Integración de GeoGebra y Tracker en la enseñanza de la parábola: estrategia pedagógica para estudiantes de grado décimo

Diego Fernando Tabares Herrera

Asesores

Dr. Alexander Munévar García Ph. D en Educación

Dr. Diego Fernando Aranda Lozano Ph. D en Matemáticas Aplicadas

Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD

Escuela de Ciencias de la Educación – ECEDU

Maestría en Educación

2024

Nombre Director de Trabajo de Grado

Jurado

Jurado

2024

Agradecimientos

Expreso mi profundo agradecimiento, en primer lugar, a Dios, por brindarme las fuerzas emocionales y espirituales necesarias para alcanzar este punto, donde puedo concluir una etapa más en mi desarrollo cognitivo. Este trayecto me ha permitido superar de la mejor manera posible los obstáculos que se han presentado.

Quiero dedicar un especial reconocimiento a mi esposa, Erika Tatiana Cadena Jaramillo, cuyo apoyo incondicional ha sido fundamental durante estos años de estudio. Sus palabras de aliento se convirtieron en un constante motivador en cada momento en que sentía flaquear.

Asimismo, agradezco a mis asesores de tesis, Pablo Alexander Munévar García, Ph.D. en Educación, y Diego Fernando Aranda Lozano, Ph.D. en Matemáticas Aplicadas, quienes me brindaron orientaciones pertinentes que enriquecieron significativamente este escrito.

Finalmente, deseo expresar mi gratitud a la UNAD, ya que ha proporcionado una valiosa oportunidad para que sus egresados continúen avanzando en el ámbito de la formación docente.

Resumen

En el ámbito educativo actual, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) se destacan como herramientas esenciales en el proceso de enseñanza de las matemáticas, especialmente al explorar las curvas cónicas, donde el análisis geométrico se vuelve crucial.

A pesar de ello, en la educación media en la República de Colombia, predomina un enfoque algebraico en detrimento del análisis geométrico, limitado por las restricciones de la representación gráfica tradicional.

Villamizar (2014) señala que, a pesar del avance tecnológico, las TIC no se utilizan de manera óptima para acercar a los estudiantes a conceptos matemáticos, situación reflejada en la serie "Vamos a Aprender" del Ministerio de Educación Nacional, que carece de una integración efectiva de las TIC en el estudio de las cónicas.

Los estándares del Ministerio de Educación Nacional resaltan la necesidad de enriquecer el abordaje de las cónicas desde una perspectiva geométrica.

Surge así la propuesta de un estudio más profundo de la cónica asociada a la parábola, mediante una secuencia didáctica respaldada por las TIC.

El objetivo del proyecto es diseñar una secuencia didáctica centrada en GeoGebra y Tracker para profundizar en el análisis geométrico y conceptual de la parábola en estudiantes de décimo grado.

Los resultados de la posprueba respaldan la efectividad del enfoque propuesto, destacando la importancia de reconocer la diversidad de estilos de aprendizaje.

Las recomendaciones sugieren implementar estrategias similares en diversos contextos educativos y continuar la formación docente en el uso de herramientas tecnológicas e innovaciones pedagógicas.

***Palabras clave*:** TIC, parábola, didáctica, GeoGebra, Tracker.

Abstract

In the current educational context, Information and Communication Technologies (ICT) stand out as essential tools in the teaching process of mathematics, particularly when exploring conic curves, where geometric analysis becomes crucial.

However, in secondary education in Colombia, there is a prevailing algebraic approach at the expense of geometric analysis, limited by the constraints of traditional graphic representation.

Villamizar (2014) points out that, despite technological advances, ICT is not optimally utilized to bring students closer to mathematical concepts.

This situation is reflected in the "Vamos a Aprender" series of the Ministry of National Education, which lacks effective integration of ICT in the study of conics.

The standards of the Ministry of National Education emphasize the need to enrich the approach to conics from a geometric perspective.

