuando se calcula la densidad de corriente de desplazamiento se tiene:

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{d} \frac{dv_c}{dt}$$

La corriente de desplazamiento se puede calcular como la densidad de corriente integrada sobre el área superficial de las placas.

$$I_d = \int_s \vec{J}_d \cdot \vec{dS} = \frac{\varepsilon S}{d} \frac{dv_c}{dt}$$

La capacitancia de un condensador de placas paralelas es una expresión conocida.

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

Por lo tanto, la corriente que circula por el condensador queda:

$$I_d = C \frac{dv_c}{dt}$$

En un condensador ideal, la corriente que circula es en su totalidad de desplazamiento.

Cuando la señal de excitación es una señal armónica, surgen otras propiedades interesantes.

$$v_c(t) = V_0 \text{ Sen } \omega t \quad V$$

$$I_d = C \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow I_d = \omega V_0 C \text{ Cos}(\omega t)$$

Al aplicar identidades trigonométricas se encuentra una relación de fase.

$$\text{Cos}(x) = \text{Sen}(x + 90^\circ)$$

$$I_d = \omega V_0 C \text{ Sen}(\omega t + 90^\circ)$$

La corriente de desplazamiento adelanta  $90^\circ$  a la diferencia de potencial aplicado.

Sin embargo, cuando el dieléctrico no es ideal, presenta una conductividad diferente de cero y, en consecuencia, existe adicionalmente una densidad de corriente de conducción asociada.

$$J = \sigma E$$

La corriente de conducción se calcula igual que en el caso anterior.

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S}{d} v_c(t) = \frac{\sigma S}{d} V_0 \text{ Sen } \omega t$$

Como se ve claramente, la corriente de conducción se encuentra en fase con la diferencia de potencial aplicado.

## Modelo de un condensador real<sup>18</sup>

A partir de la Ley Circuital de Ampere, se deduce que la corriente de desplazamiento permite crear campos magnéticos, aun en ausencia de la corriente de conducción.

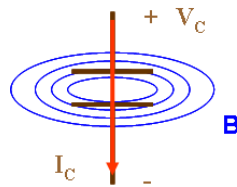
$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

En el caso  $J=0$ , se cumple que:

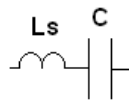
$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

De acuerdo con esta ecuación, la corriente de desplazamiento puede crear un campo magnético que se encuentra arrollado a su alrededor.

En el caso de un condensador de placas paralelas, el campo magnético creado por la corriente de desplazamiento se enrolla alrededor de las placas, como lo muestra la siguiente figura.



Como los conductores que forman las placas del condensador se encuentran inmersos en el campo magnético variable, se presenta auto inductancia, la cual se puede modelar mediante una inductancia en serie con el condensador ideal.



Este sistema bobina condensador forma otro sistema resonante serie, el cual tiene una frecuencia de resonancia característica igual a:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C}}$$

<sup>18</sup> Cuando se habla de condensador "real", se debe advertir que en este modelo no se han tomado en cuenta otros fenómenos que afectan el desempeño real del condensador, como las pérdidas por histéresis dieléctrica, los cambios producidos en los parámetros del modelo causados por la frecuencia o la intensidad de la señal de excitación, entre otros, los cuales se encuentran fuera del alcance del presente texto.

Dependiendo de las características constructivas del condensador, esta frecuencia de resonancia se encuentra usualmente por encima de los 100MHz.

La resistencia propia de los conductores que forman las placas se puede representar por una resistencia en serie con el sistema, y la resistencia de fuga del dieléctrico se puede modelar en paralelo con el condensador.

El modelo completo del condensador se muestra en la figura 77.

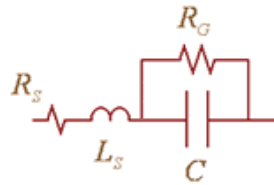


Figura 77. Modelo de un condensador real

La impedancia equivalente del condensador de acuerdo con el modelo planteado y la teoría básica de circuitos es:

$$Z(s) = (R_s + L_s s) + \left[ R_G \parallel \left( \frac{1}{sC} \right) \right]$$

Resolviendo queda:

$$Z(s) = (R_s + L_s s) + \frac{R_G \times \frac{1}{sC}}{R_G + \frac{1}{sC}}$$

Simplificando:

$$Z(s) = (R_s + L_s s) + \frac{R_G}{CR_G s + 1}$$

Resolviendo la suma:

$$Z(s) = \frac{R_G + R_s + L_s s + L_s C R_G L_s s^2 + C R_G R_s s}{C R_G s + 1}$$

Dividiendo el numerador y denominador por  $R_G$ .

$$Z(s) = R_G \frac{\left( 1 + \frac{R_s}{R_G} \right) + \left( \frac{L_s}{R_G} + C R_s \right) s + L_s C s^2}{C R_G s + 1}$$

Ecuación 53. Impedancia equivalente de un condensador real

Un valor aproximado de la impedancia del condensador, que toma en cuenta que la resistencia en paralelo es mucho mayor que la resistencia serie, puede describirse como se ve en la ecuación 54.

$$Z(s) = R_G \frac{1 + CR_s s + L_s C s^2}{CR_G s + 1}$$

**Ecuación 54.** Impedancia equivalente aproximada de un condensador real

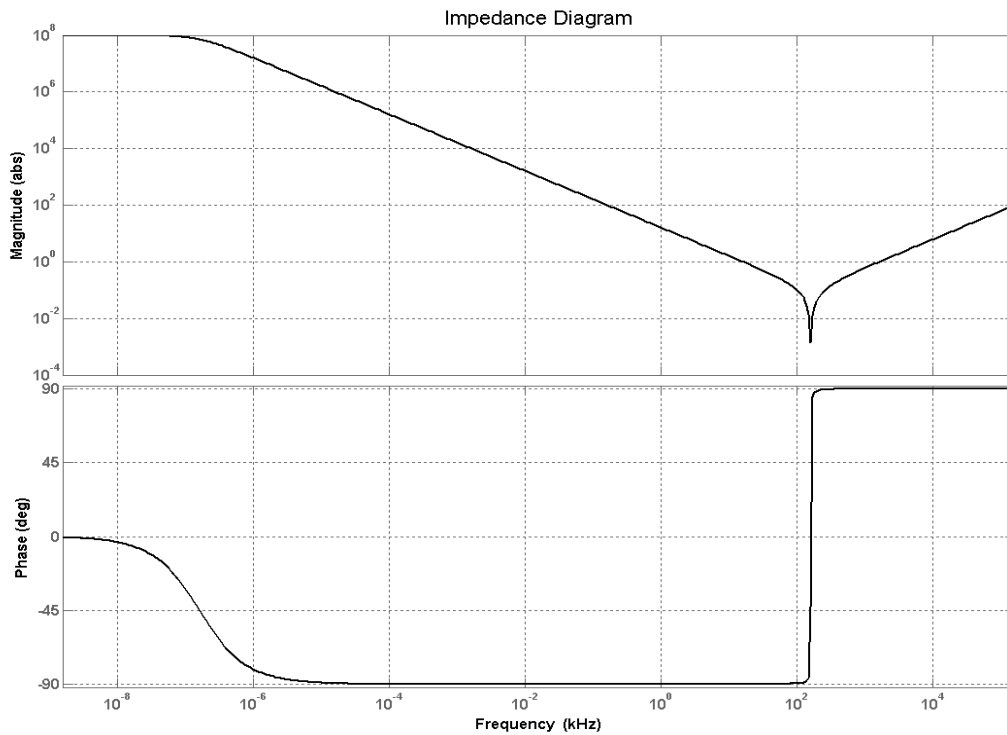
La impedancia de un condensador depende de la frecuencia de operación y puede tener diferentes tipos de comportamiento de acuerdo con la señal aplicada. En la figura se muestra una gráfica de variación de impedancia para un condensador de 10uF tomando como valores típicos de los parámetros:

$$R_G = 100M\Omega \quad L_s = 0.1\mu H \quad R_s = 1m\Omega$$

Como se puede apreciar en la figura 78, la impedancia del condensador a muy bajas frecuencias (<0.1Hz), es equivalente a la resistencia en paralelo de valor  $R_G$  con un ángulo de cero grados.

A medida que la frecuencia se incrementa (>0.1Hz), tiende a la impedancia de un condensador ideal, es decir, una impedancia que se reduce con los incrementos de frecuencia y cuyo ángulo asociado es de  $90^\circ$  en adelanto.

Sin embargo, al pasar de la frecuencia de resonancia ( $10^2$ KHz), la impedancia empieza a comportarse como una inductancia, es decir, la magnitud de la impedancia se incrementa en forma proporcional a la frecuencia y presenta un ángulo de  $90^\circ$  en atraso.



**Figura 78.** Respuesta en frecuencia de la impedancia de un condensador real

El mismo componente discreto, por lo tanto, tiene triple identidad, condensador, resistencia o inductancia, dependiendo del rango de frecuencia en el que opere el circuito.

**Ejemplo 58.** Cálculo de la impedancia real de un condensador comercial.

En un condensador comercial se encuentran las siguientes especificaciones:

$$C = 10pF \quad f_0 = 4GHz \quad R_s = 1\Omega \quad R_G = 200M\Omega$$

Calcule la impedancia a 1.5GHz y a 10GHz.

**Solución:**

Se calcula el parámetro de inductancia serie con base en la frecuencia de resonancia:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C}}$$

$$L_s = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$$

$$L_s = \frac{1}{4\pi^2 \times 16 \times 10^{18} \times 10 \times 10^{-12}} \cong 160pH$$

Se calcula la impedancia haciendo  $s \rightarrow j\omega$ :

$$Z(s) = R_G \frac{1 + CR_s s + L_s C s^2}{CR_G s + 1}$$

Para  $f=1.5GHz$ :

$$Z(1.5GHz) = (1 - j9) \Omega$$

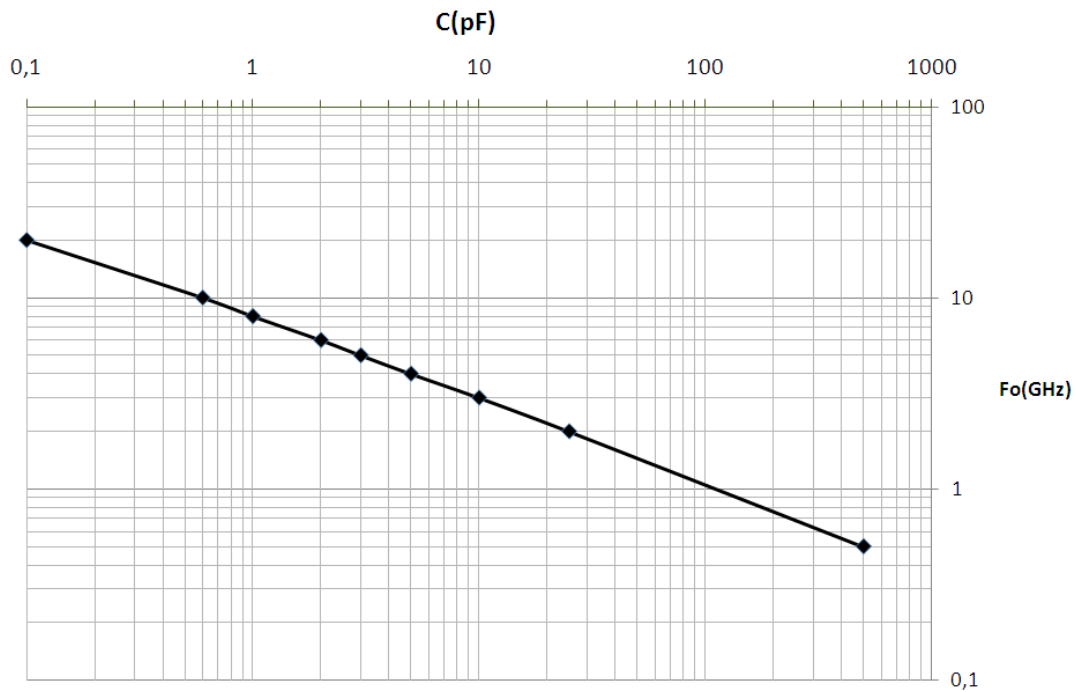
Todavía se comporta como condensador.

Para  $f=10GHz$ .

$$Z(10GHz) = (1 + j8.5) \Omega$$

En esta frecuencia se comporta como inductor.

Es importante, buscar en las hojas de especificaciones de los condensadores, la frecuencia de resonancia. En la cual se muestran unos valores de referencia para la frecuencia de resonancia de condensadores comerciales en función de la capacitancia en pico-faradios, como se puede apreciar, la tendencia es linealmente decreciente en escala logarítmica por lo que los condensadores de mayor capacitancia tienen una frecuencia de resonancia menor, del orden de unos pocos MHz.



**Figura 79.** Frecuencia de resonancia de referencia para condensadores comerciales en RF

La tendencia lineal que aproxima la frecuencia de resonancia es:

$$\text{Log}_{10}[f_0(\text{GHz})] = -0.435 \times \text{Log}_{10}[C(\text{pF})] + 0.899$$

**Ejemplo 59.** Aproximación de la frecuencia de resonancia de un condensador real.

Aproxime la frecuencia de resonancia y la inductancia serie de un condensador comercial de 10uF.

