

# Capítulo 7

## Ondas en medios abiertos acotados

### Introducción

El caso tratado en el capítulo anterior, en el cual una onda se propaga libremente a través de un medio sin fronteras ni barreras, es apenas una primera aproximación a la forma cómo en realidad las ondas electromagnéticas se propagan en una condición real.

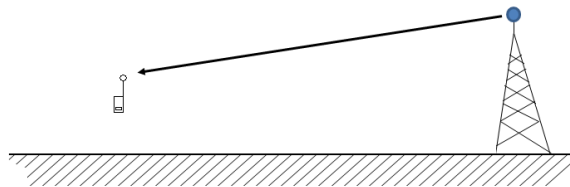
El mismo plano de tierra, sobre el que se ubican las antenas y otras fuentes de ondas electromagnéticas, constituye una superficie reflectante, en la cual, cuando incide una onda, se ve reflejada parte de su energía, mientras que otra parte es absorbida por la superficie.

En el presente capítulo, se tratan los principios básicos que definen la forma en que diferentes superficies reflejan las señales electromagnéticas e influyen en su propagación.

### Modos de propagación de ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas se propagan de diferente forma, dependiendo de la frecuencia, la energía de la señal y las propiedades electromagnéticas de los diferentes medios.

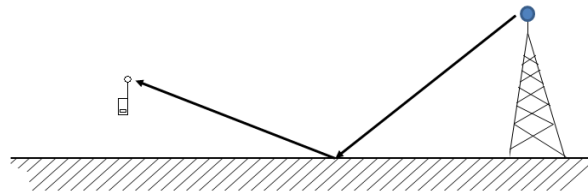
La propagación directa, se muestra en la figura 91, ocurre cuando existe una visual entre el emisor y el receptor, como en el caso de las antiguas antenas de TV. que debían orientarse hacia la ubicación de la antena repetidora, la cual a su vez mantenía un enlace visual con la antena que traía la señal desde la emisora. Este tipo de propagación recibe el nombre de propagación en línea de vista.



**Figura 91.** Propagación en línea de vista

Este modo de propagación es el más eficiente, ya que no existe pérdida de energía por reflexión.

El segundo modo de propagación, se ilustra en la figura 92, corresponde al hecho de que el plano de tierra actúa como una equipotencial, es decir una superficie reflectante.

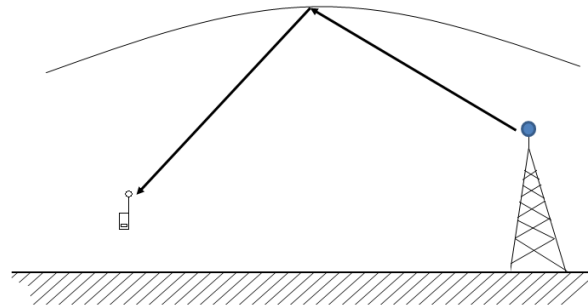


**Figura 92.** Propagación por reflexión en el plano de tierra

Este sistema de propagación se llama propagación por reflexión terrestre y es muy común en aplicaciones de radio frecuencia (RF).

Un tercer modo de propagación, comúnmente usado en radio difusión y por los radioaficionados, es la propagación por reflexión atmosférica, las diferentes capas de las atmósfera, debido a su diferente densidad y nivel de ionización, reflejan como superficies conductoras las señales en frecuencias medias y altas (MF-HF- VHF). Las ondas de frecuencias más altas, como UHF y superiores, ya no se reflejan, por lo que no se propagan por este tipo de reflexión.

La reflexión atmosférica facilita que las ondas alcancen receptores en grandes distancias, superando la curvatura de la tierra y la línea de vista, así se pueden sintonizar bajo ciertas condiciones atmosféricas, señales provenientes de Europa, Asia u Oceanía.

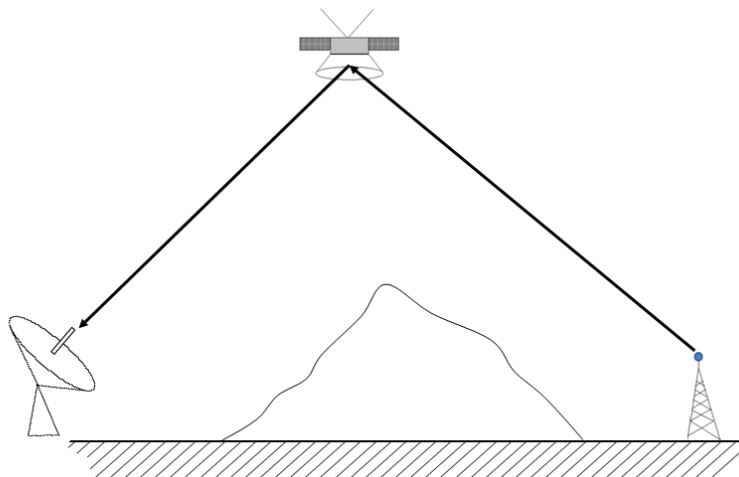


**Figura 93.** Propagación por reflexión atmosférica

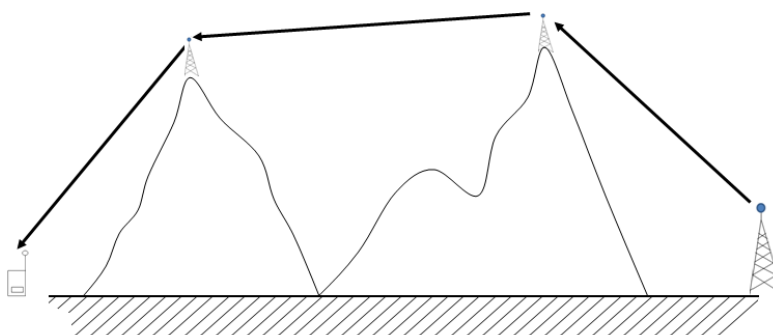
La reflexión atmosférica, sin embargo, presenta como inconveniente que la recepción óptima de las señales cambia de acuerdo con la hora del día y las condiciones atmosféricas, debido a que la atmósfera, por efecto del intercambio térmico, tiende a dilatarse o contraerse, lo que ocasiona cambio en las alturas de reflexión e incremento de la atenuación por tener diferentes distancias para llegar hasta el receptor.

Las tormentas solares y la aparición de manchas solares, que afectan la ionósfera terrestre, tienden a producir fallas en las comunicaciones por reflexión atmosférica, lo cual le resta confiabilidad al modo de propagación.

Para superar los inconvenientes de la reflexión atmosférica, en las bandas UHF y superiores, se usan otros modos de propagación, como es la instalación de múltiples sistemas repetidores en línea de vista, como en los enlaces de microondas o usando la retransmisión vía satélite, como se ilustra en las figuras 94 y 95.

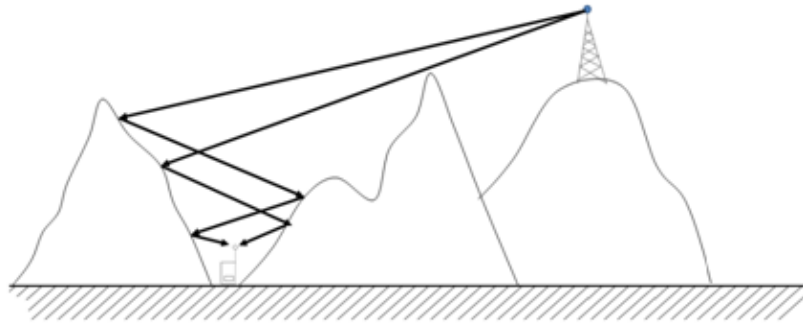


**Figura 94.** Propagación por retransmisión vía satélite



**Figura 95.** Propagación a través de enlaces de microondas

En sitios donde la topografía es agreste o existen montañas muy altas con valles profundos, las ondas electromagnéticas de cierta frecuencia pueden también propagarse por reflexión múltiple, según se muestra en la figura 96. En ambientes urbanos, las señales EM también se propagan por reflexión en las paredes de edificios, puentes túneles o estructuras propias del paisaje urbano. La única condición necesaria para este tipo de propagación es que la longitud de onda de la señal sea comparable a las dimensiones de la estructura reflectante o considerablemente inferior.



**Figura 96.** Propagación por reflexión múltiple

## Polarización de ondas EM

Las ondas electromagnéticas, consideradas hasta el momento, se caracterizan porque el campo eléctrico se encuentra dirigido en una sola dirección, bien sea Y o Z mientras la onda se desplaza en dirección X.

Esto, sin embargo, es el caso menos común, ya que las ondas EM se originan de forma natural por el estado de agitación de los dipolos propios de la estructura de la materia cuando son excitados por calor u otra forma de energía.

La forma en que se manifiestan las diferentes componentes del campo eléctrico y la relación que existe entre ellas se llama polarización de la onda y se pueden considerar varios casos.

El modo de polarización de una onda está caracterizado por la diferencia de fase y amplitud entre las componentes transversales de campo electromagnético que generan la onda electromagnética. La forma general del campo eléctrico de una onda que se desplaza en dirección X, se encuentra representada por la siguiente ecuación:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \left( E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z \right) e^{j(\omega t \pm \beta x)}$$

En el caso de que una de las componentes transversales se haga cero, se dice que es una onda plana.

Los campos en dirección Y y Z no siempre tienen la misma amplitud o fase espacio-temporal, lo cual lleva a diferentes formas de polarización.

## Polarización lineal

Se presenta cuando ambas componentes tienen diferente amplitud pero se encuentran en fase o en contrafase exacta, se genera entonces una suma o resta aritmética de las señales en cada punto del espacio, lo cual conduce a que el campo resultante siempre tenga la misma dirección pero que ésta no necesariamente coincida con los ejes Y o Z.

La dirección del plano de polarización dentro del plano YZ queda definida por la diferencia de magnitudes de las señales.

Por ejemplo, si se tienen dos componentes:

$$E_y(t) = 4\cos(\omega t) \quad E_z(t) = 3\cos(\omega t)$$

La figura resultante en el plano ZY corresponde a la mostrada en la figura 97.

La onda se desplaza en dirección X, pero el campo eléctrico vibra siempre dentro del mismo plano como se ve en la figura 98.

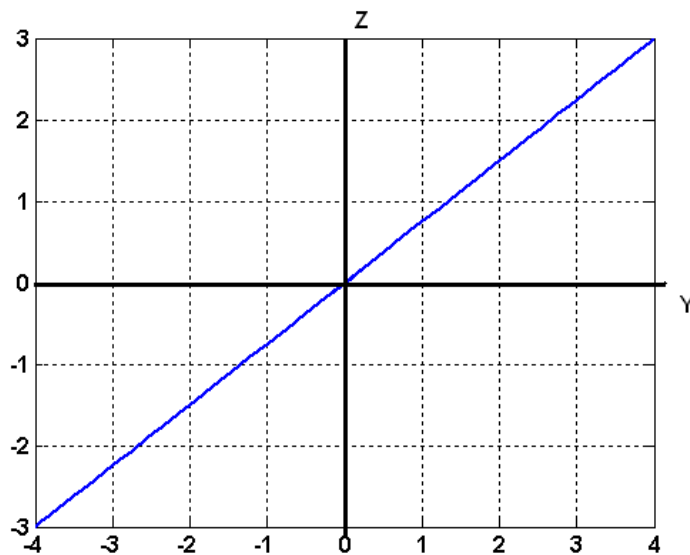


Figura 97. Polarización lineal

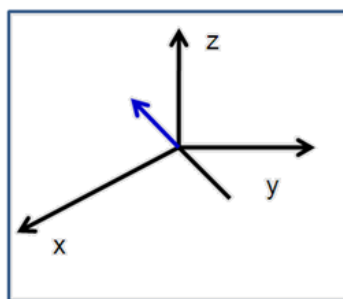


Figura 98. Desplazamiento de una onda polarizada linealmente

## Polarización circular

Cuando ambas componentes tienen igual amplitud y se encuentran desfasadas  $90^\circ$  ó  $270^\circ$  entre sí. En este caso, se genera una onda polarizada circularmente, la dirección de giro del vector queda definida por la diferencia de fase de las señales.

Por ejemplo, si se tienen dos componentes:

$$E_y(t) = \cos(\omega t) \quad E_z(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La figura resultante en el plano ZY corresponde a la mostrada en la figura 99.

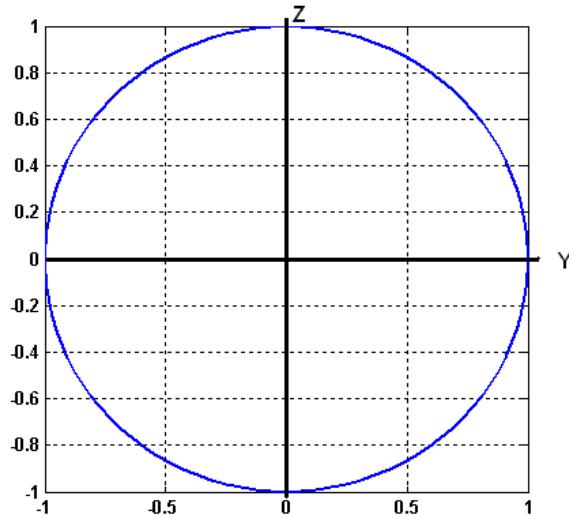


Figura 99. Polarización circular

La onda se desplaza en dirección X, pero el campo eléctrico vibra cambiando de plano, como se ve en la figura 100. La dirección del campo E forma una circunferencia a medida que se desplaza en dirección X.

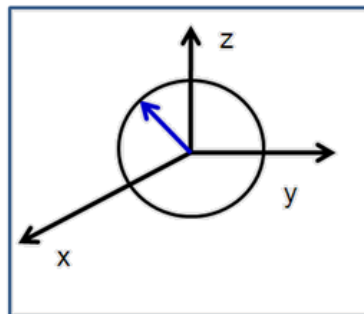


Figura 100. Desplazamiento de una onda polarizada circularmente

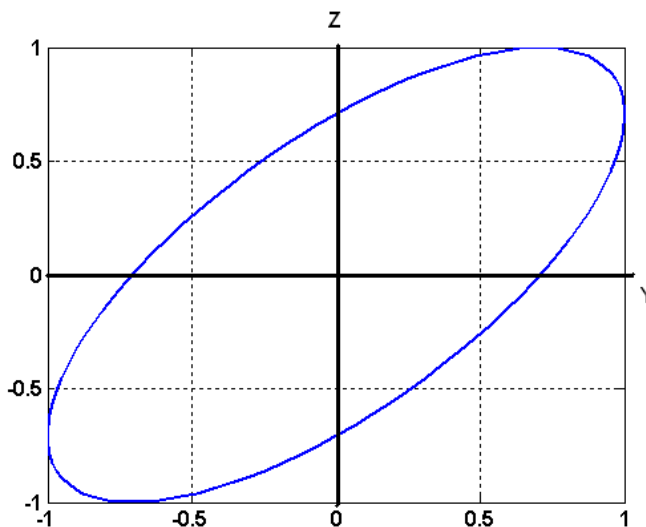
## Polarización elíptica

Se genera cuando ambas componentes tienen diferente amplitud y el ángulo de fase entre ellas no es  $0^\circ$  ni  $180^\circ$ ; en estos casos, se genera una onda polarizada en forma elíptica, el ángulo que forma el eje mayor de la elipse con el eje Z, así como la dirección de giro del vector queda definida por la diferencia de fase de las señales.

Por ejemplo, si se tienen dos componentes:

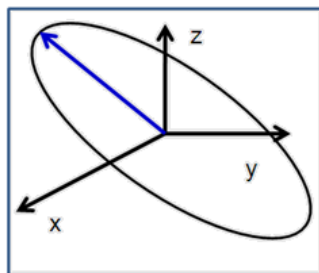
$$E_y(t) = \text{Cos}(\omega t) \quad E_z(t) = \text{Cos}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

La figura resultante en el plano ZY corresponde a la mostrada en la figura 101.



**Figura 101.** Polarización elíptica

La onda igual se desplaza en dirección X, pero el vector de campo eléctrico traza una elipse al desplazarse en dirección X, como se muestra en la figura 102.