**Solución:**

Se pasa la capacitancia a pF:

$$C = 10\mu\text{F} \times \frac{10^6 \text{pF}}{1\mu\text{F}} = 10^7 \text{pF}$$

$$\text{Log}_{10}[f_0(\text{GHz})] = -0.435 \times \text{Log}_{10}[10^7] + 0.899 = -2.1$$

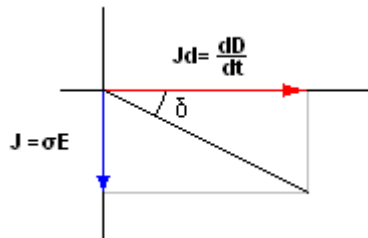
Por lo tanto:

$$f_0 = 10^{-2.1} \text{GHz} \cong 8 \text{MHz}$$

## Tangente de pérdidas de un medio

La relación entre la corriente de conducción y la de desplazamiento en un medio específico es constante  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$  cuyo valor depende de los parámetros del medio y de la frecuencia de la señal aplicada. La corriente total que circula por el medio es la suma vectorial de las dos componentes, según se muestra en la figura 80.

Adicionalmente, entre la corriente de desplazamiento y la de conducción existe un ángulo de desfase de  $90^\circ$ , tal como se muestra en la figura 80.



**Figura 80.** Diagrama fasorial de un dieléctrico con pérdidas

Esta relación se denomina tangente de pérdidas y es una característica del medio, en los materiales conductores tiende a ser muy alta ( $Tan(\delta) \rightarrow \infty$ ) ya que la corriente de conducción es mucho más importante que la de desplazamiento; mientras en medios dieléctricos el comportamiento es contrario, por lo que la tangente de pérdidas tiende a ser pequeña ( $Tan(\delta) \rightarrow 0$ ).<sup>19</sup>

En la tabla 10, se muestran los valores de referencia para el cálculo de la tangente de pérdidas de diferentes medios físicos.

**Tabla 10.** Valores de referencia para el cálculo de la tangente de pérdidas para diferentes medios físicos

Materiales	$\sigma$ (S/m)	$\epsilon_r$
Cobre	5,80E+07	1
Aluminio	3,82E+07	1
Agua de Mar	4	80
Suelo vegetal	1,00E-02	14
Suelo seco	1,00E-04	3
Agua dulce	1,00E-03	80

<sup>19</sup> La tangente de pérdidas es siempre positiva y da origen a ángulos  $\delta$  que varían entre cero grados para dieléctricos perfectos y noventa grados para superconductores.

**Ejemplo 60.** Cálculo de la tangente de pérdidas de un medio.

Calcule la tangente de pérdidas del suelo seco a una frecuencia de 10kHz. Calcule de nuevo a 100MHz.

**Solución:**

Los parámetros del suelo seco son:  $\sigma = 10^{-4} \frac{Sm}{m}$   $\epsilon_r = 3$

La tangente de pérdidas a 10kHz:

$$\text{Tan}(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-4}}{2\pi \times 10^4 \times 3 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 60$$

Lo cual da un ángulo de pérdidas de:

$$\delta = \text{Tan}^{-1}(60) = 89^\circ$$

Cuando se cambia la frecuencia a 100MHz, se obtiene:

$$\text{Tan}(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-4}}{2\pi \times 10^8 \times 3 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 0.006$$

Lo cual da un ángulo de pérdidas de:

$$\delta = \text{Tan}^{-1}(0.006) = 0.3^\circ$$

El valor de la tangente de pérdidas es una medida de la calidad de un aislamiento, entre menor sea la corriente de conducción comparada con la corriente de desplazamiento mejor es la calidad del aislamiento eléctrico; la norma IEEE 400-2001,<sup>20</sup> ilustra los elementos básicos que se deben tener en cuenta al evaluar la calidad del aislamiento de cables de potencia a través de la tangente de pérdidas.

Para efectos prácticos, la tangente de pérdidas se conoce también como tangente delta o factor de disipación y la corriente de desplazamiento como corriente de polarización. Los cambios en la tangente delta de un cable a medida que pasa el tiempo o cuando se mide a diferentes voltajes, se interpretan como envejecimiento o deterioro del aislamiento, obligando a su cambio o reposición.

<sup>20</sup> IEEE STD 400 2001 - Guide for Field Testing and Evaluation of the Insulation of Shielded Power Cable Systems Rated 5 kV and Above.

## Clasificación de medios según la tangente de pérdidas

Como se puede observar en la figura 80, entre mayor sea el ángulo de pérdidas mayor va a ser la componente de corriente de conducción frente a la corriente de polarización o desplazamiento, es decir, más conductor es el medio.

Esta observación hace que se pueda establecer una clasificación básica para medios con base en la tangente de pérdidas de la siguiente forma:

- **Dieléctricos perfectos:** no presentan corriente de conducción, por lo tanto, no poseen pérdidas por efecto Joule.  $Tan(\delta) = 0 \quad \delta = 0$ .
- **Conductores perfectos:** no presentan corriente de polarización, por lo tanto, no poseen efectos capacitivos o de acumulación de carga.  $Tan(\delta) \rightarrow \infty \quad \delta = \frac{\pi}{2}$ .
- **Buenos aislantes:** presentan corriente de conducción y poseen pérdidas por efecto Joule, pero este efecto es casi despreciable frente al efecto capacitivo, se denominan también "dieléctricos de bajas pérdidas".  $Tan(\delta) \rightarrow 0^+ \quad \delta \rightarrow 0^+$ .
- **Buenos conductores:** presentan corriente de polarización, por lo tanto, poseen efectos capacitivos o de acumulación de carga, pero es mucho más significativa la corriente de conducción y las pérdidas por efecto Joule.  $Tan(\delta) \rightarrow \infty \quad \delta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .
- **Dieléctricos disipativos:** presentan ambos efectos y ninguno es despreciable frente al otro.  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ .

La tangente delta en escala logarítmica se puede expresar como:

$$Tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

Obteniendo el logaritmo en ambos lados se tiene:

$$Log[Tan(\delta)] = Log\left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]$$

Equivalente a:

$$Log[Tan(\delta)] = Log\left(\frac{\sigma}{2\pi\epsilon}\right) - Log(f)$$

Esta función en escala logarítmica es equivalente a una función de la forma:

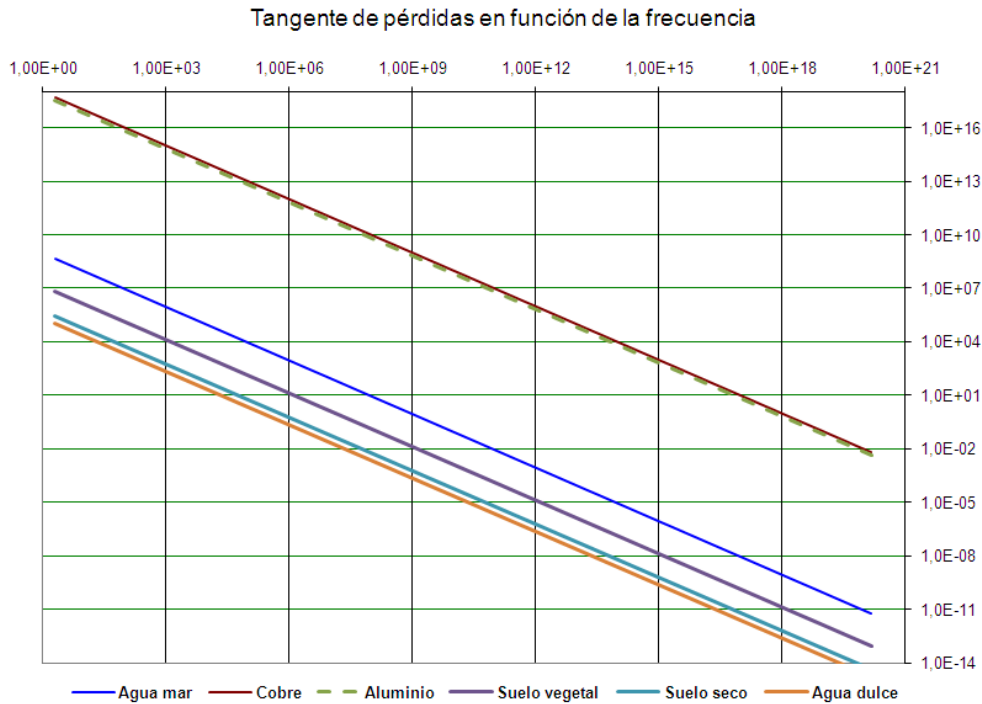
$$y = A - x$$

Donde:

$$y = Log[Tan(\delta)] \quad A = Log\left(\frac{\sigma}{2\pi\epsilon}\right) \quad x = Log(f)$$

Esto significa que en escala logarítmica, la tangente de pérdidas tiene un comportamiento lineal con respecto a la frecuencia, como se aprecian en la figura 81, en donde se ha graficado la tangente delta en función de la frecuencia en escala logarítmica.

El intercepto con el eje Y depende del medio, pero la pendiente es constante e igual a -1. Como se puede apreciar, el mismo medio puede tener diferentes comportamientos dependiendo de la frecuencia, pasando por buen aislante, dieléctrico disipativo o buen conductor.



**Figura 81.** Tangente de pérdidas para diferentes medios evaluada en función de la frecuencia

Los valores de referencia para los casos anteriormente tratados son:

**Buen conductor:**  $Tan(\delta) \geq 10$   $\delta \geq 84^\circ$ .

**Buen aislante:**  $Tan(\delta) < 0.01$   $\delta \geq 0.6^\circ$ .<sup>21</sup>

**Dieléctricos disipativos:**  $0.01 < Tan(\delta) < 10$   $0.6^\circ < \delta < 84^\circ$ .

<sup>21</sup> En cables de alta tensión este valor debe ser inferior a 0.001 para ser considerado un dieléctrico de buena calidad.

**Ejemplo 61.** Clasificación de medios según la tangente delta.

Un aislante desconocido tiene una tangente de pérdidas de 0.1 medida a 100Hz. ¿Cuál es el valor de la tangente delta a 100kHz y cómo se puede clasificar?

**Solución:**

Se calcula el valor de la constante A para el medio dado:

$$\text{Log}[\text{Tan}(\delta)] = A - \text{Log}(f)$$

$$\text{Log}[0.1] = A - \text{Log}(100)$$

$$-10 = A - 2$$

$$A = -8$$

Se aproxima el valor a 100kHz:

$$\text{Log}[\text{Tan}(\delta)] = -8 - \text{Log}(10^5)$$

$$\text{Log}[\text{Tan}(\delta)] = -8 - 5 = -13$$

$$\text{Tan}(\delta) = 10^{-13} \Rightarrow \delta \rightarrow 0$$

De acuerdo con los criterios de clasificación, el material a 100Hz es un dieléctrico disipativo, mientras a 100kHz se comporta como un buen aislante o dieléctrico de bajas pérdidas.

## Ondas electromagnéticas en dieléctricos perfectos

Las ecuaciones de Maxwell dan origen a soluciones armónicas las cuales fueron encontradas por primera vez por James Clerck Maxwell, en 1884. Basado en dichas soluciones Maxwell predijo la existencia de ondas electromagnéticas y descubrió que se puede transmitir señales a largas distancias sin haber, necesariamente, medios físicos para la transmisión.

En el año de 1887, Einrich Hertz descubrió las ondas predichas por Maxwell y demostró que la electricidad puede transmitirse en forma de ondas electromagnéticas, las cuales se propagan a la velocidad de la luz y tienen además muchas de sus propiedades.

Este es el principio de la telefonía inalámbrica, la radio, la TV, la telemetría, entre otras múltiples maravillas de la vida moderna.

Es posible encontrar ecuaciones que describen el comportamiento de campos en el espacio libre en ausencia de carga volumétrica o de corrientes eléctricas de conducción, en estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell se reducen, según como aparece en la ecuación 55.

$$\begin{aligned}\nabla \times H &= \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \times E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot H &= 0\end{aligned}$$

**Ecuación 55.** Ecuaciones de Maxwell en medios sin pérdidas

De acuerdo con estas ecuaciones, se pueden observar los siguientes fenómenos físicos:

- Un campo eléctrico variante en el tiempo es capaz de generar en su entorno una corriente de desplazamiento, la cual da origen a un campo magnético que se arrolla a su alrededor.
- Este campo magnético, depende también del tiempo por lo que está capacitado para generar un campo eléctrico arrollado a su alrededor.
- Si el campo original E cambia de forma armónica, lo que se tiene es un conjunto de campos eléctrico y magnético que varían de forma armónica y se crean mutuamente siendo ambos perpendiculares entre sí.

Matemáticamente, la solución propuesta por Maxwell puede esquematizarse de la siguiente manera.

A partir de la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

En un medio con ausencia de carga libre:

$$\nabla \cdot E = 0$$

Por lo tanto:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\nabla^2 E$$

De las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu \nabla \times \left[ \frac{\partial}{\partial t} (H) \right]$$

Las derivadas espaciales y temporales se pueden intercambiar:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H)$$

Reemplazando:

$$-\nabla^2 E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H)$$

Se reemplaza el rotacional del campo magnético en un medio sin corriente de conducción:

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= \frac{\partial D}{\partial t} \\ -\nabla^2 E &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\nabla^2 E = \mu \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

Cuando se aplica la Ley de Gauss  $D = \epsilon E$ :

$$\nabla^2 E = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Este tipo de ecuación diferencial da origen a una ecuación diferencial compleja, si se resuelve en Coordenadas Cartesianas por ejemplo, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

**Ecuación 56.** Ecuación diferencial de onda electromagnética

Esta ecuación base es llamada ecuación de onda electromagnética porque su solución viene dada por un tipo de onda armónica de variación en el tiempo y el espacio.

Para efectos de simplificar la solución, se supone una variación del campo eléctrico ubicado en dirección al eje **Y**, que presenta variación únicamente en el eje **X**, con lo que se tiene una ecuación diferencial del tipo.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Esta es una ecuación diferencial en la cual, la segunda derivada espacial del campo **E** es directamente proporcional a su segunda derivada temporal. El único caso en que esto ocurre es en una variación exponencial combinada de **E** con respecto al tiempo y el espacio:

$$E_y(x, t) = E_{x0} e^{-j\omega t} e^{\gamma x} \vec{a}_y$$

La solución de esta ecuación se puede obtener como:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \gamma^2 E_y(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = (j\omega)^2 E_y(x, t)$$

Reemplazando:

$$\gamma^2 E_y(x, t) = \mu\epsilon(j\omega)^2 E_y(x, t)$$

Por lo tanto:

$$\gamma^2 = \mu\epsilon(j\omega)^2$$

$$\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

La solución completa de la ecuación diferencial queda:

$$E_y(x, t) = E_{x0} e^{-j\omega t} e^{\pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}x} \vec{a}_y$$

Esta solución es una exponencial compleja, la cual se puede reagrupar como:

$$E_y(x, t) = E_{x0} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)} \vec{a}_y$$

De acuerdo con el teorema de Euler:

$$e^{-j\theta} = \text{Cos}\theta - j\text{Sen}\theta$$

$$e^{j\theta} = \text{Cos}\theta + j\text{Sen}\theta$$

Por lo que se puede obtener:

$$\text{Cos}\theta = \frac{1}{2}(e^{-j\theta} + e^{j\theta})$$

Es decir que una combinación lineal de dos exponenciales complejas da origen a una señal armónica senoidal.

Por el principio de combinación lineal de soluciones de ecuaciones diferenciales, que establece que:

*“Si  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son soluciones de una ecuación diferencial, entonces cualquier combinación  $y = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ , será también solución de la ecuación”:*

Se tiene entonces que la solución final para el campo eléctrico debe ser de la forma:

$$E_y(x, t) = E_{x0} \text{Cos}(\omega t - \omega\sqrt{\mu\epsilon}x) \vec{a}_y$$

Como el campo eléctrico es de variación armónica, se puede suponer, sin ningún error, que el campo magnético  $\mathbf{H}$  también lo es, por lo que el campo  $\mathbf{H}$  se puede expresar como:

$$H = H_0 e^{-j\omega t}$$

Dado que el rotacional de  $\mathbf{E}$  es proporcional a la primera derivada de  $\mathbf{H}$  con respecto al tiempo, para una variación armónica resulta:

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} = j\omega\mu H$$

Evaluando el rotacional de  $\mathbf{E}$ :

$$\nabla \times E = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x, t) & 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\nabla \times E = \frac{\partial}{\partial x} E_y(x, t) \vec{a}_z$$

Reemplazando

$$j\omega\mu H = \frac{\partial}{\partial x} E_y(x, t) \vec{a}_z$$

Por lo tanto:

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_y(x, t) \vec{a}_z$$

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_{x0} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)} \vec{a}_z$$

Aplicando la derivada:

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \times j\omega\sqrt{\mu\epsilon} E_{x0} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)} \vec{a}_z$$

De donde se obtiene:

$$H = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} E_{x0} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)} \vec{a}_z$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$H = H_{x0} e^{j\omega(t \pm \sqrt{\mu\epsilon}x)} \vec{a}_z$$

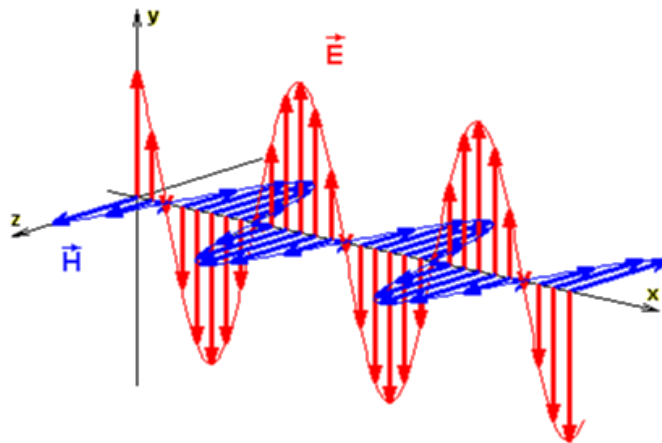
Donde:

$$H_{x0} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} E_{x0}$$

Por el mismo principio de superposición de soluciones, la ecuación para el campo magnético queda:

$$H(x, t) = H_{x0} \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu \epsilon} x) \vec{a}_z$$

Como se observa claramente, un campo eléctrico de variación armónica en dirección **Y**, genera un campo magnético de variación igualmente armónica en dirección **Z**. Los dos campos representan una onda viajera en dirección **X**, encontrándose en fase espacial y temporal como se muestra en la figura 82.



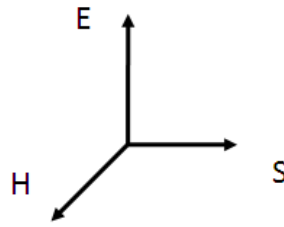
**Figura 82.** Onda electromagnética viajera en dirección **X**<sup>22</sup>

La onda mostrada en la figura 82 recibe el nombre de electromagnética por ser originada por dos campos eléctrico y magnético mutuamente perpendiculares, que se propagan en una dirección perpendicular a ambos. La dirección de propagación de una onda electromagnética en general se encuentra señalada por un vector **S**, que apunta según la ley de la mano derecha:

$$S = E \times H$$

Los tres vectores forman un sistema ortogonal, como el que se muestra en la figura 83.

<sup>22</sup> Figura obtenida de una simulación encontrada en el sitio web del profesor Walter Fendt: [http://www.walter-fendt.de/ph11s/emwave\\_s.htm](http://www.walter-fendt.de/ph11s/emwave_s.htm)



**Figura 83.** Dirección de propagación de una onda electromagnética

## Impedancia intrínseca

La impedancia intrínseca de un medio es la relación entre la magnitud del campo eléctrico y la magnitud del campo magnético asociado a la onda.

La impedancia intrínseca se representa mediante la letra griega eta ( $\eta$ ) y tiene unidades de Ohmio, según el siguiente análisis dimensional:

$$\eta = \frac{E}{H} = \frac{V/m}{A/m} = \frac{V}{A} = \Omega$$

En el caso de un dieléctrico perfecto, la impedancia intrínseca queda:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

**Ecuación 57.** Impedancia intrínseca de un medio sin pérdidas

La impedancia intrínseca del vacío es una constante universal cuyo valor está definido por:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Reemplazando:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} H/m}{\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}} = 120\pi\Omega$$

En el caso de dieléctricos perfectos no magnéticos la impedancia intrínseca es:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

Por lo tanto:

$$\eta = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \Omega$$

## Velocidad de propagación

La velocidad de propagación puede medirse como el tiempo necesario para que en un mismo punto del espacio se presente nuevamente un cruce por cero o un máximo de la señal.

Esta condición se satisface siempre que:

$$\omega t - \omega x \sqrt{\mu\epsilon} = k$$

De donde se deduce que:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} t - \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} k$$

Derivando el desplazamiento con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$

Que es la velocidad de desplazamiento de la onda, conocida también como velocidad de fase.

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

**Ecuación 58.** Velocidad de fase de una onda electromagnética en un medio no disipativo

La velocidad de fase de las ondas electromagnéticas depende exclusivamente de las propiedades electromagnéticas del medio en donde se propagan y no del desplazamiento relativo entre observadores, lo cual viola claramente las leyes de la mecánica conocidas. Esta observación dio origen a la llamada teoría especial de la relatividad, cuyo enunciado fundamental se publicó, en el año de 1905, por parte de Albert Einstein.

La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es una constante universal cuyo valor es de:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

Reemplazando:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \text{H/m} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F/m}}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Esta constante resultó ser idéntica a la velocidad de la luz, que había sido medida de diferentes formas por muchos investigadores. Por lo tanto, se concluyó que la luz tenía naturaleza electromagnética.

Dado que la mínima permitividad eléctrica es la del vacío y, en la mayoría de los casos, la permeabilidad magnética relativa es superior a la unidad, la velocidad de las señales electromagnéticas es menor en cualquier medio, que en el vacío.

En el caso de dieléctricos perfectos no magnéticos la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}}$$

Por lo tanto:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

**Ejemplo 62.** Características de medios dieléctricos perfectos no magnéticos.

Una señal electromagnética de amplitud  $E_0 = 120 \text{V/m}$  se propaga a través de un dieléctrico perfecto no magnético cuya permitividad relativa es 8.

¿Cuál es la velocidad de fase y la impedancia intrínseca del medio? ¿Cuál es la amplitud del campo magnético asociado a la onda?

**Solución:**

La velocidad de fase para un dieléctrico perfecto no magnético viene dada por:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Reemplazando:

$$v_p = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{8}} = 106 \times 10^6 \text{ m/s}$$

La impedancia intrínseca:

$$\eta = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \Omega$$

Reemplazando:

$$\eta = \frac{120\pi}{\sqrt{8}} = 133.3\Omega$$

La amplitud del campo magnético asociado es:

$$|H| = \frac{|E|}{|\eta|} = \frac{120V/m}{133.3\Omega} = 900 \text{ mA/m}$$

## Índice de refracción

El índice de refracción de una sustancia es la relación existente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de fase de una señal electromagnética en un medio específico. Se representa mediante la letra **n**.

$$n = \frac{c_0}{v_p}$$

Debido a que la velocidad de fase en cualquier medio es menor que la velocidad de la luz en el vacío, el índice de refracción de una sustancia es siempre una cantidad mayor o igual que 1.

En el caso de dieléctricos perfectos no magnéticos, el índice de refracción queda:

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \frac{c_0}{c_0/\sqrt{\epsilon_r}}$$

Por lo tanto:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

En la tabla 11, se muestran los índices de refracción de algunas sustancias de uso común.

**Tabla 11.** Índices de refracción de algunas sustancias

Medio	Índice de refracción
Aire	1.00029
Agua	1.3333
Vidrio común	1.52
Glicerina	1.473
Diamante	2.42
Metanol	1.329

El inverso del índice de refracción es también un parámetro característico de los diferentes medios de propagación y se denomina factor de velocidad:

$$f_v = \frac{1}{n}$$

De acuerdo con la definición del índice de refracción se tiene:

$$f_v = \frac{v_p}{c_0}$$

Es decir, el factor de velocidad es la velocidad de fase en un medio comparada con la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, es un número siempre igual o menor que 1.

**Ejemplo 63.** Cálculo de la permitividad a partir del índice de refracción.

Calcule la permitividad relativa y la impedancia intrínseca de la glicerina.

**Solución:**

Dado que la glicerina es un medio no magnético, el índice de refracción viene dado por:

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

Por lo tanto:

$$\epsilon_r = n^2$$

Se toma el valor de la tabla 11.

$$\epsilon_r = 1.473^2 = 2.17$$

## Constante de fase

La constante que acompaña el desplazamiento de fase de la onda con respecto a la distancia se conoce como constante de fase  $\beta$ :

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

En el análisis dimensional resulta que:

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = m/s$$

De donde:

$$\beta = \frac{rad/s}{m/s} = rad/m$$

La constante de fase representa la ganancia de fase en radianes que se obtiene por cada unidad de longitud que recorre la onda.

## Longitud de onda

Para un tiempo constante, los puntos del espacio que tienen igual magnitud de campo se encuentran separados por una distancia tal que la ganancia de fase sea equivalente a  $2\pi$  radianes:

$$\omega(t - x_1\sqrt{\mu\varepsilon}) - \omega(t - x_2\sqrt{\mu\varepsilon}) = 2\pi$$

Reduciendo:

$$\omega(x_2 - x_1)\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi$$

La distancia entre los dos puntos de la misma fase es igual a una longitud de onda, por tanto:

$$x_2 - x_1 = \lambda$$

$$\omega\lambda\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{\beta}$$

Por otra parte:

$$\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

En función de la velocidad de fase:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} \Rightarrow v_p = \lambda f$$

**Ejemplo 64.** Longitud de onda de una señal electromagnética.

Calcule la longitud de onda de una onda electromagnética de 100KHz que se propaga en:

a) Vacío. b) Glicerina.