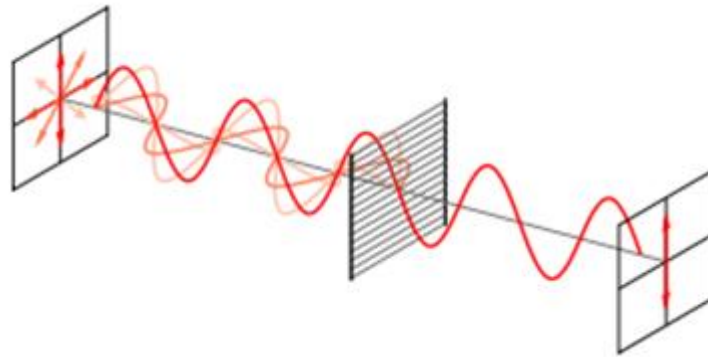


**Figura 102.** Desplazamiento de una onda polarizada elípticamente

Existen sustancias capaces de modificar la polarización de las ondas electromagnéticas que las atraviesan, bien sea porque poseen impedancias intrínsecas diferentes dependientes del

ángulo de incidencia de la onda o porque son sustancias anisotrópicas frente al campo eléctrico.<sup>26</sup>

A este tipo de sustancias se les llama polarizadores o sustancias “Polaroid” y permiten obtener ondas polarizadas linealmente, a partir de ondas polarizadas elíptica o circularmente, como se muestra en la figura 103.



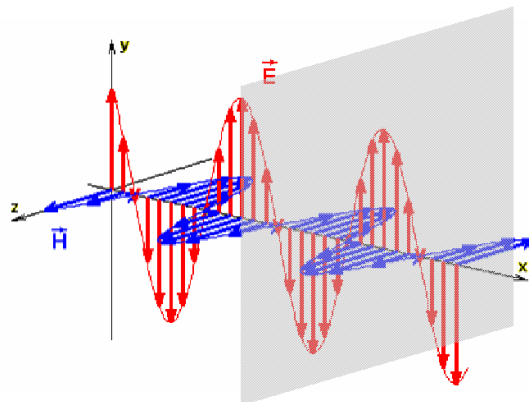
**Figura 103.** Polarización por absorción selectiva a través de un polarizador anisotrópico

## Incidencia sobre un plano normal

Cuando una onda electromagnética plana atraviesa perpendicularmente el plano que separa dos medios de diferente impedancia intrínseca, como se muestra en la figura 104, los campos eléctrico y magnético son tangenciales a la superficie de contacto, por lo que deben cumplir las condiciones de frontera para campos tangenciales:

$$H_{1T} - H_{2T} = K$$

$$E_{1T} = E_{2T}$$



**Figura 104.** Onda que atraviesa un plano normal de incidencia

<sup>26</sup> Sustancias anisotrópicas son aquellas cuyas propiedades físicas cambian dependiendo de la dirección en que se midan.

Cuando no existe una densidad lineal de corriente en la frontera, los campos magnéticos a ambos lados de la frontera deben ser iguales entre sí, al igual que los campos eléctricos, pero esto no es posible, dado que en este caso se llegaría a una contradicción inmediata, por cuanto el campo magnético es igual al campo eléctrico dividido por la impedancia intrínseca.

$$H_{z1} = H_{z2} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{y1}}{\eta_1} = \frac{E_{y2}}{\eta_2}$$

Por condiciones de frontera se sabe que  $E_{y1} = E_{y2}$

Así que la única manera de cumplir las condiciones de frontera simultáneamente es que:

$$\eta_1 = \eta_2$$

Lo cual se descarta de plano ya que se trata de dos medios diferentes.

Para solucionar esta contradicción, se supone la existencia de una onda reflejada que se suma con la onda incidente dando origen a una onda total, la cual cumple las condiciones de frontera.

La onda incidente se nota con un superíndice positivo, mientras la reflejada lo hace mediante un superíndice negativo.

$$\begin{aligned} E_{ys1} &= E_{y1}^+ + E_{y1}^- & H_{zs1} &= H_{z1}^+ + H_{z1}^- \\ E_{ys1} &= E_{ys2} & H_{zs1} &= H_{zs2} \end{aligned}$$

Los campos incidentes, eléctrico y magnético están relacionados por la impedancia intrínseca del medio, pero los campos reflejados tienen una dirección contraria a la de los campos incidentes, por lo que la relación entre ellos es el negativo de dicha impedancia:<sup>27</sup>

$$H_{z1}^+ = \frac{E_{y1}^+}{\eta_1} \quad H_{z1}^- = -\frac{E_{y1}^-}{\eta_1}$$

La onda electromagnética que atraviesa la frontera tiene la misma dirección de propagación de la onda incidente, dada la naturaleza tangencial de los campos eléctrico y magnético que la componen, por lo tanto se puede notar con un superíndice positivo.

<sup>27</sup> El signo negativo en el campo magnético reflejado obedece a que es el rotacional del campo eléctrico reflejado, y por ley de la mano derecha surge el signo negativo.

De esta manera, las condiciones de frontera quedan:

$$H_{zs1} = H_{zs2}^+ = \frac{E_{y1}^+}{\eta_1} - \frac{E_{y1}^-}{\eta_1}$$

$$\frac{E_{ys2}^+}{\eta_2} = \frac{E_{y1}^+}{\eta_1} - \frac{E_{y1}^-}{\eta_1}$$

Por otra parte, la suma de campos eléctricos en el primer medio debe ser igual al campo resultante en el segundo medio:

$$E_{y1}^+ + E_{y1}^- = E_{ys2}^+$$

Despejando en la primera ecuación:

$$E_{ys2}^+ = \frac{\eta_2}{\eta_1} (E_{y1}^+ - E_{y1}^-)$$

Reemplazando en la segunda se obtiene:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} (E_{y1}^+ - E_{y1}^-) = E_{y1}^+ + E_{y1}^-$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} E_{y1}^+ - E_{y1}^+ = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{y1}^- + E_{y1}^-$$

Sumando fraccionarios

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1} E_{y1}^+ = \frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_1} E_{y1}^-$$

De donde se obtiene:

$$E_{y1}^- = E_{y1}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Es decir, el campo eléctrico reflejado es proporcional al campo incidente y a la diferencia entre las impedancias intrínsecas de los medios.

## Coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión

### Coeficiente de reflexión

Se llama coeficiente de reflexión a la relación entre el campo incidente y el campo reflejado.

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

El coeficiente de reflexión es en principio un número complejo. El campo reflejado expresado como función del coeficiente de reflexión queda:

$$E_{y1}^- = \Gamma E_{y1}^+$$

De forma semejante se obtiene la onda de campo magnético reflejada:

$$H_{z1}^- = -\frac{E_{y1}^-}{\eta_1}$$

$$H_{z1}^- = -\frac{E_{y1}^+}{\eta_1} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -H_{z1}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$H_{z1}^- = -\Gamma H_{z1}^+$$

Al analizar la expresión obtenida para el coeficiente de reflexión, se encuentran claramente tres situaciones extremas:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

**Caso 1.** Que la impedancia del medio 2 sea mucho mayor que la del medio 1, haciendo que ésta sea despreciable.

$$\eta_2 \gg \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de reflexión tiene a 1 y la totalidad del campo incidente se refleja hacia el medio 1. El campo reflejado se encontrará en fase con el campo incidente.

**Caso 2.** Que la impedancia del medio 2 sea mucho menor que la del medio 1, siendo casi despreciable.

$$\eta_2 \ll \eta_1$$

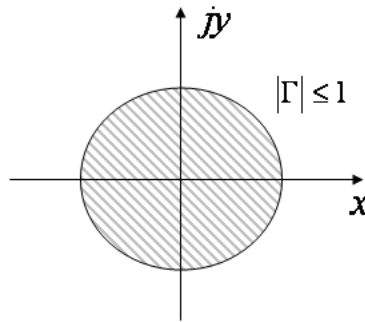
En este caso, el coeficiente de reflexión tiene a -1 y nuevamente la totalidad del campo incidente se refleja hacia el medio 1, pero el campo reflejado se encontraría en contrafase con el campo incidente.

**Caso 3.** Que la impedancia del medio 2 sea igual a la del medio 1.

$$\eta_2 = \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de reflexión se hace cero; no habría campo reflejado.

El análisis de los tres casos, lleva a concluir que en cualquiera de ellos, el coeficiente de reflexión tiene una magnitud siempre igual o menor a uno en magnitud y ocupa una región en el plano complejo como la mostrada en la figura 105.



**Figura 105.** Región de operación del coeficiente de reflexión

### Coefficiente de transmisión

Se denomina coeficiente de transmisión a la relación entre el campo transmitido y el campo incidente.

$$\tau = \frac{E_{ys2}^+}{E_{y1}^+}$$

El coeficiente de transmisión es también un número complejo, cuya magnitud es igual a la relación de magnitudes entre el campo incidente y el transmitido, mientras que su fase es la relación de fase entre los mismos campos.

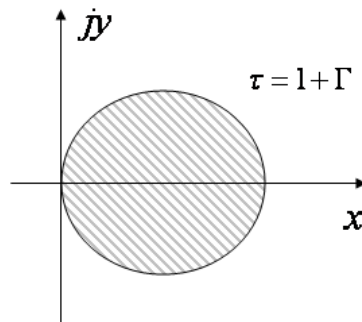
En términos del campo incidente y el reflejado se tiene:

$$\tau = \frac{E_{ys2}^+}{E_{y1}^+} = \frac{E_{y1}^+ + E_{y1}^-}{E_{y1}^+}$$

Dividiendo por el campo incidente:

$$\tau = 1 + \frac{E_{y1}^-}{E_{y1}^+} = 1 + \Gamma$$

Por lo que el coeficiente de transmisión ocupa un lugar geométrico igual al del coeficiente de reflexión, es decir, un círculo unitario, pero desplazado en el plano complejo en una unidad real. Como se muestra en la figura 106.



**Figura 106.** Región de operación del coeficiente de transmisión

En términos de las impedancias de los medios el coeficiente de transmisión queda:

$$\tau = 1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

Resolviendo:

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Si se analizan los mismos casos extremos que en el caso del coeficiente de reflexión se tiene:

**Caso 1.** Que la impedancia del medio 2 sea mucho mayor que la del medio 1, haciendo que ésta sea despreciable.

$$\eta_2 \gg \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de transmisión tiende a 2, el campo transmitido se encontraría en fase con el campo incidente y tendría el doble de su amplitud.

**Caso 2.** Que la impedancia del medio 2 sea mucho menor que la del medio 1 siendo casi despreciable.

$$\eta_2 \ll \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de transmisión tiende a cero; la totalidad del campo incidente se refleja hacia el medio 1.

**Caso 3.** Que la impedancia del medio 2 sea igual a la del medio 1.

$$\eta_2 = \eta_1$$

En este caso, el coeficiente de transmisión se hace unitario; no habría campo reflejado.

Este coeficiente de transmisión tiene una magnitud siempre igual o menor a dos.

**Ejemplo 78.** Reflexión en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz, 100mW/m<sup>2</sup>, incide desde el aire, en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca  $\eta_2 = 250\Omega$ .

Calcule el coeficiente de reflexión y transmisión.

**Solución:**

Coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{250 - 120\pi}{250 + 120\pi} = -0.2 = 0.2 < 180^\circ$$

Coeficiente de transmisión:

$$\tau = 1 + \Gamma = 0.8$$

## Potencia incidente y reflejada

Debido a la presencia de campos incidentes y reflejados, que viajan en direcciones opuestas, una parte de la energía transportada por la señal original se regresa al medio de origen.

En los cálculos de balance de potencia se deben tomar en cuenta las componentes incidente y reflejada.

Para el caso de la potencia incidente, el vector de Poynting tiene la misma ecuación que para el caso de los medios no acotados.

$$P_1^+ = \frac{|E_{01}^+|^2}{2|\eta_1|} e^{-2\alpha x} \cos\theta_{\eta_1}$$

El vector de Poynting incidente en valores RMS queda:

$$P_1^+ = \frac{|E_{01-RMS}^+|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} \cos\theta_{\eta_1}$$

Para el vector de Poynting reflejado, se usa la impedancia intrínseca del medio hacia el cual retorna la potencia, y la magnitud del campo reflejado:

$$P_1^- = \frac{|E_{01-RMS}^-|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} \cos\theta_{\eta_1}$$

Dado que el campo reflejado es proporcional al campo incidente:

$$E_{y1}^- = \Gamma E_{y1}^+$$

Se puede expresar el vector de Poynting reflejado como:

$$P_1^- = |\Gamma|^2 \frac{|E_{01-RMS}^+|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} \cos \theta_{\eta_1}$$

En términos de la potencia incidente:

$$P_1^- = |\Gamma|^2 P_1^+$$

### Reflectancia

La relación entre la potencia reflejada y la potencia incidente es una cantidad denominada reflectancia ( $R$ ) e indica la capacidad de reflejar energía electromagnética que posee una determinada superficie.

$$R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = |\Gamma|^2$$

La potencia reflejada en términos del vector de Poynting incidente queda:

$$P_1^- = RP_1^+$$

### Transmitancia

Para el caso de la potencia transmitida, por ley de conservación de la energía se tiene que la potencia transmitida debe ser la diferencia entre la potencia incidente y la reflejada:

$$P_2^+ = P_1^+ - P_1^-$$

En términos de la reflectancia queda:

$$P_2^+ = P_1^+ - RP_1^+ = (1 - R)P_1^+$$

En términos del coeficiente de reflexión:

$$P_2^+ = (1 - |\Gamma|^2)P_1^+$$

La relación entre la potencia transmitida y la potencia incidente se denomina transmitancia ( $T$ ) y representa la capacidad que tiene una superficie de transmitir la potencia que incide sobre ella.

$$T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = (1 - |\Gamma|^2)$$

La potencia transmitida en términos del vector de Poynting incidente queda:

$$P_2^+ = TP_1^+$$

Principio de conservación de la energía se debe cumplir siempre que:

$$R + T = 1$$

**Ejemplo 79.** Potencia reflejada en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz, 100mW/m<sup>2</sup>, incide desde el aire, en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca  $\eta_2 = 250\Omega$ .

Calcule la potencia reflejada y la potencia transmitida a la pared.

**Solución:**

Coefficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{250 - 120\pi}{250 + 120\pi} = -0.2 = 0.2 < 180^\circ$$

La reflectancia es de:

$$R = |\Gamma|^2 = 0.2^2 = 4\%$$

La transmitancia:

$$T = 1 - R = 96\%$$

La potencia reflejada:

$$|P_1^-| = 4\% \times 100 \frac{mW}{m^2} = 4 mW/m^2$$

La potencia transmitida:

$$|P_2^+| = 96\% \times 100 \frac{mW}{m^2} = 96 mW/m^2$$

## Reflexión total y ondas estacionarias

Cuando una onda incide de forma perpendicular a la frontera entre un dieléctrico sin pérdidas y un conductor perfecto se presenta una condición particular de reflexión de ondas denominada reflexión total.

Dado que la impedancia intrínseca de un conductor perfecto es cero, el coeficiente de reflexión es -1 y el coeficiente de transmisión se hace cero, por lo tanto:

$$E_{y1}^- = -E_{y1}^+ \quad E_{ys2}^+ = 0 = E_{y1}^+ + E_{y1}^-$$

El campo total queda entonces expresado en forma de vectores complejos queda:

$$E_{ys1}^+ = E_{y1}^+ + E_{y1}^- = E_{y1}^+ (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) e^{j\omega t}$$

El cambio de signo en la componente espacial de fase ( $\beta x$ ) obedece al desplazamiento en dirección contraria del campo reflejado con respecto al campo incidente.