**Solución:**

a) Cuando la onda se propaga en el vacío:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{100 \times 10^3 \text{ seg}^{-1}} = 3 \text{ km}$$

b) Cuando la onda se propaga en glicerina:

El índice de refracción de la glicerina es:  $n = 1.473$

La velocidad de fase queda:

$$v_p = \frac{c_0}{n} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.473} = 203.7 \times 10^6 \text{ m/s}$$

La longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{203.7 \times 10^6 \text{ m/s}}{100 \times 10^3 \text{ seg}^{-1}} = 2037 \text{ m}$$

Para los dieléctricos perfectos no magnéticos, la longitud de onda se puede expresar en función de la longitud de onda del vacío y el índice de refracción.

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{nf}$$

La longitud de onda en el vacío es:

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Lo cual significa que la longitud de onda es menor en cualquier medio que en el vacío.

## Ondas electromagnéticas en medios disipativos

Son medios disipativos aquellos que presentan pérdida de energía por calentamiento, es decir, efecto Joule.

Para que existan pérdidas por efecto Joule, es necesario que la conductividad del medio sea diferente de cero, por lo que es necesario tomar en cuenta la componente de corriente de conducción en la solución de la ecuación de onda.

La ecuación del rotacional del campo magnético queda:

$$\nabla \times H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

Ecuación que involucra la componente de corriente de conducción.

Para una solución armónica, igual al caso anterior:

$$\nabla \times H = (\sigma + j\omega\varepsilon)E$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)E_y$$

En este caso, la solución para el campo puede ser tomada como:

$$E_y(x) = E_{x0} e^{\gamma x} \quad ; \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

La solución completa en función del tiempo y la distancia queda:

$$E_y(x, t) = E_{x0} e^{-\alpha x} e^{-j\omega t} e^{\pm j\beta x} \vec{a}_y$$

La constante  $\gamma$  es la raíz cuadrada de un número complejo que se obtiene matemáticamente como:

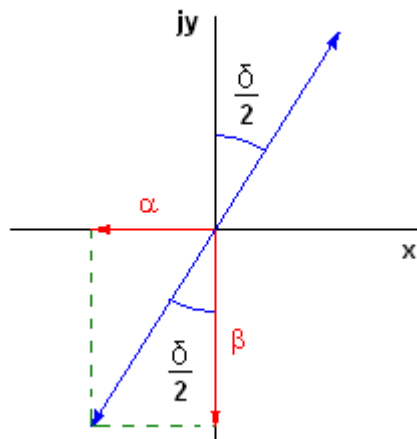
$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left( -1 + j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^{1/2}$$

**Ecuación 59.** Constante de propagación en un medio con pérdidas

La constante  $\gamma$  en función de la tangente de pérdidas se puede expresar como:

$$|\gamma| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon(1 + \tan^2 \delta)^{1/2}} \quad \gamma = |\gamma| \begin{cases} 90^\circ - \delta/2 \\ 270^\circ - \delta/2 \end{cases}$$

Las dos soluciones en el plano cartesiano se muestran en la figura 84.



**Figura 84.** Solución gráfica de la ecuación 59

Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  se calculan como:

$$\alpha = -|\gamma| \operatorname{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \beta = -|\gamma| \operatorname{Cos}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Por tanto, la solución para el campo  $\mathbf{E}$  que cambia en el tiempo y en el espacio es:

$$\vec{E}_y(x,t) = E_{x0} e^{-\alpha x} \operatorname{Cos}\left[\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega}x\right)\right] \vec{a}_y$$

Como se puede apreciar en la solución completa, la constante  $\alpha$  está relacionada con una atenuación de la amplitud de la onda en función de la distancia; mientras la constante  $\beta$  se relaciona con la ganancia de fase en función de la distancia.

Éstas reciben el nombre de constante de atenuación y constante de fase, respectivamente.

La constante de fase se mide en radianes por unidad de longitud, mientras la constante de atenuación lo hace en unidades inversas a la unidad de longitud.

Dado que la unidad  $m^{-1}$ , no existe formalmente en el SI, se le ha asignado una unidad adimensional denominada Nieper a la constante de atenuación, con lo cual su valor se expresa en Np/m.

**Ejemplo 65.** Constantes de propagación en un dieléctrico con pérdidas.

Un medio dieléctrico no magnético tiene una conductividad de  $10^{-2} \text{Sm/m}$  y una permitividad relativa de 3.5. Calcule las constantes de propagación para una onda de 100kHz que se propaga por este medio.

**Solución:**

Se calcula la constante de propagación  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \mu = \mu_0 \quad \epsilon = 3.5\epsilon_0$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \times 10^5 \times 4\pi \times 10^{-7} \left(10^{-2} + j2\pi \times 10^5 \times 3.5 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right)}$$

Evaluando:

$$\gamma = \sqrt{j0.08\pi^2 \left(10^{-2} + j \frac{3.5}{18} \times 10^{-4}\right)}$$

$$\gamma = 0.0628 + 0.0629i = 0.089\langle 45^\circ \rangle$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = 0.0628 \text{ Np/m}$$

La constante de fase:

$$\beta = 0.0629 \text{ rad/m}$$

## Velocidad de propagación

La velocidad de propagación se calcula igual que en el caso de un dieléctrico sin pérdidas, cuando se satisface la condición de que la fase permanezca constante:

$$t - \frac{\beta}{\omega} x = k$$

De donde se deduce:

$$x = \frac{\omega}{\beta} (t - k)$$

La derivada del desplazamiento da como resultado la velocidad de fase:

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

**Ecuación 60.** Velocidad de propagación en dieléctrico disipativo

**Ejemplo 66.** Velocidad de propagación en un dieléctrico con pérdidas.

Un medio dieléctrico no magnético tiene una conductividad de  $10^{-2} \text{ Sm/m}$  y una permitividad relativa de 3.5. Calcule la velocidad de propagación, el índice de refracción y la ganancia de fase cuando la onda se desplaza 10m dentro del medio.

**Solución:**

Se calcula la constante de propagación  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \mu = \mu_0 \quad \epsilon = 3.5\epsilon_0$$

Reemplazando se obtiene:

$$\gamma = 0.0628 + 0.0629i = 0.089\langle 45^\circ \rangle$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = 0.0628 \text{ Np/m}$$

La constante de fase:

$$\beta = 0.0629 \text{ rad/m}$$

La velocidad de propagación es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}}{0.0629 \frac{\text{rad}}{\text{m}}} = 10^7 \text{ m/s}$$

El índice de refracción:

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10^7 \text{ m/s}} = 30$$

La ganancia de fase:

$$\Delta\varphi = \beta x = 0.0629 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \times 10 \text{ m} = 0.629 \text{ rad}$$

$$\Delta\varphi = 0.629 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 36^\circ$$

## Impedancia intrínseca

La impedancia intrínseca también debe tomar en cuenta la componente de conductividad, por lo que la ecuación cambia a:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = x + jy$$

La impedancia intrínseca es, por lo tanto, un número complejo, que se puede expresar en magnitud y fase:

$$\eta = |\eta|\langle\theta_\eta\rangle$$

Donde:

$$|\eta| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta_\eta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para el campo magnético se tiene que:

$$H(x) = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{\gamma x}$$

Lo cual significa que en un medio dieléctrico disipativo, el campo magnético y el campo eléctrico ya no se encuentran en fase. El campo magnético se encuentra atrasado con respecto al campo eléctrico en un ángulo igual al de la impedancia intrínseca.

La impedancia intrínseca también puede calcularse en términos de la tangente de pérdidas del medio como:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}}$$

Reduciendo:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2}}$$

Expresado en notación polar:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + \text{Tan}^2 \delta\right)^{-1/4} \angle \frac{\delta}{2}$$

**Ecuación 61.** Impedancia intrínseca en función de la tangente de pérdidas

Lo cual significa que el máximo ángulo que puede alcanzar la impedancia intrínseca es de 45° dado que el ángulo de pérdidas es siempre inferior a 90°.

**Ejemplo 67.** Impedancia intrínseca en un dieléctrico con pérdidas.

Un medio dieléctrico no magnético tiene una conductividad de  $10^{-2} \text{Sm/m}$  y una permitividad relativa de 3.5. Calcule la impedancia intrínseca del medio.

**Solución:**

La impedancia intrínseca viene dada por:  $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$

Para este caso:

$$\omega = 2\pi \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \mu = \mu_0 \quad \epsilon = 3.5\epsilon_0$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j2\pi \times 10^5 \times 4\pi \times 10^{-7}}{10^{-2} + j2\pi \times 10^5 \times 3.5 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}}$$

Simplificando:

$$\eta = \sqrt{\frac{j8\pi^2}{1 + j\frac{3.5}{18} \times 10^{-2}}}$$

Resolviendo:

$$\eta = (6.28 + j6.28)\Omega = 8.9(45^\circ)\Omega$$

## Profundidad de penetración

De la ecuación de onda del campo eléctrico, puede deducirse que el campo decae exponencialmente cuando ingresa en un medio con pérdidas. La constante de atenuación da una medida de la tasa de decaimiento de la amplitud de señal.

$$|E| = E_{x0}e^{-\alpha x}$$

$$\frac{d|E|}{dx} = -\alpha E_{x0}e^{-\alpha x}$$

Dado que la señal decae exponencialmente, debe esperarse que exista un límite en el cual la señal sea prácticamente imperceptible, y ese límite debe guardar relación directa con la constante de atenuación.

Cuando la distancia recorrida dentro del medio es equivalente al inverso de la constante de atenuación, la amplitud del campo eléctrico es equivalente a:

$$|E| = E_{x0} e^{-\alpha \times \frac{1}{\alpha}}$$

$$|E| = E_{x0} e^{-1} = 0.367 E_{x0}$$

Es decir que decae al 36.7% del valor del campo original. En este punto se considera que la señal se encuentra demasiado atenuada siendo prácticamente imperceptible.

Por esta razón, el inverso de la constante de atenuación se denomina profundidad de penetración de la onda  $\delta_p$ . Dado que la potencia de una señal es proporcional al cuadrado de su amplitud, cuando la señal decae al 36% de su valor, su potencia decae al 13%.

$$\delta_p = \frac{1}{|\alpha|}$$

Como las unidades de la constante de atenuación son Np/m, la profundidad de penetración queda expresada en metros.

**Ejemplo 68.** Profundidad de penetración en un dieléctrico disipativo.

Para el agua de mar, las constantes de permeabilidad, permitividad y conductividad son, respectivamente,:

$$\epsilon_r = 72 \quad \sigma = 4 \frac{Sm}{m} \quad \mu_r = 1.002$$

Calcule la profundidad de penetración de una señal de 10MHz que se propaga en agua de mar.

**Solución:**

Se calcula la constante de propagación  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^7 \frac{rad}{seg} \quad \mu = 1.002\mu_0 \quad \epsilon = 72\epsilon_0$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \times 10^7 \times 1.002 \times 4\pi \times 10^{-7} \left( 4 + j2\pi \times 10^7 \times 72 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \right)}$$

Evaluando:

$$\gamma = \sqrt{j8\pi^2(4 + j4 \times 10^{-2})}$$

$$\gamma = 12.56 + 12.56i$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = 12.56 \text{ Np/m}$$

La profundidad de penetración:

$$\delta_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{12.56 \text{ Np/m}} = 7.96 \text{ cm}$$

La señal se atenúa casi completamente en los primeros 8cm.

## Longitud de onda

Para un tiempo constante, los puntos del espacio que tienen igual magnitud de campo se encuentran separados por una distancia tal que la ganancia de fase sea equivalente a  $2\pi$  radianes:

$$(\omega t - \beta x_1) - (\omega t - \beta x_2) = 2\pi$$

Reduciendo:

$$\beta(x_2 - x_1) = 2\pi$$

La distancia entre los dos puntos de la misma fase es igual a una longitud de onda, por tanto:

$$x_2 - x_1 = \lambda$$

$$\lambda \beta = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

La longitud de onda es igual a  $2\pi$  dividido por la constante de fase.

**Ejemplo 69.** Longitud de onda en un medio disipativo.

Para un medio disipativo, las constantes de permeabilidad, permitividad y conductividad son respectivamente,;

$$\epsilon_r = 8 \quad \sigma = 0.4 \frac{\text{Sm}}{\text{m}} \quad \mu_r = 1.00$$

Calcule la longitud de onda y la cantidad de longitudes de onda que alcanza a penetrar una señal de 10MHz en el medio.

**Solución:**

Se calcula la constante de propagación  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\omega = 2\pi \times 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \mu = 1.00\mu_0 \quad \epsilon = 8\epsilon_0$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \times 10^7 \times 1.00 \times 4\pi \times 10^{-7} \left(0.4 + j2\pi \times 10^7 \times 8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\right)}$$

Evalutando:

$$\gamma = \sqrt{j8\pi^2 \left(0.4 + j\frac{4}{9} \times 10^{-2}\right)}$$

$$\gamma = 3.95 + 3.99i$$

La constante de fase es:

$$\beta = 3.99 \text{ rad/m}$$

La longitud de onda queda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi \text{ rad}}{3.99 \text{ rad/m}} \cong \frac{\pi}{2} \text{ m}$$

La profundidad de penetración:

$$\delta_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{3.95 \text{ Mp/m}} = 0.253\text{m} \cong 25.3\text{cm}$$

La onda penetra:

$$\delta_p(\lambda) = \frac{25.3\text{cm}}{\frac{\pi}{2}\text{m}} = 0.16 \lambda$$

No alcanza a penetrar ni siquiera una longitud de onda completa. Es un medio altamente disipativo.

## Ondas en buenos aislantes

Cuando la tangente de pérdidas es pequeña, el cálculo de los indicadores de propagación de ondas electromagnéticas se puede hacer por medio de fórmulas aproximadas, las cuales simplifican dicho cálculo.

Cuando la tangente de pérdidas es muy inferior a la unidad, se pueden despreciar sus efectos sobre la velocidad, la longitud de onda y la impedancia intrínseca. Conservando en la aproximación el cálculo de la profundidad de penetración y de la constante de atenuación.

La constante  $\gamma$  en función de la tangente de pérdidas se expresa como:

$$|\gamma| = \omega \sqrt{\mu \varepsilon (1 + \tan^2 \delta)^{\frac{1}{2}}}$$

Cuando la tangente de pérdidas es muy pequeña ( $Tan(\delta) < 0.1$ ) se puede despreciar su efecto y el resultado es:

$$|\gamma| \cong \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

En el caso de la impedancia intrínseca, se tienen consideraciones similares, por lo tanto, al despreciar el efecto de la tangente de pérdidas se obtiene:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + Tan^2 \delta \Big|_{\rightarrow 0}\right)^{-1/4} < \frac{\delta}{2} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

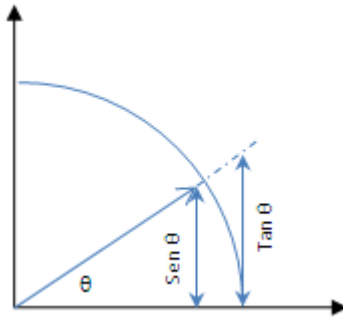
En cuanto a la constante de fase, ésta se multiplica por un número muy cercano a la unidad, dado lo pequeño del ángulo de pérdidas, por lo tanto:

$$\beta = -|\gamma| \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cong -\gamma$$

En el caso de la constante de atenuación, se puede usar una aproximación trigonométrica, basada en la definición de las funciones circulares:

$$Sen(x) \cong Tan(x) \cong x \Big|_{x \rightarrow 0}$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 85.



**Figura 85.** Aproximación de las funciones circulares seno y tangente en ángulos pequeños

$$\alpha = -|\gamma| \text{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \cong -\frac{1}{2} \gamma \text{Tan} \delta$$

Reemplazando:

$$\alpha = -|\gamma| \text{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \cong -\frac{1}{2} \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)$$

Simplificando:

$$\alpha \cong -\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

En función de la impedancia intrínseca queda:

$$\alpha = -\frac{\sigma \eta}{2}$$

El signo negativo solo refuerza la tendencia decreciente de la amplitud del campo electromagnético.

La profundidad de penetración queda:

$$\delta_p = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{2}{\sigma \eta}$$

Como se puede apreciar en un buen dieléctrico, la profundidad de penetración es inversamente proporcional a la conductividad del material y es independiente de la frecuencia de la señal aplicada.

Por supuesto, para que estas aproximaciones sean válidas, se debe asegurar que se está trabajando en la banda de frecuencia correcta, y ésta a su vez está definida por la tangente de pérdidas del material.

**Ejemplo 70.** Cálculo de la frecuencia crítica para que un material se comporte como buen dieléctrico.

Calcule la frecuencia en la cual el aire ( $\sigma \cong 10^{-5}$ ) se comporta como un buen dieléctrico.

**Solución:**

La permitividad y permeabilidad del aire son aproximadamente las mismas del vacío.

Por lo tanto, para que la tangente de pérdidas sea despreciable es necesario que:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.1$$

Despejando la frecuencia:

$$f > \frac{\sigma}{0.1 \times 2\pi \times \epsilon_0}$$

En este caso:

$$f > \frac{10^{-5}}{0.1 \times 2\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}$$

$$f > 1.8\text{MHz} \cong 2\text{MHz}$$

Es decir que para frecuencias superiores a 2MHz, el aire se comporta como un buen dieléctrico y son perfectamente válidas las ecuaciones aproximadas.

## Ondas en buenos conductores

En un buen conductor la tangente de pérdidas es muy alta ( $>10$ ), en estas condiciones, el ángulo de pérdidas se aproxima a  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\sigma \gg \omega\epsilon \Rightarrow \delta \rightarrow 90^\circ$$

Para el agua de mar, los valores de profundidad de penetración y tangente delta medidos a 10MHz son, respectivamente,:

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 99.9 \quad \rho = \frac{-1}{\alpha} = 0.008 \text{ m}$$

Cuando se calcula el ángulo de pérdidas se obtiene:

$$\delta = 89.4^{\circ}$$

La constante  $\gamma$  en función de la tangente de pérdidas se expresa como:

$$|\gamma| = \omega \sqrt{\mu\epsilon(1 + \tan^2 \delta)^{\frac{1}{2}}}$$

Como la tangente de pérdidas no es para nada despreciable frente al 1 de la ecuación, la constante de propagación es aproximadamente:

$$|\gamma| \cong \omega \sqrt{\mu\epsilon \times \frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

Reduciendo la expresión:

$$|\gamma| \cong \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

El ángulo de la constante de propagación tiene a  $45^{\circ}$  por lo tanto:

$$\text{En estas condiciones } \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = \text{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones de propagación en medios disipativos se tiene que:

$$\alpha = |\gamma| \text{Sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\alpha \cong \sqrt{\omega\mu\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando:

$$\alpha \cong \sqrt{2\pi f\mu\sigma \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\pi\sigma\mu f}$$

En la mayoría de los buenos conductores:  $\mu = \mu_0$

Por lo tanto, la constante de atenuación queda:

$$\alpha = \sqrt{\pi\sigma\mu_0 f} = k\sqrt{f}$$

Como el ángulo de la constante de propagación es de  $45^{\circ}$ , la constante de fase es igual a la constante de atenuación:

$$\beta = \alpha$$

## Efecto superficial

Dado que en todos los medios disipativos, la profundidad de penetración se calcula como el inverso de la constante de atenuación, a lo cual no son ajenos los buenos conductores, en estos la profundidad de penetración queda definida por:

$$\delta_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma\mu_0 f}}$$

La profundidad de penetración es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de frecuencia de la señal aplicada y de la conductividad del medio.

A mayor frecuencia, menor penetración en el conductor, por lo que su resistencia eléctrica aparente aumenta. (La corriente se distribuye a través de un área menor).

Este fenómeno se le conoce como efecto piel o superficial, y ocasiona que la resistencia AC de un conductor sea mayor que la resistencia DC.

**Ejemplo 71.** Profundidad de penetración en un conductor de cobre a diferentes frecuencias.

Calcule la profundidad de penetración en cobre de una señal armónica de a) 60Hz, b) 1kHz, c) 1MHz.

**Solución:**

Para el cobre se tienen los parámetros:

$$\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m} \quad \mu_r \cong 1$$

De donde resulta: 
$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}} \text{ m}$$

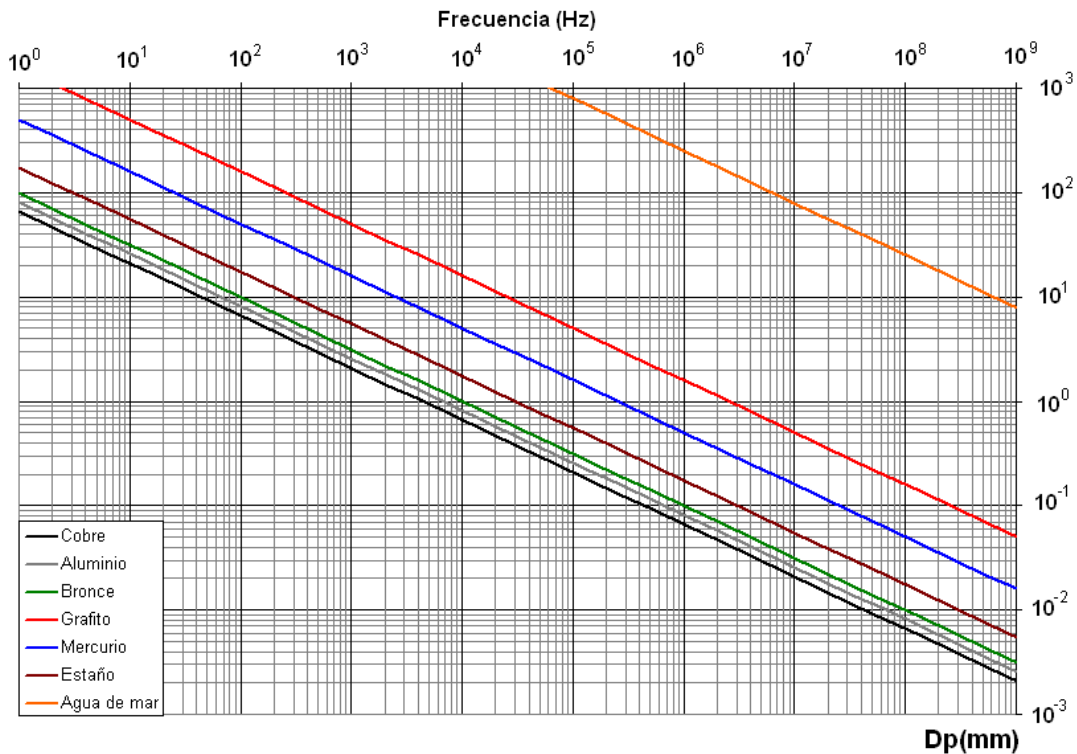
Para una frecuencia de 60Hz: 
$$\delta = \frac{0.0661}{\sqrt{60}} = 8.53 \text{ mm}$$

Para una frecuencia de 1kHz: 
$$\delta = \frac{0.0661}{\sqrt{1000}} = 2.1 \text{ mm}$$

Para una frecuencia de 1MHz: 
$$\delta = \frac{0.0661}{\sqrt{10^6}} = 66 \text{ } \mu\text{m}$$

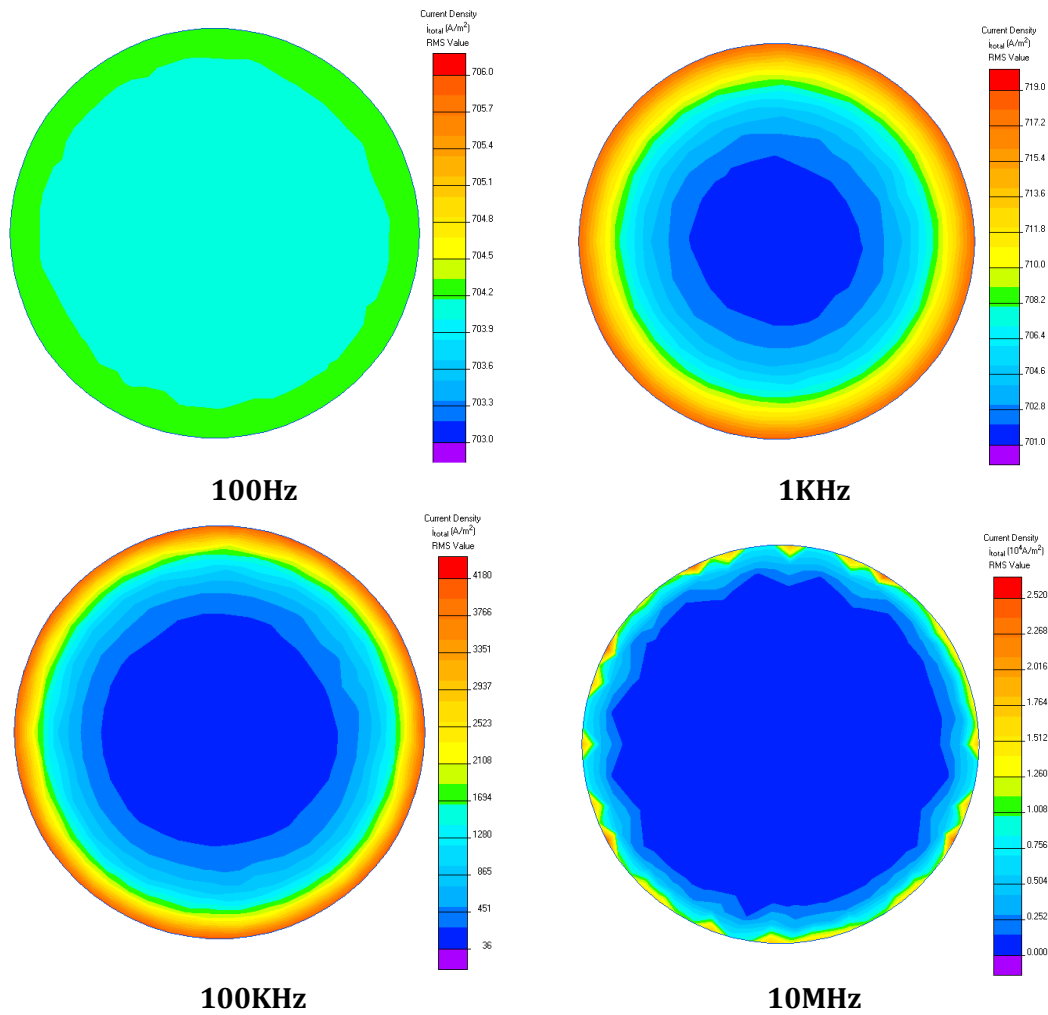
En la figura 86, se muestran las curvas de profundidad de penetración en diversas frecuencias para diferentes materiales conductores de uso común en electrónica.