De acuerdo con la ecuación de Euler:

$$e^{j\beta x} = \text{Cos}(\beta x) + j\text{Sen}(\beta x)$$

$$e^{-j\beta x} = \text{Cos}(\beta x) - j\text{Sen}(\beta x)$$

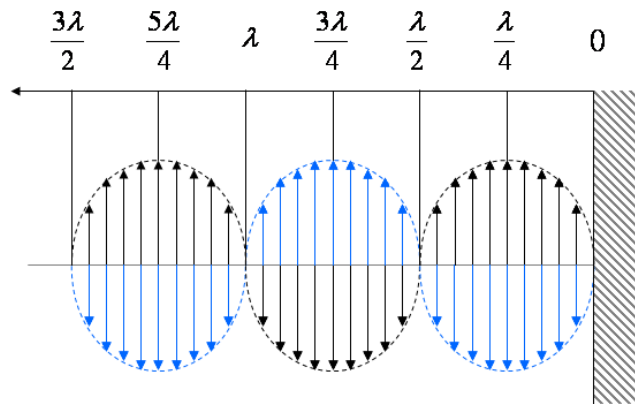
La diferencia se puede expresar como:

$$e^{j\beta x} - e^{-j\beta x} = 2j\text{Sen}(\beta x) = 2\text{Sen}(\beta x)e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Reemplazando en el vector de campo y obteniendo la parte real del mismo se obtiene una ecuación de campo igual a:

$$E_{ys1}^+ = 2E_{y0}^+ \text{Sen}(\beta x) \text{Sen}(\omega t)$$

En estas circunstancias, la onda deja de ser viajera y se convierte en una onda pulsante con la misma frecuencia de la onda incidente, pero que duplica su amplitud, como resultado de dos ondas de igual amplitud que se propagan en direcciones exactamente contrarias, como se muestra en la figura 107.



**Figura 107.** Ondas electromagnéticas estacionarias formadas en una frontera conductor dieléctrico

El vector de campo sigue vibrando de forma armónica con el tiempo, solo que los valores máximos y mínimos de campo, ya no se desplazan en el espacio, sino que ocupan posiciones fijas.

### Máximos de campo eléctrico

Se tienen puntos sobre el eje de propagación que cumplen la condición:

$$|\text{Sen}(\beta x)| = 1$$

Que corresponden a valores de campo de máxima amplitud de campo eléctrico pulsante. Para ubicar estos puntos, basta saber que la función seno se hace máxima en los múltiplos enteros impares de  $\frac{\pi}{2}$ .

Por lo tanto, se puede concluir que los puntos máximos en intensidad de campo eléctrico se ubican en posiciones  $x$  que cumplen:

$$\beta x = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty$$

En estos puntos, el campo eléctrico tiene carácter pulsante al doble de la amplitud de la señal original.

Para ubicar estos puntos se hace uso de la ecuación:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por la cual:

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty$$

Despejando  $x$  se obtiene:

$$x = (2n-1)\frac{\pi}{2} \times \frac{\lambda}{2\pi} = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

Es decir que los valores máximos de campo eléctrico se encuentran ubicados cada múltiplo impar de  $\frac{\lambda}{4}$  contado hacia atrás desde la frontera.

### Mínimos de campo eléctrico

Existen otros puntos que cumplen con:

$$|\text{Sen}(\beta x)| = 0$$

Que corresponden a valores de campo de mínima amplitud de campo eléctrico pulsante. Para ubicar estos puntos, basta saber que la función seno se hace cero en los múltiplos enteros de  $\pi$ .

Por lo tanto, se puede concluir que los puntos mínimos en intensidad de campo eléctrico se ubican en posiciones  $x$  que cumplen:

$$\beta x = (n-1)\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty$$

En estos puntos, el campo eléctrico permanece en un valor nulo en cualquier instante de tiempo.

Usando:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (n-1)\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3 \dots \infty$$

Despejando  $x$ :

$$x = (n-1)\pi \times \frac{\lambda}{2\pi} = (n-1) \frac{\lambda}{2}$$

Estos puntos se encuentran en los múltiplos enteros de  $\frac{\lambda}{2}$ .

La distancia entre dos máximos consecutivos, al igual que entre dos mínimos consecutivos es de  $\frac{\lambda}{2}$ , tal como se muestra en la figura 107.

**Ejemplo 80.** Reflexión total en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 2.4GHz, 100mW/m<sup>2</sup>, incide desde el aire, en forma perpendicular sobre una pared infinita superconductora.

¿A qué distancia de la pared se produce el primer máximo y el primer mínimo de campo eléctrico y cuál es la magnitud del primer máximo?

**Solución:**

La impedancia intrínseca del aire es:  $\eta_0 = 120\pi\Omega$

La amplitud del campo incidente se obtiene a partir del vector de Poynting incidente:

$$P_1^+ = \frac{|E_{01-RMS}^+|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} \cos\theta_{\eta_1}$$

Despreciando las pérdidas en el aire:

$$P_1^+ = \frac{|E_{01-RMS}^+|^2}{|120\pi|} \cos 0^\circ$$

Despejando:

$$|E_{1\_RMS}^+|^2 = 120\pi \times 0.1 \text{ W/m}^2$$

$$|E_{1\_RMS}^+| = 6.14 V_{RMS}/m$$

La longitud de onda en el aire se calcula como:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.4 \times 10^9 \text{ Hz}} = 12.5 \text{ cm}$$

El primer máximo se encuentra en:  $x = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}; n = 1$

Reemplazando:  $x = (2 - 1) \times \frac{12.5 \text{ cm}}{4} = 3.12 \text{ cm}$

El primer mínimo se encuentra en:  $x = (n - 1) \frac{\lambda}{2}; n = 1$

Es decir, justo en la frontera. El segundo mínimo se encuentra en:  $x = (n - 1) \frac{\lambda}{2}; n = 2$

Reemplazando:  $x = (2 - 1) \times \frac{12.5 \text{ cm}}{2} = 6.25 \text{ cm}$

La magnitud del campo máximo es:

$$|E|_{MAX} = 2|E_{1\_RMS}^+| = 12.28 V_{RMS}/m$$

## Reflexión parcial

En el caso de no presentarse la reflexión total, de todas formas pueden acontecer condiciones especiales debido a la suma de las ondas incidentes y reflejadas en una frontera entre dos medios de diferente impedancia intrínseca.

En este caso, el campo total en el medio 1 queda dado por la suma:

$$E_{ys1}^+ = E_{y1}^+ + E_{y1}^-$$

$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+| e^{-j\beta x} + \Gamma |E_{y1}^+| e^{j\beta x}$$

Nuevamente, el cambio de signo en la componente espacial de fase ( $\beta x$ ) obedece al desplazamiento en dirección contraria del campo reflejado con respecto al campo incidente.

El coeficiente de reflexión es un número complejo, por lo que se puede expresar en notación exponencial como:

$$\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_\Gamma}$$

Reemplazando:

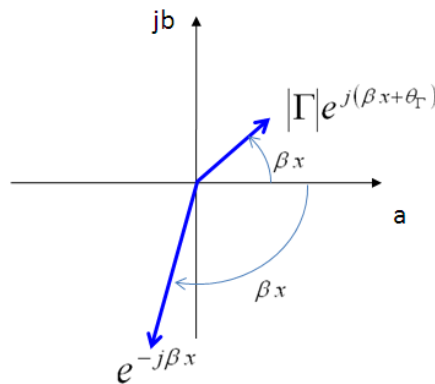
$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+|e^{-j\beta x} + |\Gamma||E_{y1}^+|e^{j\beta x}e^{j\theta_\Gamma}$$

Se hace factor común del campo incidente:

$$E_{ys1}^+ = \left( e^{-j\beta x} + |\Gamma|e^{j(\beta x + \theta_\Gamma)} \right) |E_{y1}^+|$$

Se tiene una suma de vectores en el plano complejo, cuyo ángulo de fase cambia a medida que cambia la variable  $x$ .

Sin embargo, debido a que un vector tiene signo negativo y el otro signo positivo, giran en direcciones contrarias, como se muestra en la figura 108.



**Figura 108.** Ubicación en el plano complejo de los vectores de campo incidente y reflejado. Las flechas indican la variación de los ángulos a medida que aumenta la distancia  $x$

Es claro que el campo total alcanza su mayor valor siempre que los vectores al interior del paréntesis se encuentren en fase, y su menor valor cuando se encuentren en oposición de fase, ya que se produce la suma aritmética o la resta aritmética de los campos según sea el caso.

La condición de campo máximo se cumple cuando los dos vectores se encuentren desfasados en un múltiplo entero de  $2\pi$  *radianes*:

$$E_{ys1}^+ \Big|_{MAX} \rightarrow \beta x + \theta_\Gamma = -\beta x + 2n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Despejando  $x$ :

$$2\beta x = 2n\pi - \theta_\Gamma \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$x = \frac{2n\pi}{2\beta} - \frac{\theta_\Gamma}{2\beta} ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Dado que:  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$x = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_\Gamma}{4\pi} \lambda ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Los valores máximos del campo se encuentran separados por una distancia igual a la mitad de la longitud de onda, tal como en el caso de las ondas estacionarias por reflexión total, y el valor de dichos máximos es igual a la suma de las magnitudes de los vectores que se encuentran en fase, es decir:

$$E_{ys1}^+ \Big|_{MAX} = (1 + |\Gamma|) |E_{y1}^+|$$

El ángulo  $\theta_\Gamma$  es un ángulo formado entre la diferencia y la suma de dos impedancias complejas  $\eta_2$  y  $\eta_1$ , por lo que varía en un rango máximo de  $0 < \theta_\Gamma < \pi$ .

En estos rangos de variación, la distancia entre la frontera entre los medios y la posición del primer valor máximo de campo varía entre:

$$0 < x < \frac{\lambda}{4}$$

Se debe tener cuidado al identificar la posición del primer máximo de campo, ya que se puede dar que al reemplazar  $n=0$ , el primer máximo quede ubicado en un valor de la coordenada  $x$  negativo. En este caso, no se toma en cuenta y se pasa al siguiente máximo  $n=1$ .

Cuando se tiene un valor mínimo de campo, la condición que se cumple es por lo tanto:

$$E_{ys1}^+ \Big|_{MIN} \rightarrow \beta x + \theta_\Gamma = -\beta x + (2n-1)\pi ; \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

$$2\beta x = (2n-1)\pi - \theta_\Gamma ; \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

$$x = \frac{(2n-1)\pi}{2\beta} - \frac{\theta_\Gamma}{2\beta} ; \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

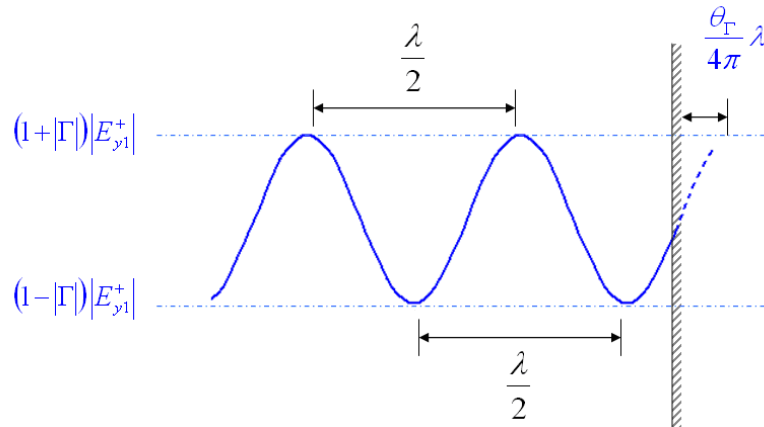
Dado que:  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$x = \left( \frac{2n-1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_r}{4\pi} \lambda \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

Los valores mínimos del campo también se encuentran separados por una distancia igual a la mitad de la longitud de onda, y el valor de dichos mínimos es igual a la diferencia de las magnitudes que se encuentran en oposición de fase, es decir:

$$E_{ys1}^+ \Big|_{MIN} = (1 - |\Gamma|) |E_{y1}^+|$$

El comportamiento entonces es semejante al que se observa en la figura 109.



**Figura 109.** Comportamiento de la amplitud máxima del campo eléctrico en un caso de reflexión parcial

El campo resultante en casos en los cuales el coeficiente de reflexión es diferente de la unidad queda representado por:

$$E_{ys1}^+ = \left( e^{-j\beta x} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_r)} \right) |E_{y1}^+|$$

Esta expresión se puede manipular matemáticamente multiplicándola y dividiéndola por una misma cantidad sin alterarla, como se muestra a continuación:

$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+| \left( e^{-j\beta x} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_r)} \right) \times e^{-j\frac{\theta_r}{2}} \times e^{j\frac{\theta_r}{2}}$$

$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+| \left( e^{-j\beta x} e^{-j\frac{\theta_r}{2}} + |\Gamma| e^{j(\beta x + \theta_r)} e^{-j\frac{\theta_r}{2}} \right) \times e^{j\frac{\theta_r}{2}}$$

Simplificando

$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+| \left( e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_r}{2}\right)} + |\Gamma| e^{j\left(\beta x + \frac{\theta_r}{2}\right)} \right) \times e^{j\frac{\theta_r}{2}}$$

Se puede agregar y restar un mismo término sin alterar la ecuación:

$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+| \left( e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| e^{j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} - |\Gamma| e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} \right) \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Reduciendo

$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+| \left[ (1 - |\Gamma|) e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + |\Gamma| \left( e^{j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} \right) \right] \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Aplicando la identidad de Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\text{Cos}\theta$$

$$E_{ys1}^+ = |E_{y1}^+| \left[ (1 - |\Gamma|) e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + 2|\Gamma| \text{Cos}\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right) \right] \times e^{j\frac{\theta_\Gamma}{2}}$$

Pasando al dominio del tiempo se obtiene:

$$E_{ys1}^+(x, t) = |E_{y1}^+| \text{Re} \left[ (1 - |\Gamma|) e^{-j\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)} + 2|\Gamma| \text{Cos}\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right) \right] \times e^{j\left(\omega t + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)}$$

$$E_{ys1}^+(x, t) = (1 - |\Gamma|) |E_{y1}^+| \text{Cos}(\omega t - \beta x) + 2|\Gamma| |E_{y1}^+| \text{Cos}\left(\omega t + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right) \text{Cos}\left(\beta x + \frac{\theta_\Gamma}{2}\right)$$

En donde se distinguen claramente dos componentes del campo eléctrico:

Una componente en forma de onda viajera de amplitud  $(1 - |\Gamma|) |E_{y1}^+|$  que se propaga en dirección de la onda incidente y otra componente de amplitud  $2|\Gamma| |E_{y1}^+|$  que es pulsante y estacionaria.

De esta forma, la onda resultante es la suma de las dos componentes, las cuales dan origen a la onda que se aprecia en la figura 109.

## Relación de onda estacionaria ROE

A la relación entre la amplitud máxima y la amplitud mínima de campo eléctrico se le denomina relación de onda estacionaria ROE y es equivalente a:

$$S = \frac{E_{ys1}^+|_{MAX}}{E_{ys1}^+|_{MIN}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

Esta relación se hace infinita cuando se presenta reflexión total, según se comentó anteriormente.

La relación de onda estacionaria suele notarse por la letra **S**, abreviatura de SWR, que en inglés proviene de Standing Wave Ratio.

**Ejemplo 81.** Reflexión parcial en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz, 100mW/m<sup>2</sup> incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca  $\eta_2 = 250\Omega$ .

Calcule la ubicación y la amplitud del primer máximo de campo eléctrico, así como la ROE.

**Solución:**

Coefficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{250 - 120\pi}{250 + 120\pi} = -0.2 = 0.2 < 180^\circ$$

La impedancia intrínseca del aire es:  $\eta_0 = 120\pi\Omega$

La amplitud del campo incidente se obtiene a partir del vector de Poynting incidente:

$$P_1^+ = \frac{|E_{01-RMS}^+|^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha x} \cos\theta_{\eta_1}$$

Despreciando las pérdidas en el aire:

$$P_1^+ = \frac{|E_{01-RMS}^+|^2}{|120\pi|} \cos 0^\circ$$

Despejando:

$$|E_{1-RMS}^+|^2 = 120\pi \times 0.1 \text{ W/m}^2$$

$$|E_{1-RMS}^+| = 6.14 \text{ V}_{RMS}/m$$

La longitud de onda en el aire se calcula como:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.5 \times 10^9 \text{ Hz}} = 20 \text{ cm}$$

Distancia al primer máximo desde la frontera:

$$x = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_{\Gamma}}{4\pi} \lambda \quad n = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{4\pi} \times 20\text{cm} = -15\text{cm}$$

No tiene sentido, por lo que se descarta y se toma el siguiente:

$$x = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_{\Gamma}}{4\pi} \lambda \quad n = 1$$

$$x = 10\text{cm} - \frac{\pi}{4\pi} \times 20\text{cm} = 5\text{cm}$$

Magnitud del primer máximo:

$$E_{y1}^+|_{\text{MAX}} = (1 + |\Gamma|)E_{y1}^+$$

$$E_{y1}^+|_{\text{MAX}} = (1 + 0.2) \times 6.14V_{\text{RMS}} = 7.4V_{\text{RMS}}$$

La magnitud del campo mínimo:

$$E_{y1}^+|_{\text{MIN}} = (1 - 0.2) \times 6.14V_{\text{RMS}} = 4.9V_{\text{RMS}}$$

La ROE:

$$s = ROE = \frac{E_{y1}^+|_{\text{MAX}}}{E_{y1}^+|_{\text{MIN}}} = \frac{7.4}{4.9} = 1.5$$

## Impedancia de entrada de una pared infinita

La impedancia de entrada cuando se presenta reflexión total o parcial debe tomar en cuenta ya no solo la impedancia del medio en el cual originalmente se propaga la onda, sino también la del medio que la refleja.

En forma general, la impedancia se mide como la relación entre las señales de entrada de campo eléctrico y campo magnético.

$$\eta_{in} = \frac{E_{ys1}}{H_{zs1}}$$

Cuando se emplean los vectores de campo se encuentra:

$$\eta_{in} = \frac{E_{ys1}}{H_{zs1}} = \frac{E_{y1}^+ e^{j\beta x} + E_{y1}^- e^{-j\beta x}}{H_{z1}^+ e^{j\beta x} + H_{z1}^- e^{-j\beta x}}$$

En términos del coeficiente de reflexión:

$$\eta_{in} = \frac{E_{y1}^+ e^{j\beta x} + \Gamma E_{y1}^+ e^{-j\beta x}}{H_{z1}^+ e^{j\beta x} - \Gamma H_{z1}^+ e^{-j\beta x}}$$

Se sacan por factor común las componentes de campo incidente:

$$\eta_{in} = \frac{E_{ys1}}{H_{zs1}} = \frac{E_{y1}^+ (e^{j\beta x} + \Gamma e^{-j\beta x})}{H_{z1}^+ (e^{j\beta x} - \Gamma e^{-j\beta x})}$$

La relación entre los campos incidentes es la impedancia intrínseca del medio 1.

$$\eta_1 = \frac{E_{y1}^+}{H_{z1}^+}$$

Reemplazando:

$$\eta_{in} = \eta_1 \left( \frac{e^{j\beta x} + \Gamma e^{-j\beta x}}{e^{j\beta x} - \Gamma e^{-j\beta x}} \right)$$

Se puede apreciar claramente que la impedancia de entrada es un número complejo, cuya magnitud y ángulo son funciones de la distancia a la frontera  $x$ .

Al reemplazar el coeficiente de reflexión en términos de las impedancias de los dos medios se obtiene:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{e^{j\beta x} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{-j\beta x}}{e^{j\beta x} - \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{-j\beta x}}$$

Despejando:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{(\eta_2 + \eta_1)e^{j\beta x} + (\eta_2 - \eta_1)e^{-j\beta x}}{(\eta_2 + \eta_1)e^{j\beta x} - (\eta_2 - \eta_1)e^{-j\beta x}}$$

Reagrupando términos:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) + \eta_1 (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x})}{\eta_1 (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) + \eta_2 (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x})}$$

De acuerdo con la identidad de Euler:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\text{Sen}\theta$$

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 \text{Cos}(\beta x) + j\eta_1 \text{Sen}(\beta x)}{\eta_1 \text{Cos}(\beta x) + j\eta_2 \text{Sen}(\beta x)}$$

Se divide por la función coseno en el numerador y denominador:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \text{Tan}(\beta x)}{\eta_1 + j\eta_2 \text{Tan}(\beta x)}$$

Como se observa claramente, la impedancia de entrada no solo depende de las impedancias de los medios 1 y 2, sino también de la distancia a la frontera de la fuente de ondas electromagnéticas. Además, esta impedancia tiene una variación periódica dada por la función tangente, la cual tiene un periodo de  $\pi$  radianes. Es decir, el valor de la impedancia se repite cada vez que:

$$\beta x = n\pi$$

Despejando  $x$ :

$$x = \frac{n\pi}{\beta} = n \frac{\pi}{2\pi/\lambda} = n \frac{\lambda}{2}$$

La impedancia tiene mínimos y máximos espaciados, igual que los valores del campo eléctrico. Además, el valor de la impedancia de entrada se repite cada semilongitud de onda.

La ubicación espacial de los mínimos y máximos de impedancia, sin embargo, no coincide con la de los valores extremos de campo eléctrico, ya que los primeros deben tomar en cuenta la ubicación espacial de los mínimos y máximos del campo magnético.

La impedancia de entrada se puede expresar en términos de la longitud de onda de la señal en el medio 1, usando la equivalencia de la constante  $\beta$ .

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \text{Tan}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)}{\eta_1 + j\eta_2 \text{Tan}\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)}$$

La expresión queda:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \text{Tan}\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)}{\eta_1 + j\eta_2 \text{Tan}\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)}$$

**Distancia eléctrica y distancia física**

La expresión  $\frac{x}{\lambda}$  indica el número de longitudes de onda recorridos desde la frontera. Esta relación se denomina distancia eléctrica y se representa por la letra  $\ell$  y se expresa en longitudes de onda.

Para encontrar la distancia física correspondiente a una distancia eléctrica determinada, se requiere conocer la longitud de onda  $\lambda$  y, por tanto, la constante de fase  $\beta$ .

En función de la distancia eléctrica, la impedancia de entrada queda como:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan(2\pi \ell)}{\eta_1 + j\eta_2 \tan(2\pi \ell)}$$

**Ejemplo 82.** Impedancia de entrada en una pared infinita.

Una onda electromagnética de 1.5GHz incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pared infinita con una impedancia intrínseca  $\eta_2 = 250\Omega$ .

Calcule la impedancia de entrada en distancias de a) 2cm, b) 5cm, c) 12cm, d) 15cm. Medidas desde la pared.

**Solución:**

La impedancia intrínseca del aire es:  $\eta_0 = 120\pi\Omega$

La longitud de onda en el aire se calcula como:

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.5 \times 10^9 \text{ Hz}} = 20 \text{ cm}$$

La impedancia de entrada en función de la distancia queda:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan(2\pi \ell)}{\eta_1 + j\eta_2 \tan(2\pi \ell)}$$

Reemplazando valores:

$$\eta_{in} = 120\pi \frac{250 + j120\pi \times \tan(2\pi \ell)}{120\pi + j250 \times \tan(2\pi \ell)}$$

Para el primer caso:

$$\ell = \frac{x}{\lambda} = \frac{2 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 0.1\lambda$$

Reemplazando:

$$\eta_{in} = 120\pi \frac{250 + j120\pi \times \text{Tan}(0.2\pi)}{120\pi + j250 \times \text{Tan}(0.2\pi)}$$

Evalutando:

$$\eta_{in} = (310 + j124)\Omega = 334\langle 22^\circ \rangle \Omega$$

Para el segundo, tercer y cuarto casos:  $\ell = 0.25\lambda$   $\ell = 0.6\lambda$   $\ell = 0.75\lambda$

Evalutando:

$$\eta_{in}(0.25\lambda) = 568\Omega = 568\langle 0^\circ \rangle \Omega$$

$$\eta_{in}(0.6\lambda) = (310 + j124)\Omega = 334\langle 22^\circ \rangle \Omega$$

$$\eta_{in}(0.75\lambda) = 568\Omega = 568\langle 0^\circ \rangle \Omega$$

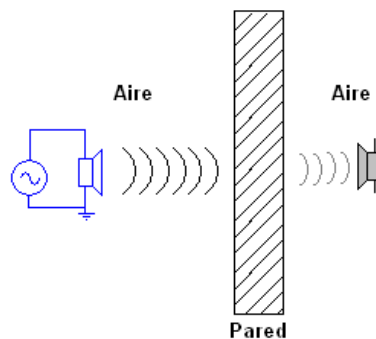
Los valores se repiten cada  $0.5\lambda$  como se esperaba.

## Propagación a través de una pared finita

Cuando se tiene una barrera de impedancia diferente a la del medio en donde se origina la onda, pero cuyo espesor es finito, las condiciones de cálculo de la impedancia de entrada cambian radicalmente, tal como se muestra en la figura 110.

En este caso, es necesario tomar en cuenta no solo la impedancia de la pared que separa las dos capas de aire, sino la impedancia de la capa de aire que se encuentra detrás de la pared.

Adicionalmente, al existir dos interfaces entre medios diferentes, se presenta una doble reflexión: en la primera interfaz, que separa el medio original de la pared, y otra, en la segunda interfaz, cuando la onda abandona la pared y avanza hacia el receptor.



**Figura 110.** Ondas que se propagan a través de una pared finita

Considérese el caso de una onda electromagnética de 250MHz,  $150V_{\text{RMS}}/m$ , proveniente de un generador de ondas situado a 40cm. de la pared, que incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pared con una impedancia intrínseca  $\eta_2 = 200\Omega$  y 12cm. de espesor.

La pared está hecha de un material no magnético y no disipativo. Al otro lado de la pared se encuentra un receptor situado a 30cm. de distancia.

Considérense las siguientes preguntas:

- ¿Cuál será el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión y la relación de onda estacionaria vistos por el generador?
- ¿Cuál es la magnitud del valor máximo de campo eléctrico del lado del generador?
- ¿Qué porcentaje de la potencia incidente se transmite al receptor?

En este caso, se hace necesario calcular las constantes de propagación en la pared y usarlas para aproximar los cálculos totales, considerando la contribución de ambos medios.

Como la pared está hecha de un material no magnético y no disipativo:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{\eta_0}{\eta}\right)^2$$

$$\epsilon_r = \left(\frac{120\pi}{200}\right)^2 = 3.55$$

Ahora se puede calcular la constante de fase de la pared.

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_r}$$

$$\beta = \frac{2\pi \times 250 \times 10^6}{3 \times 10^8} \sqrt{3.55} = 9.87 \text{ rad/m}$$

La impedancia de entrada vista desde la primera frontera en una mezcla de las impedancias del aire al otro lado de la pared y la impedancia de la misma pared:

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan(\beta x)}{\eta_1 + j\eta_2 \tan(\beta x)}$$

$$\eta_{in} = 200\Omega \frac{120\pi + j200 \tan(9.87 \times 0.12)}{200 + j120\pi \tan(9.87 \times 0.12)}$$

Donde  $x=0.12$  se obtiene del espesor de la pared que es  $12\text{cm}=0.12\text{m}$ .

Calculando:

$$\eta_{in} = (118 - j56)\Omega$$

Con esta impedancia de entrada vista desde la primera interfaz, se puede calcular el primer coeficiente de reflexión:

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{in} - \eta_{aire}}{\eta_{in} + \eta_{aire}} = -0.5 - j0.17 = 0.53 \angle -161^\circ$$

Así como el primer coeficiente de transmisión:

$$\tau_1 = 1 + \Gamma_1 = 0.5 - j0.17$$

La relación de onda estacionaria:

$$SWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0.53}{1 - 0.53} = \frac{1.53}{0.47} = 3.27$$

La magnitud del máximo de campo eléctrico:

$$E_{y1}^+|_{MAX} = (1 + |\Gamma|)E_{y1}^+ = 1.53 \times 150 = 229V_{RMS}$$

Porcentaje de potencia transmitido a la pared:

$$T_1 = 1 - |\Gamma_1|^2 = 1 - 0.53^2 = 0.72$$

Esto indica que de la potencia emitida por el emisor, solo el 72% se transmite a la pared, pero no que ésta sea la potencia recibida por el receptor.

La reflectancia sobre la primera cara de la pared es:

$$R_1 = 1 - T_1 = 0.28$$

Es decir que el 28% de la potencia se regresa al emisor.

Para obtener la potencia recibida por el receptor se debe tomar en cuenta una segunda reflexión que ocurre en la cara de la pared que da hacia el receptor.

El coeficiente de reflexión en la segunda cara de la pared se calcula como:

$$\Gamma_2 = \frac{\eta_{aire} - \eta_{pared}}{\eta_{aire} + \eta_{pared}} = 0.31$$

Lo cual da como resultado una transmitancia equivalente a:

$$T_2 = 1 - |\Gamma_2|^2 = 1 - 0.31^2 = 0.90$$

La potencia transmitida del generador al receptor se obtiene como producto de las dos transmitancias:

$$T_t = 0.9 \times 0.72 = 0.65$$

Es decir que de la potencia emitida por el emisor, solo el 65% llega al receptor, el 28% de la potencia se regresa, por lo tanto, falta un 13% de la potencia que se queda en la pared.

Este porcentaje de potencia la pared absorbe de la onda que la atraviesa. La potencia absorbida se manifiesta en efecto Joule, es decir, calentamiento de la pared.

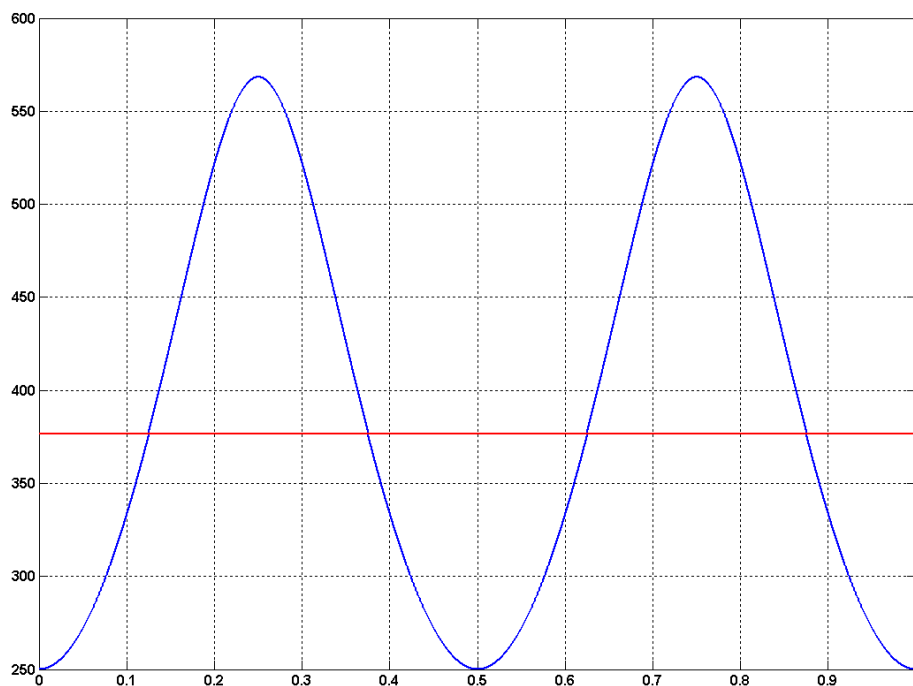
Este es el principio de operación de los hornos de microondas, en donde ondas de diferentes direcciones atraviesan los alimentos, y un porcentaje importante de la potencia es absorbida por ellos generando calor y cocción.

### Impedancia de entrada normalizada

La impedancia de entrada se puede graficar en función de la distancia eléctrica a la frontera usando un sistema de tabulación para magnitud y ángulo.

En el caso de una pared infinita, sobre la que incide una onda electromagnética proveniente del vacío o del aire, se puede obtener un gráfico como el que se muestra en la figura 111.

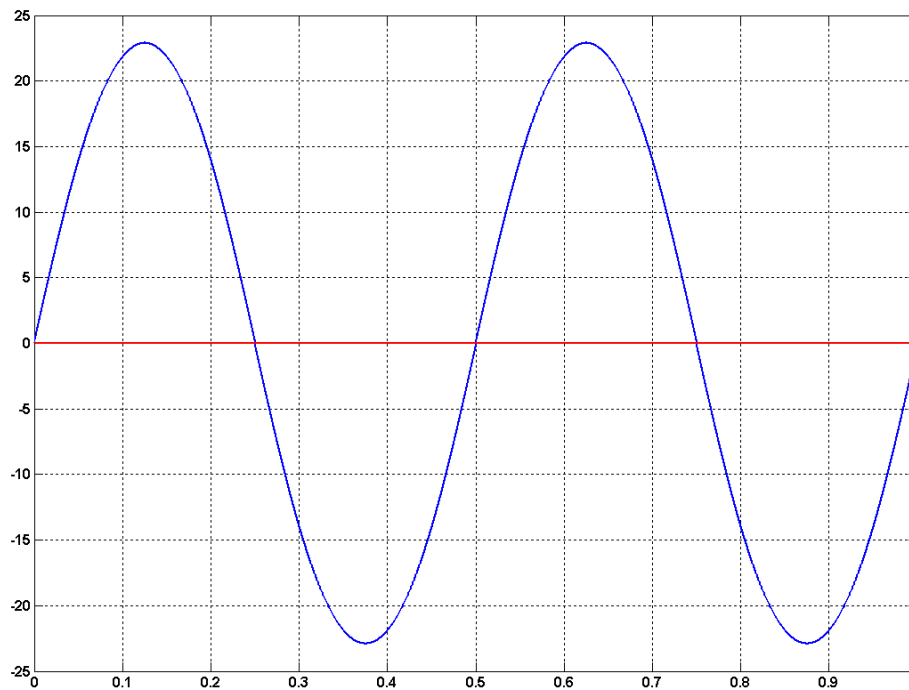
En este caso se usó una pared de impedancia intrínseca igual a  $250\Omega$ .