Como se aprecia, a medida que la conductividad del material disminuye, la profundidad de penetración aumenta. En el agua de mar, la profundidad de penetración a 100KHz es de 80cm., mientras en el cobre, a la misma frecuencia, es de solo 0.21mm.



**Figura 86.** Profundidad de penetración en diferentes medios conductores a diferentes frecuencias

En la figura 87, se muestran las simulaciones por el método de los elementos finitos para la distribución de corrientes a través del área transversal de un conductor cilíndrico de cobre a frecuencias de 100Hz, 1KHz, 100KHz y 10MHz.



**Figura 87.** Distribución de corriente en la sección de un conductor cilíndrico de cobre a diferentes frecuencias. Efecto superficial

Como se puede apreciar claramente, la densidad de corriente decae a medida que se penetra en el conductor. El modelo matemático de la penetración de la densidad de corriente obedece a la ecuación:

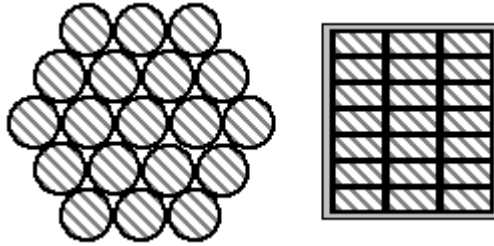
$$J = J_0 e^{-\alpha(r_0-r)}$$

**Ecuación 62.** Distribución de corriente en un conductor cilíndrico

En donde  $r_0$  es el radio externo del conductor.

La corriente a altas frecuencias tiende a fluir por la superficie externa del conductor, por lo que si se desea reducir el efecto superficial, conviene reemplazar el conductor cilíndrico sólido por un sistema de múltiples alambres paralelos trenzados o, en el caso de conductores

rectangulares, por un sistema de múltiples placas paralelas de dimensiones no mayores a la profundidad de penetración del conductor a la frecuencia de operación, como se muestra en la figura 88.



**Figura 88.** Conductores usados para reducir las pérdidas por efecto superficial

## Efecto piel y resistencia AC

Como consecuencia de la variación en la profundidad de penetración de la corriente con respecto a la frecuencia de la señal aplicada, la resistencia eléctrica del conductor varía.

A medida que la frecuencia aumenta, la profundidad de penetración de la señal disminuye, (figura 86), disminuyendo también el área efectiva usada para la transmisión de señal; sin embargo, el incremento en la resistencia eléctrica no depende únicamente de la profundidad de penetración, sino también de su relación con la geometría del conductor.

Una alternativa a la solución analítica del problema de la resistencia AC es la solución numérica mediante elementos finitos. Como se muestra en la figura 87, se puede obtener la densidad de corriente a través del MEF e integrarla para hallar la corriente total; con la corriente calculada y conocido el valor del voltaje es fácil deducir el valor de la resistencia.

Un método alternativo sencillo para la solución analítica puede ser encontrar la corriente para frecuencia cero y la corriente para una frecuencia cualquiera, en estas condiciones, la relación de corrientes debe ser inversa a la relación de resistencias. Dado que la resistencia a frecuencia cero se puede deducir fácilmente a partir de la geometría del conductor y de su conductividad, se puede entonces calcular la resistencia AC a cualquier frecuencia.

Para conductores cilíndricos, la densidad de corriente AC queda definida por la ecuación 62, cuando se integra sobre el área transversal del conductor, la corriente total queda:

$$I_{AC} = \int_S J \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} J_0 e^{-\alpha(r_0-r)} r dr d\varphi$$

Cuando se evalúa la integral el resultado es:

$$I_{AC} = \frac{2\pi J_0}{\alpha^2} \left[ (\alpha r_0 - 1) + e^{-\alpha r_0} \right]$$

A frecuencia cero, la constante  $\alpha$  es cero, por lo que la densidad de corriente es de la forma:

$$J = J_0$$

En estas condiciones, la corriente total es simplemente el producto de la densidad de corriente por la sección transversal.

$$I_{DC} = \pi r_0^2 J_0$$

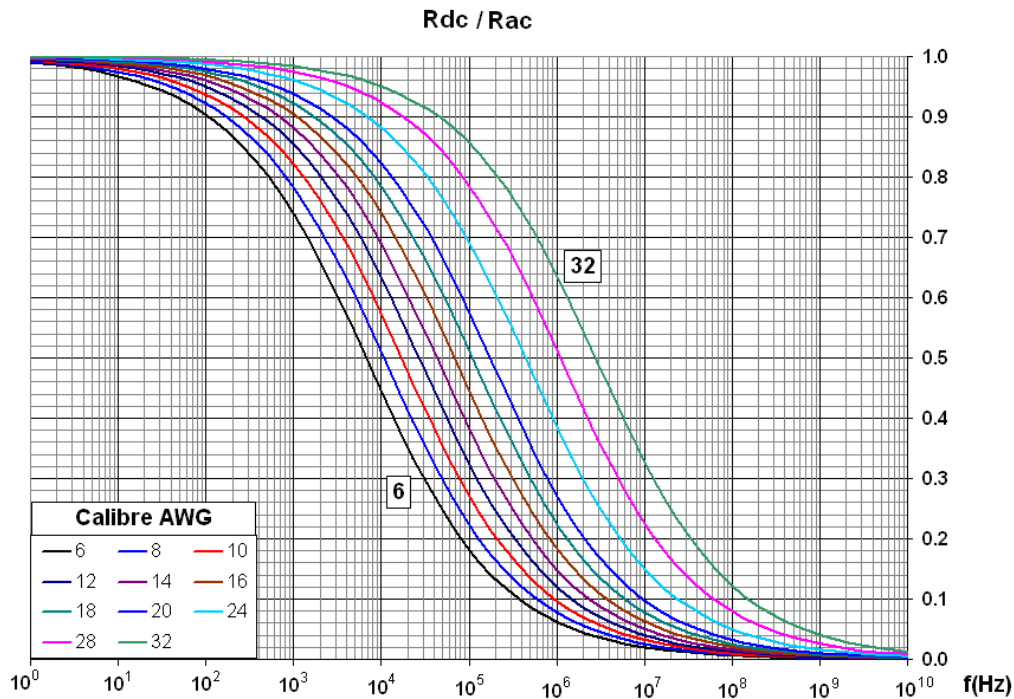
Dado que la relación de corrientes es inversa a la relación de resistencias, la relación entre resistencias AC y DC queda:

$$\frac{R_{DC}}{R_{AC}} = \frac{I_{AC}}{I_{DC}} = \frac{2}{(\alpha r_0)^2} \left[ (\alpha r_0 - 1) + e^{-\alpha r_0} \right]$$

**Ecuación 63.** Relación entre la resistencia DC y AC de un conductor cilíndrico

Esta relación es una función de  $\alpha$  y de  $r_0$ , diferente para cada material a distintas frecuencias como se muestra en la figura 86.

Para calibres AWG de conductor diferentes, se tendrán diferentes relaciones de resistencia AC y DC. En la figura 89, se muestran los cocientes entre resistencias DC y AC para diferentes calibres AWG de conductores cilíndricos de cobre en un amplio rango de frecuencias.



**Figura 89.** Relaciones de resistencia DC y AC para conductores cilíndricos en cobre de diferentes calibres AWG, desde calibre 6 hasta calibre 32

**Ejemplo 72.** Cálculo de la resistencia AC de un conductor de aluminio a diferentes frecuencias.

Calcule la resistencia AC de un alambre de aluminio de 5cm de longitud y 1mm. de diámetro a una frecuencia de a) 1kHz, b) 100kHz, c) 10MHz.

**Solución:**

Se calcula la resistencia DC de acuerdo con los siguientes parámetros:

$$\sigma = 3.8 \times 10^7 \text{ S/m} \quad r_0 = 0.5 \text{ mm} \quad l = 0.05 \text{ m}$$

De donde resulta:

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{0.05 \text{ m}}{(3.8 \times 10^7 \text{ S/m}) \pi (0.5 \times 10^{-3})^2} = 1.675 \text{ m}\Omega$$

De la figura 86 se obtiene la profundidad de penetración de la señal en el aluminio para las diferentes frecuencias:

Para una frecuencia de 1kHz:  $\alpha r_0 = (4 \times 10^2 \text{ m}^{-1})(0.5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 0.2$

Se utiliza la ecuación 63 para calcular la relación  $R_{DC}$  y  $R_{AC}$ .

Para 1kHz:

$$\frac{R_{DC}}{R_{AC}} = \frac{I_{AC}}{I_{DC}} = \frac{2}{(0.2)^2} [(0.2 - 1) + e^{-0.2}] = 0.936$$

De donde se deduce que:

$$R_{AC} = \frac{R_{DC}}{0.936} = 1.789 \text{ m}\Omega$$

Los valores para las otras frecuencias se encuentran en la tabla.

Frecuencia	$\delta$	$\alpha$	$\alpha r_0$	$R_{AC}$
1kHz	2.5mm	$4 \times 10^2 \text{ m}^{-1}$	0.2	1.789mΩ
100kHz	0.26mm	$3.85 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$	1.93	2.902mΩ
10MHz	0.026mm	$3.85 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$	19.3	17.047mΩ

**Ejemplo 73.** Cálculo de la resistencia AC de un conductor de cobre.

Calcule la resistencia AC de un alambre de cobre calibre 20AWG de 5cm de longitud a una frecuencia de a) 1kHz, b) 100kHz, c) 10MHz.

**Solución:**

Se calcula la resistencia DC de acuerdo con los siguientes parámetros:

$$\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m} \quad r_0 = 0.406 \text{ mm} \quad l = 0.05 \text{ m}$$

De donde resulta:

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{0.05 \text{ m}}{\left(5.8 \times 10^7 \text{ S/m}\right) \pi \left(0.406 \times 10^{-3}\right)^2} = 1.665 \text{ m}\Omega$$

De la figura 89, se obtiene la relación de resistencias AC y DC para las diferentes frecuencias y con ella se puede hacer el cálculo de la resistencia AC:

Los valores de resistencia AC se encuentran en la tabla.

Frecuencia	$R_{DC}/R_{AC}$	$R_{AC}$
1kHz	0.94	1.771 mΩ
100kHz	0.57	2.921 mΩ
10MHz	0.1	16.65 mΩ

## Parámetros de propagación en medios abiertos

Las constantes de propagación, atenuación y fase, así como la impedancia intrínseca de un medio, reciben el nombre de parámetros de propagación. En la tabla 12, se muestra un resumen de los parámetros de propagación en medios abiertos según la clasificación basada en la tangente de pérdidas.

**Tabla 12.** Parámetros de propagación en medios abiertos

Medio	No disipativo	Dieléctrico con bajas pérdidas	Dieléctrico con pérdidas	Buen conductor
$\gamma$	$j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$	$\sqrt{j\omega\sigma\mu_0}$
$\alpha$	0	$\frac{\sigma\eta}{2}$	$Re(\gamma)$	$\sqrt{\pi f\sigma\mu_0}$
$\beta$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$Im(\gamma)$	$j\sqrt{\pi f\sigma\mu_0}$
$\eta$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}}$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad f_v = \frac{v_p}{C_o} \quad n = \frac{1}{f_v}$$

Velocidad de fase, longitud de onda, factor de velocidad e índice de refracción.

**Ejemplo 74.** Cálculo de los parámetros de propagación en un medio abierto.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-3} \frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 8 \quad \mu_r = 1$$

Obtenga los parámetros de propagación para una señal de 100MHz.

**Solución:**

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$\text{Tan}(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-3} Sm/m}{2\pi \times 10^8 rad/seg \times 8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}$$

Simplificando:

$$\text{Tan}(\delta) = 0.01125$$

Es una tangente de pérdidas inferior a 0.1, por lo cual, se puede caracterizar el medio como un dieléctrico con bajas pérdidas, por lo tanto:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j2\pi \times 10^8 rad/seg \times \sqrt{4\pi \times 10^{-7} H/m \times 8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}$$

$$\gamma = j \frac{4\pi}{3} \sqrt{2}$$

$$\beta = \frac{4\pi}{3} \sqrt{2} rad/m$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} H/m}{8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}} = 133.3\Omega$$

La constante de atenuación:

$$\alpha = \frac{\sigma\eta}{2} = \frac{10^{-3} Sm/m \times 133.3\Omega}{2} = 66.6 \times 10^{-3} Np/m$$

La velocidad de fase:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^8 \text{ rad/seg}}{\frac{4\pi}{3} \sqrt{2} \text{ rad/m}} = 1060000 \text{ km/s}$$

La longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi \text{ rad}}{\frac{4\pi}{3} \sqrt{2} \text{ rad/m}} = 2.12 \text{ m}$$

El factor de velocidad

$$f_v = \frac{v_p}{c_o} = \frac{106 \times 10^6 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 0.354$$

Finalmente el índice de refracción:

$$n = \frac{1}{f_v} = \frac{1}{0.354} = 2.83$$

## El espectro electromagnético y las bandas de referencia

El conjunto de todas las posibles ondas electromagnéticas que pueden generarse, recibe el nombre de espectro electromagnético. En principio, el espectro electromagnético parece no tener fin, ya que cualquier fuente puede generar cualquier frecuencia si es adecuadamente excitada en términos electromagnéticos; sin embargo, la continuidad del espectro electromagnético suponía una contradicción con las leyes fundamentales de la física, en particular con la ley de conservación de la energía y la masa, lo que llevó a cuantizar el espectro electromagnético a través de la llamada "Teoría de la radiación de cuerpo negro", cuyo estudio escapa al alcance del presente texto.

En la figura 90, se muestran las frecuencias y longitudes de onda de las aplicaciones de uso común en Electromedicina y Electrónica en general.

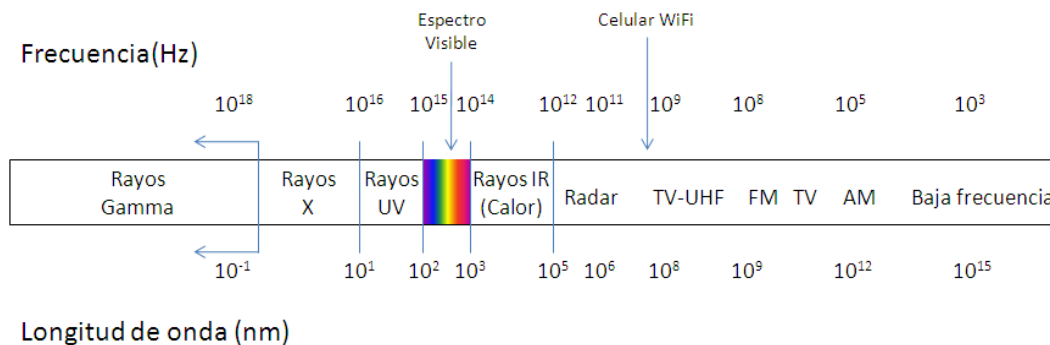


Figura 90. Espectro electromagnético de las aplicaciones más comunes

El espectro en realidad no se divide por frecuencias exactas, sino por regiones o zonas denominadas “Bandas”. Para determinar la frecuencia de referencia de una banda específica, se toma la frecuencia superior de la banda y se hace un promedio geométrico con la frecuencia inferior de la misma.

$$f_0 = \sqrt{f_{sup} \times f_{inf}}$$

El llamado espectro visible, corresponde a las longitudes de onda que pueden percibir los ojos en forma de colores, sus longitudes de onda van desde los 380nm para el violeta, hasta 750nm para el rojo. El valor de referencia para la banda, ubicado en el centro geométrico de la escala visible es de 530nm.

Para efectos de normalización, la Unión Internacional de Telecomunicaciones, UIT,<sup>23</sup> ha dividido el espectro EM en bandas de aceptación mundial, las cuales se nombran por sus siglas en inglés, según se muestra en la tabla 13.

**Tabla 13.** Bandas de frecuencia estandarizadas según ITU

Sigla	Significado
ELF	Extra Low Frequency
SLF	Super Low Frequency
ULF	Ultra Low Frequency
VLF	Very Low Frequency
LF	Low Frequency
MF	Medium Frequency
HF	High Frequency
VHF	Very High Frequency
UHF	Ultra High Frequency
SHF	Super High Frequency
EHF	Extra High Frequency

Las bandas de referencia y sus principales aplicaciones se muestran en la tabla 14. Dependiendo de la aplicación a desarrollar, se debe ubicar la banda de referencia y buscar las frecuencias disponibles dentro de dicha banda para hacer el respectivo desarrollo.

<sup>23</sup> ITU, International Telecommunications Union, por siglas en inglés.

**Tabla 14.** Principales aplicaciones en las bandas definidas por UIT

Sigla	Frecuencia (Hz)	$\lambda$ (m)	Aplicaciones
ELF	3-30	$10^8$ - $10^7$	Comunicación con submarinos
SLF	30-300	$10^7$ - $10^6$	
ULF	300-3k	$10^6$ - $10^5$	Minería
VLF	3k-30k	$10^5$ - $10^4$	Radio de baja frecuencia
LF	30k-300k	$10^4$ - $10^3$	Navegación aérea y marítima
MF	300k-3M	$10^3$ - $10^2$	Radiodifusión AM – Radio aficionados
HF	3M-30M	$10^2$ - $10^1$	Radios de onda corta – Radio aficionados – Banda civil
VHF	30M-300M	$10^1$ - $10^0$	Radiodifusión FM – TV – Satélites
UHF	300M-3G	$10^0$ - $10^{-1}$	TV-UHF – Telefonía móvil – Wifi.
SHF	3G-30G	$10^{-1}$ - $10^{-2}$	TV Satelital – Radio enlaces - Radar
EHF	30G-300G	$10^{-2}$ - $10^{-3}$	Radio astronomía

En cada país existe legislación particular sobre cuáles bandas se pueden usar de forma libre y cuáles requieren permisos especiales en términos de seguridad aérea o terrestre o comunicaciones militares.

En Colombia, el Ministerio de Comunicaciones, a través de la Resolución 689 de 2004, atribuyó unas bandas de frecuencias para libre utilización dentro del territorio nacional.

El artículo 5º de la norma atribuyó las siguientes bandas de frecuencias para la operación de dichos sistemas inalámbricos de banda ancha y baja potencia.

**UHF:** Banda de 902 a 928 MHz - Banda de 2.4 a 2.48 GHz

**SHF:** Banda de 5.15 a 5.25GHz - Banda de 5.25 a 5.35 GHz - Banda de 5.47 a 5.725 GHz - Banda de 5.725 a 5.85 GHz

## Potencia eléctrica transmitida a través de ondas electromagnéticas

### El vector de Poynting

Una onda electromagnética se forma a partir de un campo eléctrico variable armónicamente y un campo magnético perpendicular a él, los cuales se propagan en una dirección definida.

Cuando se tiene una onda plana que se propaga en dirección X y en la cual el campo eléctrico se encuentra en dirección Z, el campo magnético aparece en dirección Y, según se deduce del ejemplo 68.

$$\vec{E}(x,t) = E_{xo} e^{-\alpha x} \text{Cos}[\omega t - \beta x] \vec{a}_z$$

$$\vec{H}(x,t) = \frac{E_{xo}}{|\eta|} e^{-\alpha x} \text{Cos}[\omega t - \beta x - \theta_\eta] \vec{a}_y$$

Al hacer el producto vectorial de los vectores de campo eléctrico y magnético se obtiene un vector dado por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{E_{xo}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha x} \text{Cos}[\omega t - \beta x] \text{Cos}[\omega t - \beta x - \theta_\eta] \vec{a}_x$$

En el análisis dimensional se obtiene que el producto del campo magnético por el campo eléctrico es equivalente a:

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{E}||\mathbf{H}| = \frac{\text{Voltios}}{m} \times \frac{\text{Amperios}}{m} = \frac{\text{Watts}}{m^2}$$

Es decir, el vector  $\mathbf{P}$  representa la potencia por unidad de área que transporta la onda electromagnética.

Este vector se llama de Poynting<sup>24</sup> y apunta en dirección contraria a la dirección de propagación de la onda, por lo que si se desea obtener la energía total que transporta una onda basta con integrar el negativo del vector de Poynting sobre una superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

$$W_e = -\int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\vec{S}$$

Para el cálculo de la potencia media transmitida por la onda electromagnética, se hace un promedio del vector de Poynting durante un periodo de tiempo obteniendo como resultado:

$$\bar{\mathbf{P}} = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_{xo}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha x} \text{Cos}[\omega t - \beta x] \text{Cos}[\omega t - \beta x - \theta_\eta] dt$$

$$\bar{\mathbf{P}} = -\frac{E_{xo}^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha x} \text{Cos} \theta_\eta$$

Este vector conocido como de Poynting promedio da el promedio de la potencia por unidad de área transmitida por la onda electromagnética en la dirección de propagación de la misma.

<sup>24</sup> En honor a su descubridor John Henry Poynting, físico inglés, quien hizo su principal aporte a la ciencia en la aplicación de la ley de conservación de energía al flujo de potencia a través de ondas electromagnéticas, llamado Teorema de Poynting.

Como se puede observar, la potencia decrece a una tasa igual al doble de la tasa de decrecimiento del campo eléctrico y magnético, lo cual hace ineficiente la transmisión de potencia a través de ondas electromagnéticas cuando la tangente de pérdidas del medio es significativa.

**Ejemplo 75.** Potencia transmitida por una onda en un medio abierto.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-1} \frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 18 \quad \mu_r = 1$$

Calcule la potencia que transmite en este medio una señal de 100MHz con una amplitud de campo eléctrico máxima de 120V/m. Calcule la profundidad de penetración de la señal.

**Solución:**

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$\text{Tan}(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-1} Sm/m}{2\pi \times 10^8 rad/seg \times 18 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}$$

Simplificando:

$$\text{Tan}(\delta) = 1$$

Es una tangente de pérdidas grande, pero no suficiente para considerar el medio como un buen conductor ( $>10$ ), por lo cual, se puede caracterizar el medio como un dieléctrico con pérdidas, por lo tanto:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

Reemplazando valores:

$$\eta = \sqrt{\frac{j2\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{0.1 + j2\pi \times 10^8 \times 18 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}}$$

Simplificando:

$$\eta = \sqrt{\frac{j80\pi^2}{0.1 + j0.1}} = (69 + j29)\Omega$$

En notación polar:

$$\eta = 74.7\langle 22.5^\circ \rangle \Omega$$

La potencia inicial transmitida al medio es ( $x=0$ ):

$$P_0 = \frac{|E_{x0}^2|}{2|\eta|} \cos\theta_\eta$$

Reemplazando:

$$P_0 = \frac{|120V/m|^2}{2|74.7|\Omega} \cos(22.5^\circ)$$

Resolviendo:

$$P_0 = 89 \text{ W/m}^2$$

## Potencia en valores RMS

Debido a que la diferencia de potencial, en los casos en que la señal de alimentación es alterna, tiende a expresarse en valores RMS,<sup>25</sup> la potencia transmitida por una señal electromagnética senoidal tiende a ser expresada de la misma forma.

El valor RMS de una señal periódica viene expresado por:

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$$

En forma general, el valor RMS de una señal periódica es igual a una constante multiplicada por su valor máximo; el valor de la constante depende del factor de forma de la señal considerada. Para el caso de una señal senoidal:

$$x(t) = X_p \cos(\omega t)$$

El valor RMS es:

$$X_{RMS} = \frac{X_p}{\sqrt{2}}$$

Cuando se expresa la magnitud del campo eléctrico en valores RMS el campo eléctrico equivalente es:

$$E_{xo\_RMS} = \frac{E_{x0}}{\sqrt{2}}$$

Si se expresa el vector de Poynting en valores RMS la ecuación equivalente es:

$$P(x) = \frac{|E_{x0\_RMS}^2|}{|\eta|} e^{-2\alpha x} \cos\theta_\eta$$

<sup>25</sup> RMS, son las siglas de Root Mean Square o su equivalente en español Raíz Cuadrada Media o valor RCM.

## Pérdidas por propagación en un medio disipativo

Debido a que a medida que la onda EM penetra en un medio sufre una pérdida de potencia por efecto Joule, resulta importante definir qué porcentaje de la potencia inicial se conserva al cabo de haber recorrido de una determinada distancia.

La potencia que se conserva viene definida por la magnitud del vector de Poynting, por lo tanto, la potencia que se ha cedido al medio en forma de calor por efecto Joule es equivalente a la diferencia entre la potencia original y la potencia que transporta la onda en un punto x.

$$Pérdidas = P_0 - P(x)$$

Estas pérdidas, sin embargo, no acostumbran darse en Watts, sino en porcentaje de la potencia inicial con lo que el porcentaje de pérdidas de un medio específico queda definido por:

$$\%Pérdidas = \frac{P_0 - P(x)}{P_0}$$

En términos de la constante de atenuación:

$$\%Pérdidas = (1 - e^{-2\alpha x}) \times 100\%$$

**Ejemplo 76.** Pérdidas por unidad de longitud en un medio disipativo.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-3} \frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 1 \quad \mu_r = 1$$

Calcule las pérdidas por unidad de longitud en este medio para una señal de 300MHz. Si la señal original tiene una amplitud de campo eléctrico de  $120V_{RMS}/m$ . Calcule las pérdidas en Watts cuando la señal ha recorrido 10m en el medio.

**Solución:**

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$\tan(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-3} Sm/m}{2\pi \times 3 \times 10^8 rad/seg \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m}$$

Simplificando:

$$\tan(\delta) = 0.06$$

El medio es un dieléctrico de bajas pérdidas:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi\Omega$$

$$\alpha = \frac{\sigma\eta}{2} = \frac{120\pi \times 10^{-3}}{2} = 0.1885 \text{ Np/m}$$

Como se piden las pérdidas por unidad de longitud se hace  $x=1\text{m}$ :

$$\%Pérdidas = 1 - e^{-2\alpha x}$$

$$\%Pérdidas = 1 - e^{-2\alpha} = 31.4\%$$

Es decir que en este medio se pierde casi un tercio de la potencia por cada metro de recorrido.