**Figura 111.** Magnitud de la impedancia de entrada en función de la distancia eléctrica para una onda EM que incide sobre una pared de  $250\Omega$  proveniente del aire

Como se observa claramente, la magnitud de la impedancia se repite cada 0.5 longitudes de onda y su valor empieza siendo igual al de la pared, pero llega a un valor máximo que es, incluso, superior a la impedancia del medio en donde se originó la onda, la cual se encuentra marcada en rojo.

En la figura 112, se muestra el ángulo de la impedancia equivalente, para el mismo caso considerado anteriormente, como se observa claramente; a pesar de que ambas impedancias tienen ángulo cero, la impedancia de entrada tiene un ángulo de fase diferente de cero, dependiendo de la distancia a la cual se ubique el observador. Esto indica que el campo eléctrico total y el campo magnético total no siempre están en fase, cuando se presenta reflexión parcial.



**Figura 112.** Ángulo de la impedancia de entrada en función de la distancia eléctrica para una onda EM que incide sobre una pared de  $250\Omega$  proveniente del aire

Debido a la gran variabilidad que generan las posibles combinaciones de impedancias e interfaces, se usa muy comúnmente la llamada impedancia normalizada, que no es más que la impedancia referida al medio donde se origina la onda.

La impedancia de entrada normalizada se calcula como la relación:

$$\widehat{\eta}_{in} = \frac{\eta_{in}}{\eta_0}$$

Donde el símbolo  $\widehat{\phantom{x}}$  representa valor normalizado y la impedancia  $\eta_0$  se denomina de normalización.

Cuando se normaliza con la impedancia  $\eta_1$  se obtiene la ecuación:

$$\hat{\eta}_{in} = \frac{\eta_2 + j \frac{\eta_1}{\eta_1} \text{Tan}(2\pi \ell)}{\eta_1 \frac{\eta_1}{\eta_1} + j \frac{\eta_2}{\eta_1} \text{Tan}(2\pi \ell)}$$

La cual es equivalente a:

$$\hat{\eta}_{in} = \frac{\hat{\eta}_2 + j \text{Tan}(2\pi \ell)}{1 + j \hat{\eta}_2 \text{Tan}(2\pi \ell)}$$

Que constituye la impedancia normalizada sobre la impedancia del medio donde se origina la onda.

La impedancia normalizada por definición es adimensional, y para obtener la impedancia real en Ohmios se debe multiplicar por la impedancia de normalización.

## Incidencia oblicua

La incidencia oblicua ocurre cuando la dirección de incidencia de la onda electromagnética no coincide con la del vector normal a la frontera entre dos medios.

En esta condición, el campo magnético y el campo eléctrico ya no son simultáneamente paralelos a la interfaz por lo que cambian las condiciones de frontera y las reglas que definen la reflexión y refracción.<sup>28</sup>

En los casos de incidencia oblicua, se tienen tres frentes de onda representados por tres rayos denominados:

- **Rayo incidente:** el que incide sobre la interfaz proveniente de la fuente de las ondas EM.
- **Rayo reflejado:** se refleja llevando la potencia reflejada en la interfaz.
- **Rayo refractado:** el que pasa al otro lado de la interfaz llevando la potencia transmitida.

Estos tres rayos se encuentran siempre en el mismo plano, denominado de incidencia, según se muestra en la figura 113.

---

<sup>28</sup> Por refracción entiéndase transmisión. Se usan indiferentemente los dos términos.

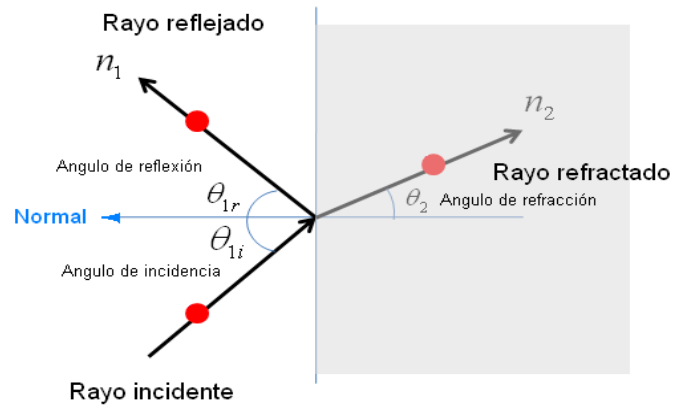


Figura 113. Incidencia oblicua

Estos tres rayos dan lugar a tres ángulos que se forman con la normal a la interfaz entre los medios denominados de la siguiente forma:

- **Ángulo de incidencia:** el que se forma entre el rayo incidente y la normal.
- **Ángulo de reflexión:** se forma entre el rayo reflejado y la normal.
- **Ángulo de refracción:** formado entre el rayo refractado y la normal.

## Ley de Snell

Estos ángulos coinciden con los formados por el vector de Poynting con el vector normal a cada lado de la frontera, y la relación entre ellos se encuentra determinada por la llamada “Ley de Snell”.

$$n_1 \text{Sen}(\theta_1) = n_2 \text{Sen}(\theta_2)$$

En donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de los medios 1 y 2, respectivamente.

El ángulo de incidencia es siempre igual al de reflexión.

También se puede obtener un equivalente a través de las velocidades de propagación:

$$\frac{\text{Sen} \theta_1}{c_1} = \frac{\text{Sen} \theta_2}{c_2}$$

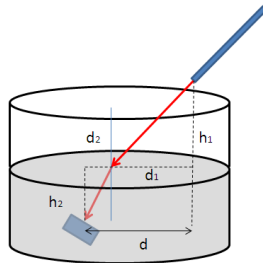
Para medios no magnéticos, la Ley de Snell se puede expresar en función de la impedancia intrínseca de los medios como:

$$\frac{\text{Sen} \theta_1}{\eta_1} = \frac{\text{Sen} \theta_2}{\eta_2}$$

**Ejemplo 83.** Ley de Snell.

Un laser dispara un rayo de luz desde el aire, a una distancia de 30cm. por encima de un tanque de agua con un ángulo de incidencia de  $45^\circ$ . Si se ubica un blanco 20cm. debajo del agua para recibir el impacto del laser. ¿A qué distancia horizontal del puntero del laser debe estar ubicado?

El índice de refracción del agua es de  $n=1.5$

**Solución:**

Para conocer la distancia horizontal se puede partir de la distancia vertical y los ángulos de incidencia y refracción.

Usando Trigonometría Básica, se puede aproximar la distancia horizontal como la suma de la distancia recorrida en el aire y la recorrida en el agua:

$$d = d_1 + d_2$$

Donde:  $d_2 = h_2 \tan \theta_r$      $d_1 = h_1 \tan \theta_i$

Como se conoce el ángulo de incidencia, se puede obtener el ángulo de refracción:

$$\text{Sen} \theta_r = \frac{n_1}{n_2} \text{Sen} \theta_i$$

El índice de refracción del aire es 1, por lo tanto:

$$\text{Sen} \theta_r = \frac{1}{1.5} \text{Sen}(45^\circ) = \frac{0.707}{1.5} = 0.471$$

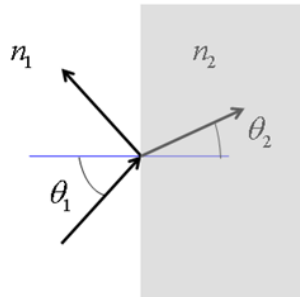
El ángulo de refracción es:  $\theta_r = \text{Sen}^{-1}(0.471) = 28^\circ$

Reemplazando:  $d = h_2 \tan \theta_r + h_1 \tan \theta_i$

Evaluando:  $d = 20\text{cm} \times \tan(28^\circ) + 30\text{cm} \times \tan(45^\circ) = 40.6\text{cm}$

## Reflexión total

A partir de la Ley de Snell se deduce la aparición de un fenómeno interesante, que ocurre cuando el índice de refracción de la sustancia en la cual se origina la onda ( $n_1$ ) es mayor al de la sustancia hacia la cual trata de pasar ( $n_2$ ).



El ángulo formado por el rayo refractado con la normal a la interfaz está definido por la Ley de Snell:

$$\text{Sen}(\theta_2) = \frac{n_1}{n_2} \text{Sen}(\theta_1)$$

En donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de los medios 1 y 2, respectivamente.

Como la relación  $\frac{n_1}{n_2}$  es un número mayor que 1. Esto significa que el producto puede ser igual a 1 para ángulos  $\theta_1$  menores a  $\frac{\pi}{2}$ .

Cuando esto ocurre, el ángulo de refracción se hace igual a  $\frac{\pi}{2}$  y ya no existe rayo refractado, es decir, toda la energía del rayo incidente retorna al medio de donde proviene.

A esta condición se le denomina reflexión total interna y se puede presentar en óptica, pero también con todo tipo de ondas electromagnéticas.

Para encontrar el ángulo de incidencia crítica a partir del cual se presenta reflexión total, se parte de la Ley de Snell haciendo el seno del ángulo de refracción igual a la unidad:

$$\text{Sen}(\theta_2) = 1$$

En esta condición:

$$\text{Sen}(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1}$$

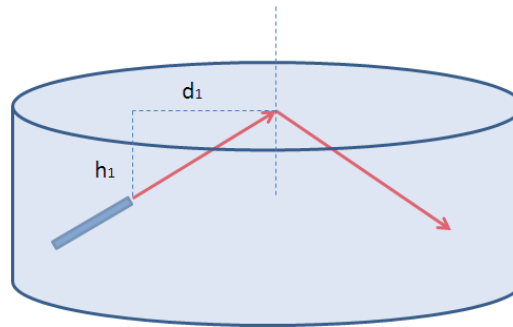
El ángulo crítico también se puede obtener en términos de las impedancias intrínsecas para medios no magnéticos.

$$\text{Sen}(\theta_c) = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

**Ejemplo 84.** Reflexión total interna.

Un laser dispara un rayo de luz hacia arriba, desde un tanque de agua. Si el laser está ubicado en un blanco 20cm. debajo del agua. ¿A qué distancia horizontal mínima del puntero del laser se debe disparar para que el rayo no abandone el agua?

El índice de refracción del agua es de  $n=1.5$

**Solución:**

Se calcula el ángulo crítico para el agua, en este caso:

$$\text{Sen}(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1.5} = 0.666$$

Con lo que se obtiene un ángulo crítico de:

$$\theta_c = \text{Sen}^{-1}(0.666) = 41.8^\circ$$

Con este ángulo se obtiene una relación trigonométrica entre la profundidad y la distancia:

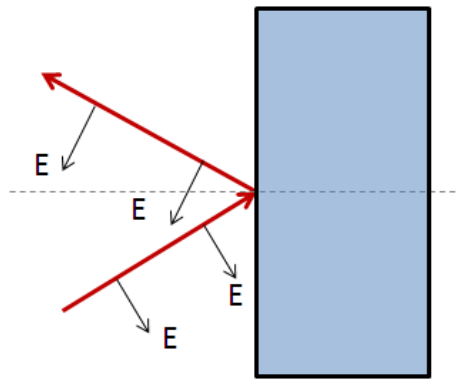
$$\frac{d_1}{h_1} = \text{Tan}\theta_1$$

Despejando:

$$d_1 = h_1 \text{Tan}\theta_1 = 20\text{cm} \times \text{Tan}(41.8^\circ) = 17.9\text{cm}$$

**Modos de polarización TE, TM y TEM**

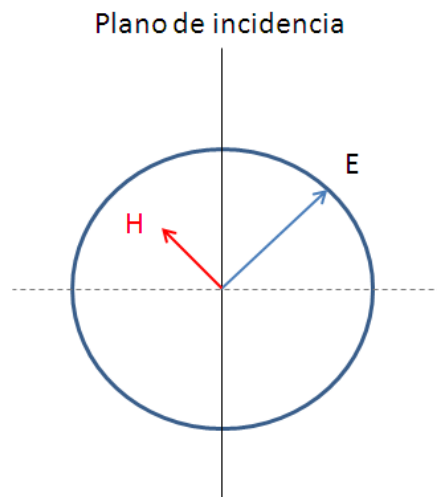
Cuando una onda incide de forma oblicua, ya no es posible asegurar que el campo eléctrico y el campo magnético sean paralelos a la interfaz que separa los medios. Como se muestra en la figura 114.



**Figura 114.** Campo eléctrico de una onda que incide en forma oblicua

Esta característica hace imposible usar las condiciones de frontera en la misma forma en que se usaron para resolver el problema de incidencia perpendicular.

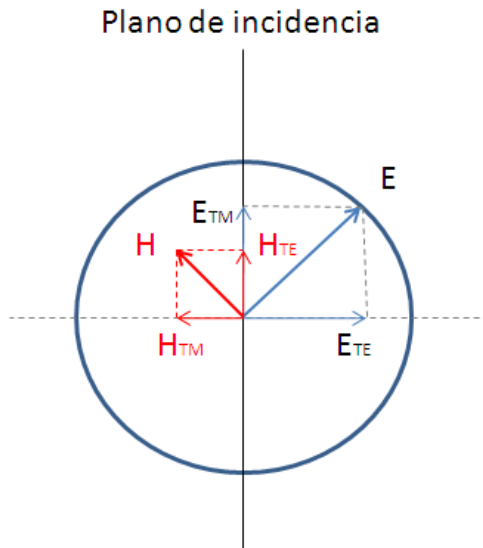
El modelo se complica un poco cuando se considera que la onda puede tener un tipo de polarización que haga que el campo eléctrico no se encuentre contenido en el plano de incidencia, como se muestra en la figura 114, sino que se encuentre en algún ángulo intermedio entre cero y  $\frac{\pi}{2}$  con dicho plano. Ambos ángulos, el de incidencia y el del campo eléctrico, con la normal al plano de incidencia, deben ser considerados al momento de determinar las leyes que definen la reflexión parcial de la onda.



**Figura 115.** Campo eléctrico y campo magnético de una onda incidente que incide en forma oblicua sobre una interfaz entre dos medios

En la figura 115, se muestran los vectores de campo eléctrico y magnético de una onda que incide en forma oblicua sobre una interfaz que separa dos medios. El plano de incidencia se representa por una línea recta que, proyectada al salir de la página, forma el plano.

Independientemente del ángulo de incidencia, siempre es posible descomponer la onda incidente en dos ondas, una de las cuales tiene su campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia y otra paralela al mismo. Como se muestra en la figura 116.



**Figura 116.** Descomposición de una onda con incidencia oblicua en los modos TE y TM

La onda cuyo campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia se denomina componente TE o “Transversal Electric”, esta componente tiene su campo magnético paralelo al plano de incidencia, ya que ambos campos deben ser perpendiculares.

La onda cuyo campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia se denomina componente TM o “Transversal Magnetic”, debido a que como el campo E es paralelo al plano de incidencia, el campo magnético es perpendicular o transversal al mismo.

La suma de ambas ondas da origen a la onda original.

Los modos TE y TM se denominan modos de polarización de la onda EM, cuando una onda posee simultáneamente componente TE y TM se dice que tiene polarización TEM, como en el caso de la onda mostrada en la figura 116.

Estos modos de polarización se conocen también como:

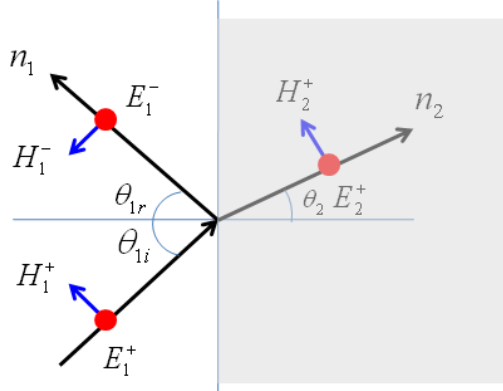
**TE** = Polarización **s**: La s es abreviatura de la palabra alemana “senkrecht-perpendicular”.

**TM** = Polarización **p**: La p es abreviatura de la palabra alemana “parallel-paralelo”.

En ambos casos se refiere a la posición del campo **E** con respecto al plano de incidencia.

## Coeficientes de Fresnel en polarización TE

En la figura 117 se muestra una onda EM que incide en modo TE sobre una interfaz entre dos medios.



**Figura 117.** Incidencia oblicua polarización TE

Como se puede apreciar claramente, el campo eléctrico es paralelo a la interfaz, por ser perpendicular al plano de incidencia, pero el campo magnético no.

El campo magnético incidente tiene una componente paralela a la interfaz y una componente perpendicular a la misma. Cada una de ellas se refleja de forma diferente, por lo que los coeficientes de reflexión y transmisión deben tomar en cuenta, no solo la relación de impedancias, sino también el ángulo de incidencia.

El coeficiente de reflexión en modo TE viene dado por:

$$r_{12\_TE} = \frac{\eta_2 \cos \theta_1 - \eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}$$

Mientras el coeficiente de transmisión queda:

$$t_{12\_TE} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}$$

Obsérvese que cuando el ángulo de incidencia se hace igual a cero grados, los coeficientes de Fresnel son iguales a los que se tomaron para incidencia perpendicular.

$$r_{12\_TE}(0^0) = \frac{\eta_2 \cos(0) - \eta_1 \cos(0)}{\eta_2 \cos(0) + \eta_1 \cos(0)} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \Gamma$$

$$t_{12\_TE}(0^0) = \frac{2\eta_2 \cos(0)}{\eta_2 \cos(0) + \eta_1 \cos(0)} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \tau$$

Los coeficientes de Fresnel también se pueden expresar a través de los índices de refracción como:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad t_{12\_TE} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

Cuando se usa la Ley de Snell se pueden expresar los mismos coeficientes en términos de los parámetros geométricos.

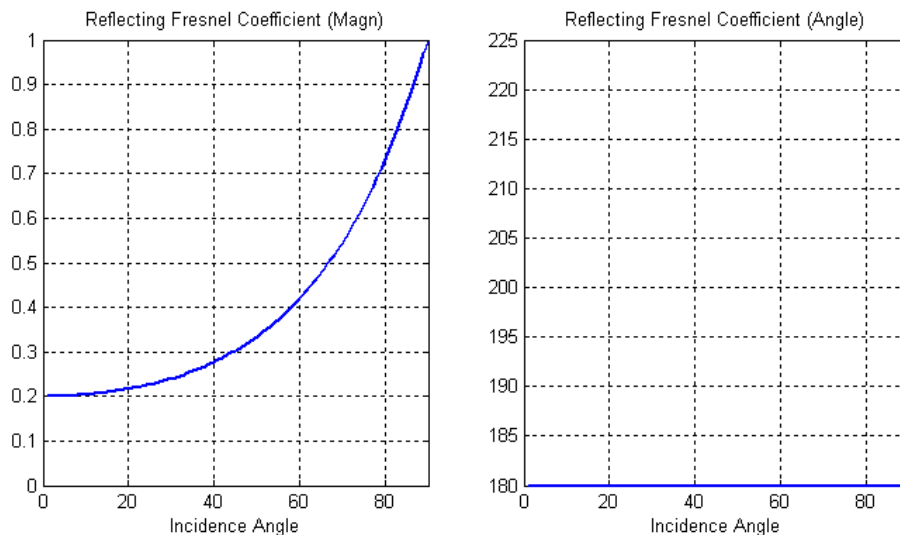
$$r_{12\_TE} = \frac{\text{Sen}(\theta_2 - \theta_1)}{\text{Sen}(\theta_2 + \theta_1)} \quad t_{12\_TE} = \frac{2\text{Cos}\theta_1 \text{Sen}\theta_2}{\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)}$$

Esta última notación establece una fuerte dependencia entre los coeficientes de Fresnel y el ángulo de incidencia, la cual queda demostrada cuando se hace un gráfico de los mismos con respecto al ángulo de incidencia.

En la figura 118, se muestra el coeficiente de reflexión en modo TE para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90° para dos medios. La onda pasa de un medio de menor índice de refracción a uno de mayor índice de refracción, por lo que no hay reflexión total.

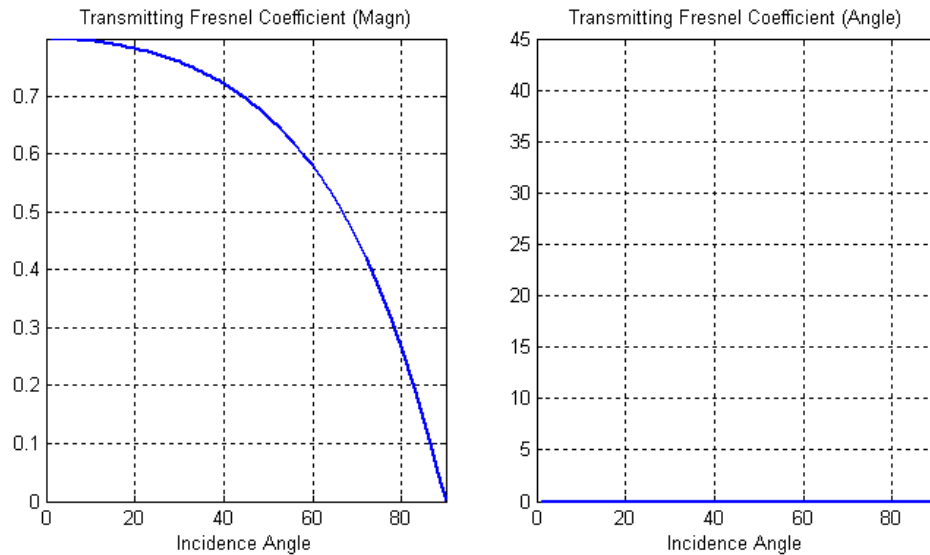
Como se observa siempre que el índice de refracción del segundo medio sea mayor, el coeficiente de reflexión tiene signo negativo.

En un ángulo de 90° el coeficiente de reflexión se hace 1, porque es cuando la onda pasa tangencial a la frontera y por lo tanto no existe campo transmitido.



**Figura 118.** Gráfico del coeficiente de Fresnel de reflexión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90°. Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1$ ,  $n_2=1.5$ .

Para el coeficiente de transmisión se tiene un comportamiento similar pero invertido, como se muestra en la figura 119. El coeficiente de transmisión se reduce paulatinamente hasta llegar a cero para un ángulo de incidencia de  $90^\circ$ .



**Figura 119.** Gráfico del coeficiente de Fresnel de transmisión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde  $0^\circ$  hasta  $90^\circ$ . Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1$ ,  $n_2=1.5$

**Ejemplo 85.** Incidencia oblicua en polarización TE.

Encuentre el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión y el ángulo de refracción para una onda con polarización s que incide desde el aire sobre un medio  $\epsilon_r = 5$  con un ángulo de  $30^\circ$ .

Encuentre el ángulo de reflexión total interna cuando la onda trata de salir del dieléctrico hacia el aire.

**Solución:**

Polarización s=TE

En medios no magnéticos:  $n_2 = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{5} = 2.23$

Por Ley de Snell:

$$n_1 \text{Sen} \theta_1 = n_2 \text{Sen} \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \text{Sen}^{-1} \left( \frac{\text{Sen}(30^\circ)}{2.23} \right) = 13^\circ$$

El coeficiente de transmisión TE:

$$t_{12\_TE} = \frac{2n_1 \text{Cos} \theta_1}{n_1 \text{Cos} \theta_1 + n_2 \text{Cos} \theta_2} = \frac{2 \text{Cos}(30^\circ)}{\text{Cos}(30^\circ) + 2.23 \times \text{Cos}(13^\circ)} = 0.57$$

El coeficiente de reflexión TE:

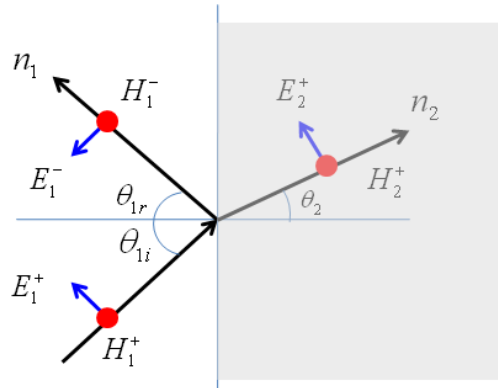
$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{\cos(30^\circ) - 2.23 \times \cos(13^\circ)}{\cos(30^\circ) + 2.23 \times \cos(13^\circ)} = \frac{-1.307}{3.029} = -0.43$$

Ángulo de reflexión total interna:

$$\text{Sen}(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2.23} \quad \theta_c = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{1}{2.23}\right) = 26.6^\circ$$

## Coeficientes de Fresnel en polarización TM

En la figura 120, se muestra una onda EM que incide en modo TM sobre una interfaz entre dos medios.



**Figura 120.** Incidencia oblicua polarización TM

De forma similar a la polarización TE, en la polarización TM el campo magnético es paralelo a la interfaz, por ser perpendicular al plano de incidencia, pero el campo eléctrico no.

El campo eléctrico incidente tiene una componente paralela a la interfaz y una componente perpendicular a la misma. Los coeficientes de reflexión y transmisión también deben tomar en cuenta, la relación de impedancias y el ángulo de incidencia.

El coeficiente de reflexión en modo TM viene dado por:

$$r_{12\_TM} = \frac{\eta_1 \cos \theta_1 - \eta_2 \cos \theta_2}{\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_2 \cos \theta_2}$$

Mientras el coeficiente de transmisión queda:

$$t_{12\_TM} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_2 \cos \theta_2}$$

Estos coeficientes se pueden expresar a través de los índices de refracción como:

$$r_{12\_TM} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad t_{12\_TM} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

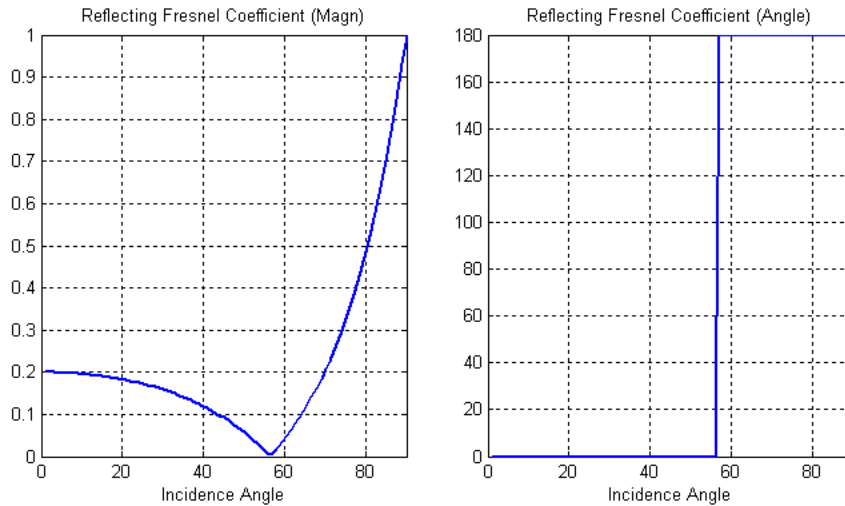
Cuando se usa la Ley de Snell se pueden expresar los mismos coeficientes en términos de los parámetros geométricos.

$$r_{12\_TM} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad t_{12\_TM} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Al igual que en el modo TE, los coeficientes de Fresnel tienen una fuerte dependencia del ángulo de incidencia.

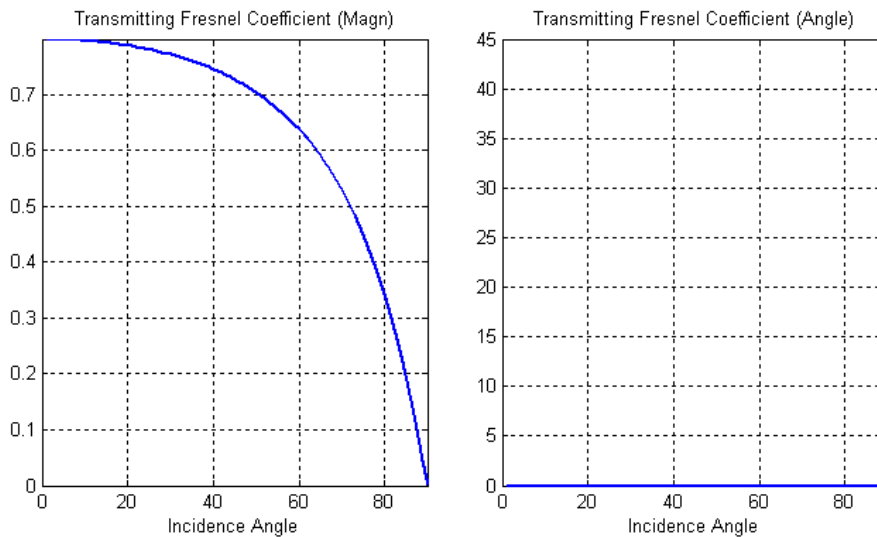
En la figura 121, se muestra el coeficiente de reflexión en modo TM para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90° para dos medios. La onda pasa de un medio de menor índice de refracción a uno de mayor índice de refracción, por lo que no hay reflexión total.

En un ángulo de 90° el coeficiente de reflexión se hace 1, porque es cuando la onda pasa tangencial a la frontera y por lo tanto no existe campo transmitido.



**Figura 121.** Gráfico del coeficiente de Fresnel de reflexión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90°. Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1$ ,  $n_2=1.5$

Para el coeficiente de transmisión es prácticamente igual que el coeficiente de transmisión TE.



**Figura 122.** Gráfico del coeficiente de Fresnel de transmisión en magnitud y ángulo para ángulos de incidencia desde  $0^\circ$  hasta  $90^\circ$ . Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1$ ,  $n_2=1.5$

**Ejemplo 86.** Incidencia oblicua en polarización TM.

Encuentre el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión y el ángulo de refracción para una onda con polarización  $\mathbf{p}$  que incide desde el aire sobre un medio  $\epsilon_r = 5$  con un ángulo de  $30^\circ$ .

**Solución:**

Polarización  $s=TM$

En medios no magnéticos:  $n_2 = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{5} = 2.23$

Por Ley de Snell:

$$n_1 \text{Sen} \theta_1 = n_2 \text{Sen} \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \text{Sen}^{-1} \left( \frac{\text{Sen}(30^\circ)}{2.23} \right) = 13^\circ$$

El coeficiente de transmisión TM:

$$t_{12\_TM} = \frac{2n_1 \text{Cos} \theta_1}{n_2 \text{Cos} \theta_1 + n_1 \text{Cos} \theta_2}$$

$$t_{12\_TM} = \frac{2 \times \text{Cos}(30^\circ)}{2.23 \times \text{Cos}(30^\circ) + \text{Cos}(13^\circ)} = 0.596$$

El coeficiente de reflexión TM:

$$r_{12\_TM} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

$$r_{12\_TM} = \frac{2.23 \times \cos(30^\circ) - \cos(13^\circ)}{2.23 \times \cos(30^\circ) + \cos(13^\circ)} = 0.33$$

Se pueden calcular en función de los parámetros geométricos:

$$r_{12\_TM} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

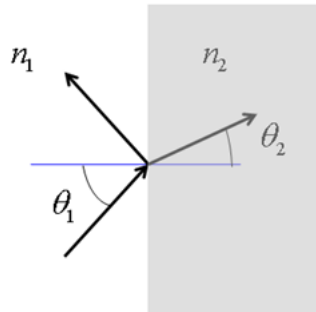
$$t_{12\_TM} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$r_{12\_TM} = \frac{\tan(30^\circ - 13^\circ)}{\tan(30^\circ + 13^\circ)} = \frac{\tan(17^\circ)}{\tan(43^\circ)} = 0.33$$

$$t_{12\_TM} = \frac{2 \cos(30^\circ) \sin(13^\circ)}{\sin(43^\circ) \cos(17^\circ)} = 0.596$$

## Ángulo de refracción total – polarización TM

Al analizar la expresión para el coeficiente de reflexión TM se encuentra una condición especial denominada refracción total.



$$r_{12\_TM} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = 0$$

Cuando la suma de los ángulos de incidencia y de refracción es  $90^\circ$  se anula el coeficiente de Fresnel de reflexión en el modo TM (la tangente tiende a infinito), lo que significa que el campo eléctrico paralelo no se refleja, sino que se refracta completamente.