Si se hace un recorrido de 10 metros:

$$\%Pérdidas = 1 - e^{-20\alpha} = 97.7\%$$

La potencia inicial es:

$$P_0 = \frac{|120V_{RMS}/m|^2}{|120\pi|\Omega} = 38.19 \text{ W/m}^2$$

Las pérdidas son por lo tanto:

$$Pérdidas = \frac{38.19W}{m^2} \times 0.977 = 37.3W/m^2$$

## Atenuación en decibeles

El concepto de atenuación es complementario al concepto de pérdidas, y se refiere al porcentaje de potencia que se conserva al recorrer una determinada distancia dentro de un medio disipativo.

La atenuación se expresa normalmente en porcentaje y guarda también relación con el vector de Poynting:

$$\%Atenuación = \frac{P(x)}{P_0}$$

Expresado en términos de la constante de atenuación:

$$\%Atenuación = e^{-2\alpha x}$$

No es muy común, sin embargo, dejar la atenuación en términos de la distancia, por lo que usualmente se toma una unidad de distancia y se expresa la atenuación por unidad de distancia:

$$\%Atenuación/m = e^{-2\alpha}$$

Es muy común, sin embargo, que la atenuación se exprese en escala logarítmica con base en la misma escala usada para la medición de potencia sonora, es decir en decibeles.

La potencia expresada en decibeles de una señal sonora viene dada por:

$$P_{dB} = 10 \text{Log}_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

Donde la potencia  $P_0$  se toma como una potencia base cuyo valor depende de la escala escogida.

Cuando esta escala se exporta al caso de las ondas EM se tiene:

$$\alpha_{dB} = 10 \text{Log}_{10} \left[ \frac{P(x)}{P_0} \right]$$

En términos de la constante de atenuación:

$$\alpha_{dB} = 10 \text{Log}_{10} [e^{-2\alpha x}]$$

Resolviendo:

$$\alpha_{dB} = -20 \alpha x \text{Log}_{10} [e]$$

Cuando se mide por unidad de longitud:

$$\alpha_{dB/m} = -8.68 \alpha$$

Donde la constante 8.68 proviene del logaritmo en base 10 del número de Euler multiplicado por 20.

**Ejemplo 77.** Atenuación en un medio disipativo.

Un medio abierto tiene las siguientes características electromagnéticas:

$$\sigma = 10^{-5} \frac{Sm}{m} \quad \epsilon_r = 1 \quad \mu_r = 1$$

Calcule la atenuación por unidad de longitud en este medio para una señal de 3GHz. ¿Qué distancia debe recorrer la señal para tener una atenuación superior a 3dB?

**Solución:**

Se calcula la tangente de pérdidas para discriminar el medio:

$$\text{Tan}(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-5} \text{Sm/m}}{2\pi \times 3 \times 10^9 \text{rad/seg} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F/m}}$$

Simplificando:

$$\text{Tan}(\delta) = 6 \times 10^{-5}$$

El medio es un dieléctrico de bajas pérdidas:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi\Omega$$

$$\alpha = \frac{\sigma\eta}{2} = \frac{120\pi \times 10^{-5}}{2} = 0.001885 \text{ Np/m}$$

La atenuación en decibeles queda:

$$\alpha_{dB/m} = -8.68 \alpha = -0.016 \text{ dB/m}$$

Equivalente a:

$$\alpha_{dB/m} = -16 \text{ dB/km}$$

Para tener una atenuación de -3dB, la señal debe recorrer una distancia de:

$$\alpha_{dB/m} x = -3\text{dB}$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{-3\text{dB}}{\alpha_{dB/m}}$$

Reemplazando:

$$x = \frac{-3\text{dB}}{-0.016\text{dB/m}} = 183.3\text{m}$$

## Ejercicios del capítulo

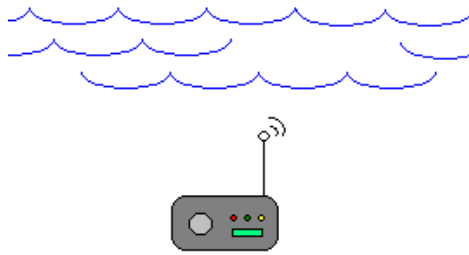
1. La tierra recibe en promedio una densidad de potencia solar de  $1300\text{W/m}^2$ , si se supone que esta potencia se radia desde el sol en una sola onda plana monocromática con incidencia normal, calcule la magnitud RMS del vector de campo eléctrico y del vector del campo magnético en la luz solar. Si se supone que la luz es amarilla ( $\lambda = 580\text{nm}$ ), calcule aproximadamente la longitud de onda de la señal que llega a la atmósfera.
2. Demuestre que en un vidrio transparente no magnético con índice de refracción  $n$ , la profundidad de penetración está determinada por:  $\delta_p = \frac{2n}{\sigma \eta_0}$ , donde  $\eta_0 = 120\pi\Omega$ . Si  $n=1.5$ , calcule la amplitud de campo eléctrico RMS y la amplitud de campo magnético que generan una densidad de potencia de  $100\text{W/m}^2$ .

*Índice de refracción es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en un medio particular.*

3. Cuál debe ser el mínimo espesor de una lámina de cristal transparente con índice de refracción de 1.8, para que un haz de luz violeta experimente un retraso de  $360^\circ$  al atravesar dicho cristal. La longitud de onda de referencia para un haz violeta en el vacío es de  $480\text{nm}$ .
4. Se toman mediciones de potencia de un laser rojo en línea de vista con el medidor a  $1\text{m}$  de distancia y se observa que la potencia recibida es de un  $98\%$  de la emitida. Despreciando el efecto de la dispersión, calcule la conductividad del aire en el entorno. ¿Qué potencia se recibiría en el mismo medio si la dispersión fuera del  $5\%$ ? ¿Si la dispersión fuera del  $10\%$ , cuál sería la máxima conductividad permitida si se requiere que la pérdida de potencia sea inferior a  $-2\text{dB}$ ?



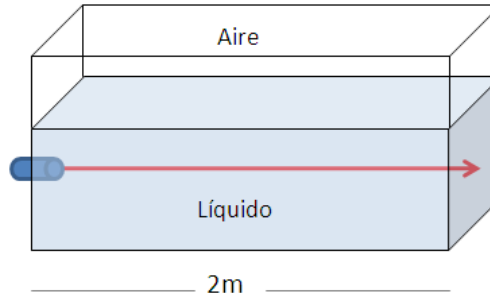
5. En un espacio abierto (llanura), el fabricante de un radio de  $2.4\text{GHz}$ , usado para vigilancia, garantiza un alcance de entre 30 y 50 millas. ¿Cuál es el valor mínimo y máximo de conductividad del aire entre los cuales se sostiene la garantía del fabricante? ¿Cuánto es la tangente de pérdidas y la pérdida de potencia en  $\text{dB/km}$  en dichos valores?
6. ¿Si se sumerge un celular dentro de un contenedor impermeable en agua de mar, hasta qué profundidad capta señal? ¿Si se sumerge un radio FM? ¿Si es un radio AM?, tome como frecuencias de referencia  $10\text{GHz}$  para la banda celular,  $100\text{MHz}$  para la banda de FM y  $1000\text{kHz}$  para el AM.



Calcule las pérdidas en dB/m para cada uno de los casos anteriormente contemplados.

7. Una onda electromagnética cuyo campo eléctrico viene dado por:  $\vec{E} = -\frac{V_0}{r} \vec{a}_r e^{-(\alpha+j\beta)z}$ . Siendo  $V_0 = 12V_{RMS} \text{Cosh}(\omega t)$ . Viaja a través de un medio no magnético, abierto, de permitividad relativa 4. Calcule la velocidad de propagación y la atenuación en dB/m suponiendo que el medio tiene una conductividad eléctrica de  $10^{-5} \text{Sm/m}$ .
8. Si una onda electromagnética plana incide en forma perpendicular sobre una placa de cobre de 80 $\mu\text{m}$  de espesor, cuál debe ser la frecuencia de la señal para que el retardo de fase al atravesar la placa sea exactamente de  $\frac{\pi}{4}$ . ¿Cuál es la profundidad de penetración a dicha frecuencia? ¿Cuánto es la atenuación en dB/ $\mu\text{m}$  en la placa de cobre? ¿Qué porcentaje de la potencia absorbida por la placa de cobre alcanza a salir al otro lado de ella?
9. Una corriente alterna senoidal que circula por un alambre, genera un campo magnético dado por:  $H = 30e^{j10^9 t} e^{j4x} [a_y + 3ja_z] \text{ mA/m}$  en presencia de un medio no magnético. Defina en qué dirección viaja la onda, cual es la velocidad de propagación, y la longitud de onda. Calcule la potencia media transportada por la señal. (Ayuda: recuerde que  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  y  $1 = e^{j0}$  )
10. ¿Cuál debe ser el valor RMS del campo eléctrico E y del campo magnético H, para una onda plana monocromática que se desplaza en el aire llevando una potencia media de 100mW/m<sup>2</sup>?. Desprecie la conductividad del aire.
11. Según el reglamento técnico de instalaciones eléctricas, la exposición a densidades de flujo magnético de valor RMS inferiores a 0.5 mT es segura. ¿Cuál debe ser la potencia máxima que debe transportar una señal celular (10<sup>9</sup>Hz) en el aire, para que el valor RMS del campo magnético asociado, cumpla con lo dispuesto por el Retie? ¿Cuál sería el valor del campo eléctrico asociado en valor RMS?
12. Una onda electromagnética plana de 100MHz se transporta por un medio disipativo perdiendo el 50% de su potencia por cada metro de recorrido, con un desfase de 5rad/m. Calcule la constante de atenuación, la constante de fase, la velocidad de propagación y las pérdidas del medio en dB/m.

13. Un rayo laser de 680nm y una potencia de 30mW/cm<sup>2</sup> (en aire) atraviesa un líquido no magnético a lo largo de una distancia de 2m. se evidencia un índice de refracción de 1.8 y una pérdida de potencia del 0.1%



Calcule: la impedancia intrínseca del medio, la amplitud RMS del campo eléctrico y magnético en el líquido, la atenuación en dB/km del medio líquido y la longitud de onda dentro del líquido.

14. Si una onda electromagnética plana de 1GHz (Celular) incide en forma perpendicular sobre una placa de cobre ¿Cuál debe ser el espesor de la placa para que la potencia absorbida se atenúe hasta el 1% de su valor antes de salir de ella? ¿Cuánto es la pérdida en dB/um en la placa? ¿Cuál es el retardo de fase al atravesar la placa?

### Respuestas a los ejercicios

1.  $|E| = 700 \text{ V/m}$      $|H| = 1.5 \text{ A/m}$      $\lambda = 580 \text{ nm}$
2.  $|E| = 129 \text{ V/m}$      $|H| = 773 \text{ mA/m}$
3.  $\lambda = 320 \text{ nm}$
4.  $\sigma = 53.6 \mu\text{S/m}$      $|P(x = 1\text{m})| = 93\%P_0$      $\sigma_{\text{max}} = 1.2 \text{ mS/m}$
5.  $66 \text{ nS/m} < \sigma < 110 \text{ nS/m}$      $495 \times 10^{-9} < \text{Tan}(\delta) < 825 \times 10^{-9}$      $0.1 < \alpha_{\text{dB/km}} < 0.18$
6. Celular 2.5mm    Radio FM 2.5cm    Radio AM 25cm
7.  $v_p = 150000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$      $\alpha_{\text{dB/km}} = -8.2$
8.  $f = 421 \text{ kHz}$      $\delta_p = 102 \mu\text{m}$      $\alpha_{\text{dB}} = -0.085 \frac{\text{dB}}{\mu\text{m}}$      $\%P = 0\%$
9. Dirección x     $v_p = 250000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$      $\lambda = \frac{\pi}{2} \text{ m}$      $P_0 = 894 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$
10.  $|E| = 6.13 \text{ V/m}$      $|H| = 16.3 \text{ mA/m}$
11.  $P_{\text{max}} = \frac{59.36 \text{ W}}{\text{mm}^2}$      $E = 149 \text{ kV/m}$
12.  $\alpha = 0.346$      $\beta = 5 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$      $\gamma = 5.01 \text{ m}^{-1}$      $v_p = 125.000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$      $\alpha_{\text{dB}} = -3 \text{ dB/m}$
13.  $\eta = 209.4 \Omega$      $E = 250.6 \text{ V}_{\text{RMS}}/\text{m}$      $H = 1.2 \frac{\text{A}_{\text{RMS}}}{\text{m}}$      $\alpha = -2.17 \text{ dB/km}$      $\lambda = 270 \text{ nm}$
14.  $x = 4.8 \mu\text{m}$      $\alpha = -4.15 \frac{\text{dB}}{\mu\text{m}}$      $\Delta\varphi = 129^\circ$

## Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para Ley de Inducción de Faraday y corriente de desplazamiento:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 442-459. ISBN 968-880-954-3.

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 236-246. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para ondas en medios abiertos, dieléctricos perfectos, disipativos y buenos conductores, así como para vector de Poynting:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 475-496. ISBN 968-880-954-3.

Para propagación en buenos conductores y efecto piel:

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 331-336. ISBN 978-607-15-0783-9.