En una onda incidente con polarización TM, esto significa que no habría onda reflejada, pero en una onda con polarización TEM, la onda reflejada tendría solo polarización TE.

Esta forma se denomina polarización por reflexión y, a diferencia de otros modos de polarizar ondas electromagnéticas, ocurre solo para un ángulo de incidencia particular.

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow r_{12\_TM} = 0$$

A diferencia de la reflexión total, la refracción total no ocurre a partir de un ángulo específico, sino en un ángulo específico, si el ángulo de incidencia varía ligeramente ya no se presenta el fenómeno.

El ángulo en el cual se presenta esta condición se llama ángulo de Brewster.

El ángulo de Brewster se puede obtener usando la expresión del coeficiente de reflexión TM en función de los índices de refracción:

$$r_{12\_TM} = \frac{n_2 \cos \theta_B - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_B + n_1 \cos \theta_2} = 0$$

Para que esto se cumpla se requiere que:

$$n_2 \cos \theta_B = n_1 \cos \theta_2$$

Dado que:

$$\theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

En ángulos complementarios, el coseno de un ángulo es el seno del otro, por lo tanto:

$$\cos \theta_2 = \sin \theta_B$$

Reemplazando:

$$n_2 \cos \theta_B = n_1 \sin \theta_B$$

De donde surge:

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

En función de las impedancias intrínsecas de los medios

$$\tan \theta_B = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

A diferencia del ángulo crítico de reflexión total, el ángulo de Brewster se presenta para cualquier combinación de los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ . Si se observa por ejemplo en la figura 121, se ve cómo el coeficiente de reflexión se hace cero justo en el ángulo de Brewster, que en este caso está cerca de los  $60^\circ$ .

Se observa claramente cómo a partir del ángulo de Brewster, el signo del coeficiente de reflexión cambia a positivo.

Para obtener el valor exacto, se toman los índices de refracción usados en el gráfico:

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 1.5$$

El ángulo de Brewster para este caso es:

$$\theta_B = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1.5}{1}\right) = 56^\circ$$

## Coeficientes de Fresnel complejos

Cuando se sobrepasa el ángulo crítico, la expresión para calcular el ángulo de refracción a través de la Ley de Snell carecer de sentido, ya el dominio de la función seno inverso está limitado al intervalo  $[0, 1]$ .

$$\theta_2 = \text{Sen}^{-1}\left[\frac{n_1}{n_2}\text{Sen}(\theta_1)\right]$$

Para ángulos de incidencia superiores al ángulo crítico:

$$\frac{n_1}{n_2}\text{Sen}(\theta_1) \geq 1$$

En este caso, los coeficientes de Fresnel se tornan complejos, lo cual indica que aparece una diferencia de fase entre los campos incidente, reflejado y transmitido.

Los coeficientes de Fresnel complejos se pueden obtener como:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 \text{Cos} \theta_1 - n_2 \text{Cos} \theta_2}{n_1 \text{Cos} \theta_1 + n_2 \text{Cos} \theta_2}$$

Por identidades trigonométricas:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 \text{Cos} \theta_1 - n_2 [1 - \text{Sen}^2 \theta_2]^{1/2}}{n_1 \text{Cos} \theta_1 + n_2 [1 - \text{Sen}^2 \theta_2]^{1/2}}$$

De acuerdo con la Ley de Snell, se elimina el ángulo de refracción:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 \text{Cos} \theta_1 - n_2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{Sen}^2 \theta_1\right]^{1/2}}{n_1 \text{Cos} \theta_1 + n_2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{Sen}^2 \theta_1\right]^{1/2}}$$

Se introduce la constante  $n_2$  en la raíz:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - [n_2^2 - n_1^2 \text{Sen}^2 \theta_1]^{1/2}}{n_1 \cos \theta_1 + [n_2^2 - n_1^2 \text{Sen}^2 \theta_1]^{1/2}}$$

Se hace un cambio de signo dentro de la raíz:

$$r_{12\_TE} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - j [n_1^2 \text{Sen}^2 \theta_1 - n_2^2]^{1/2}}{n_1 \cos \theta_1 + j [n_1^2 \text{Sen}^2 \theta_1 - n_2^2]^{1/2}}$$

Finalmente, se divide numerador y denominador por el factor común:  $n_1 \cos \theta_1$

$$r_{12\_TE} = \frac{1 - \frac{1}{n_1 \cos \theta_1} j [n_1^2 \text{Sen}^2 \theta_1 - n_2^2]^{1/2}}{1 + \frac{1}{n_1 \cos \theta_1} j [n_1^2 \text{Sen}^2 \theta_1 - n_2^2]^{1/2}}$$

El mismo factor se introduce en la raíz:

$$r_{12\_TE} = \frac{1 - j \left[ \text{Tan}^2 \theta_1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]^{1/2}}{1 + j \left[ \text{Tan}^2 \theta_1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

De forma semejante se pueden obtener ecuaciones para los demás coeficientes:

$$t_{12\_TE} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{1 + j \left[ \text{Tan}^2 \theta_1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$r_{12\_TM} = \frac{1 - j \frac{n_1}{n_2} \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{Tan}^2 \theta_1 - 1 \right]^{1/2}}{1 + j \frac{n_1}{n_2} \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{Tan}^2 \theta_1 - 1 \right]^{1/2}} \quad t_{12\_TM} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{1 + j \frac{n_1}{n_2} \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{Tan}^2 \theta_1 - 1 \right]^{1/2}}$$

## Reflectancia y transmitancia

### Reflectancia

La reflectancia es la cantidad de energía que es reflejada por un objeto luego de que ésta incide sobre él, el resto de la energía incidente puede ser transmitida o absorbida por el objeto.

Matemáticamente, la reflectancia es la relación entre la componente del vector de Poynting reflejado perpendicular a la frontera y la misma componente del vector de Poynting incidente.

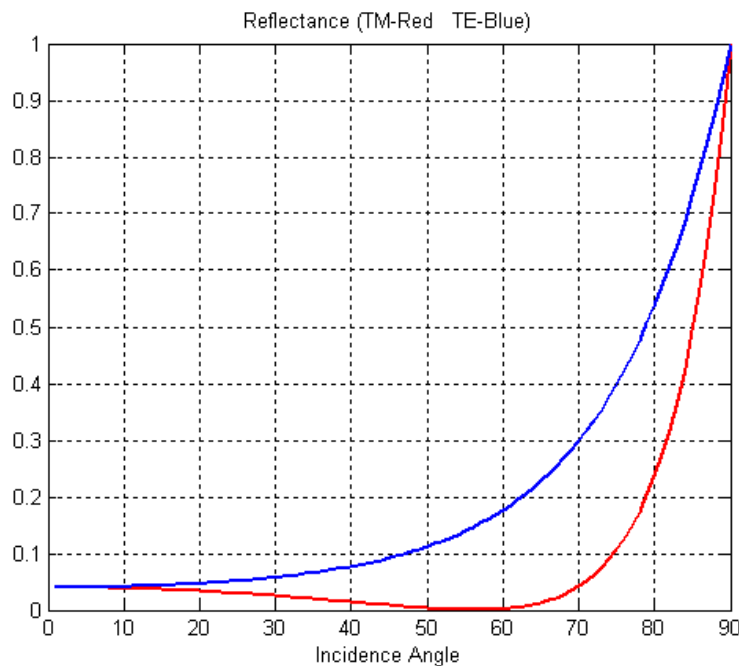
$$R = \frac{n \cdot P_1^-}{n \cdot P_1^+}$$

Donde  $n$  es un vector unitario perpendicular a la frontera.

En una onda incidente TEM, se calcula la reflectancia separada por cada modo:

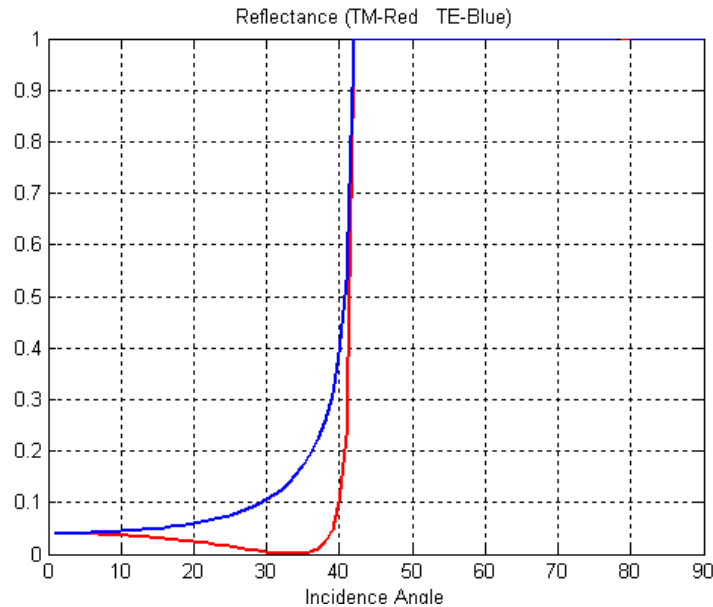
$$R_{TE} = r_{12\_TE}^2 \quad R_{TM} = r_{12\_TM}^2$$

Al igual que en el caso de los coeficientes de Fresnel, la reflectancia tiene una fuerte dependencia del ángulo de incidencia. En la figura 123, se puede ver la reflectancia en dependencia del ángulo de incidencia para dos medios  $n_1$  y  $n_2$ . Se aprecia claramente el ángulo de Brewster, en el cual la reflectancia TM se hace cero.



**Figura 123.** Gráfico de la reflectancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90°. Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1$ ,  $n_2=1.5$

Cuando se invierten los índices de refracción, además del ángulo de Brewster, aparece el ángulo de reflexión total, como se aprecia en la figura 124, donde la reflectancia en ambos modos llega al 100%.



**Figura 124.** Gráfico de la reflectancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90°. Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1.5$ ,  $n_2=1$ . Se aprecia el fenómeno de reflexión total

## Transmitancia

Es la cantidad de energía que un objeto deja pasar luego de que esta incide sobre él. El resto de la energía incidente puede ser reflejada o disipada por el objeto.

Matemáticamente, es la relación entre la componente del vector de Poynting transmitido perpendicular a la frontera y la misma componente del vector de Poynting incidente.

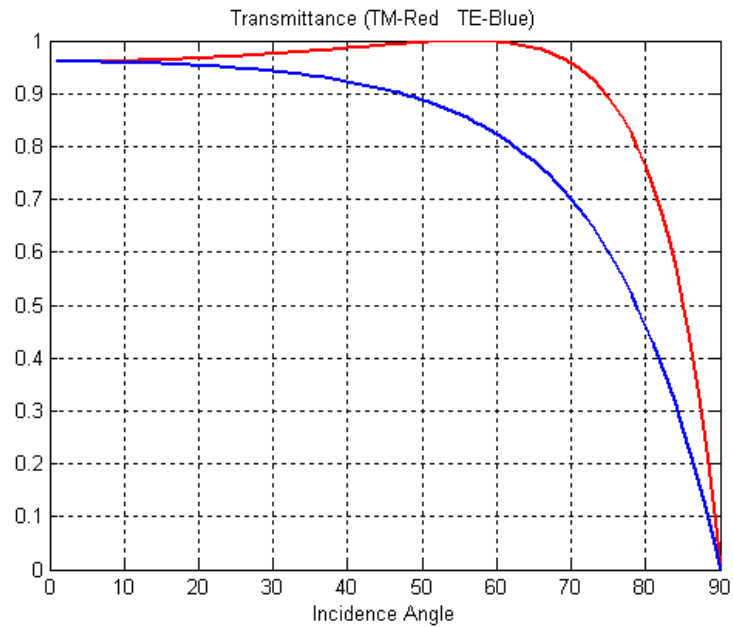
$$T = \frac{n \cdot P_2^+}{n \cdot P_1^+}$$

Donde  $n$  es un vector unitario perpendicular a la frontera.

En una onda incidente TEM, se calcula la transmitancia separada por cada modo:

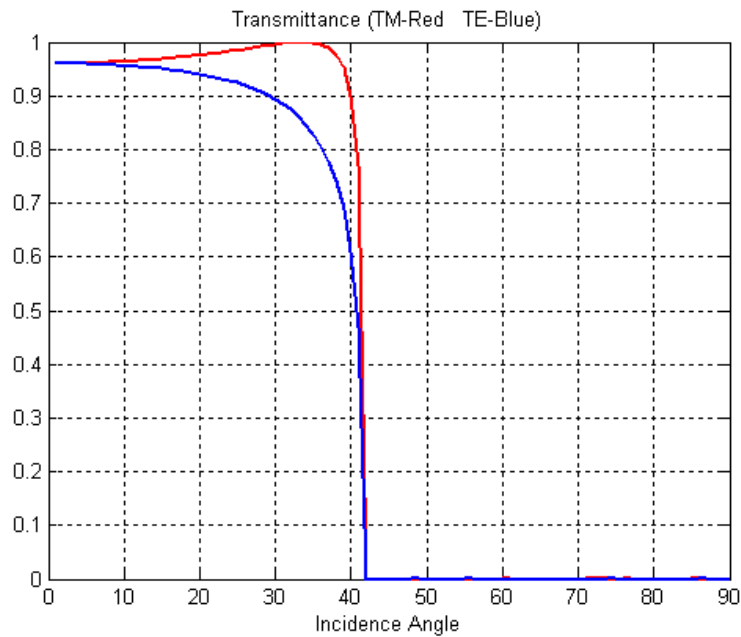
$$T_{TE} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12\_TE}^2 \quad T_{TM} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12\_TM}^2$$

La transmitancia también tiene una fuerte dependencia del ángulo de incidencia. En la figura 125, se puede ver la transmitancia en dependencia del ángulo de incidencia para dos medios  $n_1$  y  $n_2$ . Se aprecia claramente el ángulo de Brewster, en el cual la reflectancia TM se hace cero y la transmitancia 1.



**Figura 125.** Gráfico de la transmitancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90°. Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1$ ,  $n_2=1.5$ . La transmitancia TM en el ángulo de Brewster se hace 1

Cuando se invierten los índices de refracción, además del ángulo de Brewster, aparece el ángulo de reflexión total, como se aprecia en la figura 126, donde la transmitancia en ambos modos llega al 0%.



**Figura 126.** Gráfico de la transmitancia en los modos TE y TM para ángulos de incidencia desde 0° hasta 90°. Para el gráfico se usaron dos medios  $n_1=1.5$ ,  $n_2=1$ . Se aprecia el fenómeno de reflexión total

Por ley de conservación de la energía, la suma de la reflectancia y la transmitancia en cada modo debe ser igual a la unidad.

$$R_{TE} + T_{TE} = 1 \quad R_{TM} + T_{TM} = 1$$

**Ejemplo 87.** Potencia incidente y reflejada con incidencia oblicua.

Una onda con polarización circular, incide desde el aire sobre un bloque de plexiglás  $\epsilon_r = 3.45$ , bajo el ángulo de Brewster.

Calcule el porcentaje de potencia reflejada y transmitida, así como el ángulo de reflexión y refracción.

**Solución:**

La impedancia intrínseca del plexiglás se calcula como:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} = 203\Omega$$

Se calcula el ángulo de Brewster:

$$\theta_B = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{120\pi}{203}\right) = 61.7^\circ$$

Coeficientes de Fresnel bajo el ángulo de Brewster:

$$r_{12_{TE}} = \text{Cos}(2 \times \theta_B) = -0.55 \quad t_{12_{TE}} = 2\text{Cos}^2\theta_B = 0.449$$

$$r_{12_{TM}} = 0 \quad t_{12_{TM}} = \text{Cot}\theta_B = 0.538$$

La reflectancia y transmitancia

$$R_{TM} = 0 \quad R_{TE} = 30\% \quad T_{TM} = 1 \quad T_{TE} = 70\%$$

El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia:

$$\theta_{refl} = 61.7^\circ$$

El ángulo de refracción se calcula por Ley de Snell:

$$\frac{\text{Sen}\theta_1}{\eta_1} = \frac{\text{Sen}\theta_2}{\eta_2}$$

Por lo tanto:

$$\theta_2 = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \text{Sen}\theta_1\right) = 27.8^\circ$$

## Ejercicios del capítulo

- Una onda electromagnética incide desde el aire en forma perpendicular sobre una pantalla y se refleja de tal forma que se tiene una ROE de 4 y que el primer máximo de campo eléctrico se encuentra a  $0.35\lambda$  de la pantalla. ¿Cuál es la impedancia de la pantalla?
- Una onda plana monocromática de 50MHz, incide desde el aire sobre un cristal diamagnético no disipativo con  $\epsilon_r = 2.5$ . La potencia original de la señal es de  $100\text{mW}/\text{m}^2$ . Calcule: la potencia transmitida y la reflejada, la relación de onda estacionaria y la ubicación (en metros desde la frontera) del primer mínimo y el primer máximo de campo eléctrico.
- Una onda plana monocromática de 20MHz incide desde el aire sobre un cristal diamagnético no disipativo. La ROE medida es de 1.5 y el primer mínimo de campo eléctrico se encuentra justo en la frontera. Calcule: la reflectancia y la transmitancia, la impedancia intrínseca del cristal y su permitividad relativa.
- Una onda electromagnética plana de 10GHz y  $250\text{mW}/\text{m}^2$  incide en forma perpendicular desde el aire sobre una placa de cobre de  $10\mu\text{m}$  de espesor y  $25\text{cm}^2$  de sección. Calcule:
  - La magnitud del campo eléctrico y del campo magnético tanto incidente como reflejado.
  - La impedancia intrínseca de la placa de cobre y la profundidad de penetración de la onda.
  - La potencia transmitida a la placa.
  - La potencia por unidad de área reflejada desde la placa.
  - La ROE en el aire y la distancia desde la placa en la que se encuentra el primer máximo de campo eléctrico.
  - Calcule a qué distancia mínima se debe ubicar la fuente de ondas electromagnéticas para que la impedancia vista desde la fuente sea la máxima posible.



- Una corriente alterna senoidal que circula por un alambre, genera un campo magnético dado por:  $H = 30e^{j2\pi \times 10^9 t} e^{j\beta x} [a_y + 3ja_z] \text{ mA}/\text{m}$  en el aire. La onda incide en forma perpendicular sobre el vidrio de una ventana ( $\epsilon_r = 6$ ), situado a 45 centímetros de la fuente. Ninguno de los dos medios es disipativo.

Caso 1. Que el grosor de la ventana sea infinito

- ¿Cuál es el valor del coeficiente de reflexión (magnitud y ángulo)?

- ¿Cuál es la impedancia de entrada vista desde la fuente y cuál la magnitud del campo eléctrico incidente y reflejado?
- ¿Cuál es el valor de la ROE al lado de la fuente?
- ¿A qué distancia del vidrio se encuentra el primer máximo de campo eléctrico? ¿Cuál es su magnitud?
- ¿A qué distancia del vidrio se encuentra el primer mínimo de campo eléctrico? ¿Cuál es su magnitud?
- ¿Qué porcentaje de la potencia radiada por la fuente se refleja de vuelta? ¿Qué porcentaje se transmite a través del vidrio?

Caso 2. Repita los mismo cálculos suponiendo que el vidrio tiene un espesor de 6 mm.

6. Una onda electromagnética plana, cuyo campo eléctrico se encuentra en dirección Y, viaja a lo largo del eje X una distancia total de 150m. a través de un dieléctrico no-magnético de bajas pérdidas, con los siguientes parámetros de propagación:

$$\alpha = 0.5 \text{ Np/km} \quad \beta = 5\pi \text{ rad/m} \quad f_v = 0.5$$

Choca de frente con una pantalla y se refleja con un coeficiente de reflexión  $\Gamma = 0.5 - j0.4$  retornando hasta el punto de partida.

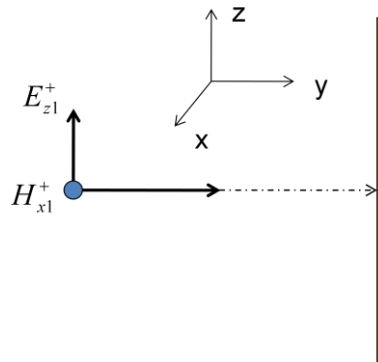
Calcule:

- La velocidad de propagación, la permitividad relativa y la conductividad del medio.
  - El porcentaje de la potencia incidente que retorna al punto de partida después del viaje de ida y regreso.
  - El porcentaje de la potencia incidente que se disipa por efecto Joule en el medio.
  - La potencia que se transmite a la pantalla.
  - La impedancia intrínseca de la pantalla y del dieléctrico.
7. En la figura 1 se muestra una onda electromagnética de 100MHz que incide de forma normal desde el aire sobre una placa de cobre de 5mm. de espesor. La intensidad de campo eléctrico incidente es de 103V/m en el punto de incidencia.

$$\sigma_{\text{aire}} = 10^{-7} \text{ Sm/m} \quad \sigma_{\text{Cobre}} = 6 \times 10^7 \text{ Sm/m}$$

Calcule:

- La ecuación de la onda incidente y reflejada de campo eléctrico y magnético
- El coeficiente de reflexión y de transmisión.
- La relación de onda estacionaria en el aire.
- La distancia en la cual se encuentra el primer máximo de campo eléctrico.
- El vector de Poynting promedio, incidente, reflejado y transmitido.



8. Calcule el coeficiente de reflexión de una onda polarizada en modo TE que incide desde el aire sobre un dieléctrico con  $n=1.5$  con el ángulo de Brewster. Calcule la permitividad relativa del medio.
9. Se hace incidir un rayo de laser rojo desde el aire, sobre un dieléctrico desconocido, cambiando el ángulo de incidencia hasta lograr que el rayo reflejado tenga solamente polarización s. En ese momento, se mide el ángulo de incidencia y se obtiene una medida de  $65^\circ$ . Calcule el valor de la impedancia intrínseca, el índice de refracción y la permitividad relativa del dieléctrico desconocido.

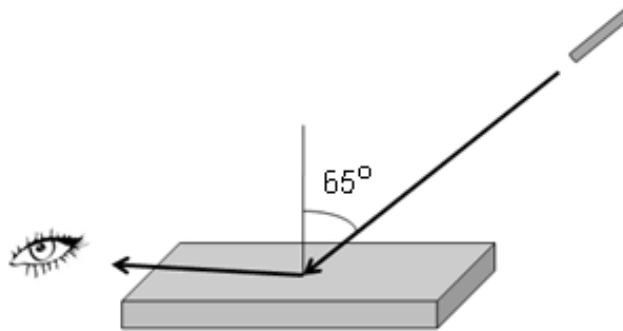


Figura 1

10. Encuentre el coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión, el ángulo de refracción y el ángulo de Brewster para una onda polarizada linealmente en forma perpendicular al plano de incidencia que incide desde el aire sobre un medio  $\epsilon_r=5$  con un ángulo de  $30^\circ$ . Repita los cálculos intercambiando los medios y encuentre el ángulo de reflexión total interna cuando la onda trata de salir del dieléctrico hacia el aire.
11. Un foco de luz incandescente se encuentra situado a una altura  $h$ , sobre un lago en calma, como se muestra en la figura 2. El índice de refracción del agua dulce es  $n=1.333$ . Calcule la altura a la que se debe situar el foco para que la luz del mismo reflejada por el lago sea observada por una persona de 1.80mts. de estatura, a una distancia de 100m, en forma polarizada transversal al plano de incidencia.

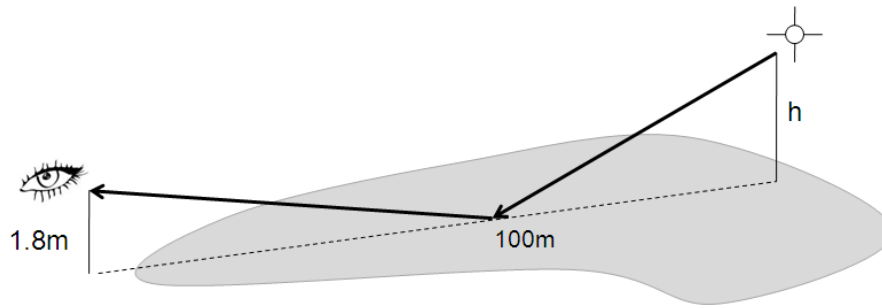
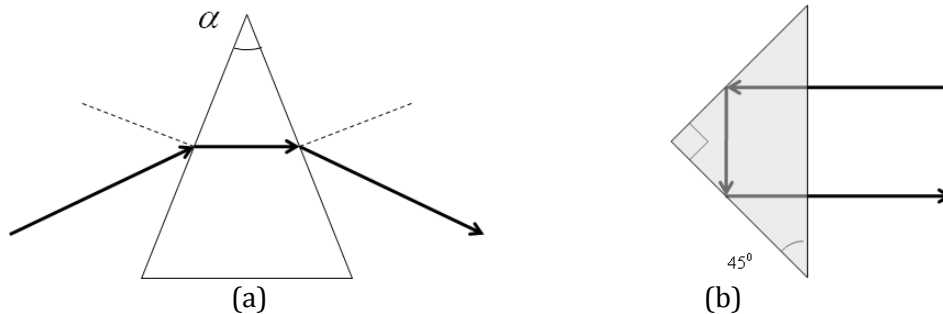


Figura 2

12. El material que conforma una fibra óptica tiene un índice de refracción  $n=1.55$ , calcule el mayor ángulo posible que se puede tener entre el eje de la fibra y un rayo de luz que se propague en ella si se encuentra rodeada de: (a) Aire. (b) Un medio  $n=1.53$ .
13. Calcule el ángulo en el cual debe incidir desde un dieléctrico  $n=1.65$  hacia el aire, un rayo de luz para que el campo eléctrico incidente y el reflejado tengan un desfase de  $90^\circ$  si la onda incidente está polarizada en modo TE. Calcule el porcentaje de energía que se refleja dentro del medio.
14. Una onda con polarización circular dextrógira, incide en forma normal desde el aire sobre un bloque de plexiglás  $\epsilon_r=3.45$ . Calcule el porcentaje de potencia reflejada y transmitida, así como el tipo de polarización de las ondas reflejada y transmitida.
15. Repita el problema anterior, suponiendo que la onda incide con el ángulo de Brewster y que el plano de incidencia corresponde al plano ZY, mientras la frontera entre los medios coincide con al plano ZX y la onda incide desde la izquierda.
16. Un prisma de Brewster está construido, como se muestra en la figura 4a, con un material  $n=1.45$ . Encuentre el ángulo  $\alpha$  y la reflectancia y transmitancia en la cara izquierda del prisma. Calcule las pérdidas por reflexión que se generan en dicha cara.
17. Un prisma se construye con una material que garantiza la reflexión total de un rayo de luz, como se muestra en la figura b. Encuentre el índice de refracción mínimo que debe tener el prisma y la permitividad relativa del material constructivo. Calcule las pérdidas totales por reflexión obtenidas cuando la onda incidente tiene: (a) polarización p, (b) polarización s, (c) polarización circular.



18. En el prisma del problema anterior, encuentre el ángulo de desfase entre el campo eléctrico reflejado y el incidente, así como las pérdidas totales por reflexión obtenidas cuando la onda incidente tiene: (a) polarización p, (b) polarización s.

### Respuestas a los ejercicios

- $\eta = (244 + j435)\Omega$
- $P_2^+ = 95 \frac{mW}{m^2}$   $P_1^- = 5 \frac{mW}{m^2}$   $s = 1.58$   $x_{MAX} = 1.5m$   $x_{MIN} = 0m$
- $R = 0.04$   $T = 0.96$   $\eta = 251\Omega$   $\epsilon_r = 2.25$
- $|E_1^+| = |E_1^-| = 9.7 \frac{V}{m}$   $|H_1^+| = |H_1^-| = 25.8 \frac{mA}{m}$   $\eta_{Cu} = 37m\Omega\langle 45^\circ \rangle$   $\delta_p = 661nm$   
 $P_1^- = 249.93 \frac{mW}{m^2}$   $P_2^+ = 70 \frac{uW}{m^2}$   $ROE = 14450$   $x_{E\_max} = x_{\eta\_max} = 0.75cm$

5. Caso 1:

$$\Gamma = -0.42 = 0.42\langle 180^\circ \rangle \quad \eta_{in} = 154\Omega \quad |E_1^+| = 11.3 \frac{V}{m} \quad |E_1^-| = 4.75 \frac{V}{m} \quad E_{1MAX} = 16.05 \frac{V}{m} \quad E_{1MIN} = 6.56 \frac{V}{m} \quad ROE = 2.52 \quad x_{MIN} = 0cm \quad x_{MAX} = 7.5cm \quad R = 17.6\% \quad T = 82.4\%$$

- Caso 2:

$$\Gamma = -0.12 - 0.23j = 0.3\langle 245^\circ \rangle \quad \eta_{in} = (258 - j152)\Omega = 300\langle -30^\circ \rangle \Omega$$

$$|E_1^+| = 11.3 \frac{V}{m} \quad |E_1^-| = 3.39 \frac{V}{m} \quad E_{1MAX} = 14.7 \frac{V}{m} \quad E_{1MIN} = 7.9 \frac{V}{m}$$

$$ROE = 1.86 \quad x_{MIN} = 12.3cm \quad x_{MAX} = 2.4cm \quad R = 9\% \quad T = 91\%$$

- $v_p = 150 \frac{km}{s}$   $\epsilon_r = 4$   $\sigma = 5.3 \times 10^{-6} \frac{S}{m}$   $\%P_{retorno} = 30.4\%$   $\%P_{disipada} = 18.8\%$   $\%P_{trans} = 50.8\%$   $\eta_{pant} = (271 - j368)\Omega$   $\eta_{diel} = 188.5\Omega$
- Campo eléctrico y magnético

$$E_{z1}^+ = 10^3 e^{j(\omega t - \beta y)} e^{-\alpha y} \vec{a}_z \text{ V/m} \quad H_{x1}^+ = -\frac{10^3}{120\pi} e^{j(\omega t - \beta y)} e^{-\alpha y} \vec{a}_y \text{ A/m}$$

$$E_{z1}^- = -10^3 e^{j(\omega t + \beta y)} e^{-\alpha y} \vec{a}_z \text{ V/m} \quad H_{x1}^- = \frac{10^3}{120\pi} e^{j(\omega t + \beta y)} e^{-\alpha y} \vec{a}_y \text{ A/m}$$

- Coefficientes de propagación

$$\Gamma = -1 \quad \tau = 0 \quad s = \infty \quad x_{max} = 75cm$$

- Vector de Poynting

$$P_{y1}^+ = \frac{10^6}{(120\pi)} e^{-2\alpha y} \vec{a}_y \text{ W/m}^2 \quad P_{y1}^- = -\frac{10^6}{(120\pi)} e^{-2\alpha y} \vec{a}_y \text{ W/m}^2$$

$$P_{y2}^+ = 0 \vec{a}_y \text{ W/m}^2$$

## Para los que desean saber más

Si desea profundizar en los contenidos de este capítulo o encontrar ejercicios complementarios se sugiere revisar la siguiente bibliografía:

Para polarización de ondas EM:

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw-Hill, 2012. Páginas 337-343. ISBN 978-607-15-0783-9.

Para incidencia normal e incidencia oblicua:

Stanley, Marshall, Dubroff, Richard E. Skitek, Gabriel. Electromagnetismo–Conceptos y aplicaciones. Cuarta edición. México: Prentice Hall hispanoamericana, 1997. Páginas 496-522. ISBN 968-880-954-3.

Hayt, William H. Buck, John A. Teoría Electromagnética. Octava edición. México: Mc Graw Hill, 2012. Páginas 347-375. ISBN 978-607-15-0783-9.