Thus arises the proposal for a more in-depth study of the conic associated with the parabola through a didactic sequence supported by ICT.

The objective of the project is to design a didactic sequence centered on GeoGebra and Tracker to delve into the geometric and conceptual analysis of the parabola in tenth-grade students.

The post-test results support the effectiveness of the proposed approach, highlighting the importance of recognizing the diversity of learning styles.

Recommendations suggest implementing similar strategies in various educational contexts and continuing teacher training in the use of technological tools and pedagogical innovations.

***Keywords*: ICT, parable, didactic, GeoGebra, Tracker.**

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Apéndices

Introducción

En el contexto actual de la educación, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) se consolidan como instrumentos fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. Este impacto cobra especial relevancia al explorar el estudio de las curvas cónicas, donde el análisis geométrico se torna esencial. Sin embargo, en el ámbito de la educación media en Colombia, prevalece un énfasis algebraico al abordar este tema, relegando el análisis geométrico a un segundo plano debido a las limitaciones de la representación gráfica tradicional con elementos como el tablero, el marcador y la mano alzada. Al respecto, se prentende destacar la relación entre dos signos semióticos como lo son la definición del concepto con su representación gráfica. Lizana y Anteana (2020) llaman a este proceso conversión semiótica la cual es muy importante porque resulta ser la comprensión misma de un nuevo concepto. Este aspecto es acentuado por Duval (2004) estableciendo que cuando se desarrolla una conversión se refleja una transformación externa la cual interpreta de forma explicita una representación incial.

Villamizar (2014) señala que, aunque existen avances tecnológicos y sistemas de geometría dinámica disponibles, no se aprovechan adecuadamente los recursos tecnológicos para facilitar a los estudiantes una comprensión interactiva de los conceptos matemáticos. En este escenario, muchos docentes de matemáticas de instituciones oficiales en Colombia se guían por la serie de libros "Vamos a Aprender" del Ministerio de Educación Nacional.

Sin embargo, al examinar la unidad destinada al estudio de las cónicas para décimo grado, se evidencia un enfoque limitado y la falta de integración efectiva de las TIC.

Los estándares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional delinean competencias específicas que los estudiantes deben adquirir en relación con las cónicas, haciendo hincapié en la identificación visual, gráfica y algebraica de propiedades.

Ante esta situación, surge la necesidad de enriquecer el abordaje de las cónicas, no solo desde la perspectiva algebraica, sino también desde el análisis geométrico.

En este contexto, se propuso un estudio más profundo de la cónica asociada al concepto de la parábola. Este enfoque se materializa mediante una secuencia didáctica respaldada por el uso de las TIC, permitiendo la observación detallada de la curva, aspecto difícil de percibir con métodos tradicionales.

El objetivo general de este proyecto de investigación se enfocó en el diseño de una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de grado décimo, centrada en la integración de las herramientas tecnológicas GeoGebra y Tracker, con el propósito de profundizar en el análisis geométrico y conceptual de la parábola. Además, se plantean objetivos específicos, como la identificación de estándares del Ministerio de Educación pertinentes al estudio de las cónicas, la verificación geométrica de la definición de la parábola con el uso de GeoGebra y Tracker, y la modelación de trayectorias cotidianas relacionadas con las propiedades geométricas de la parábola.

En cuanto a la metodología, el presente trabajo de investigación se enmarcó en un enfoque cuantitativo con un diseño experimental, específicamente un estudio de intervención.

Los resultados obtenidos en la posprueba indican que las preguntas relacionadas con la implementación de la secuencia didáctica muestran diferencias significativas, respaldando la hipótesis de que el tratamiento experimental ha ejercido un impacto notable.

Las conclusiones destacan la efectividad de la secuencia didáctica diseñada, respaldada por la metodología propuesta por Villamizar (2014), para mejorar la comprensión de la parábola en los estudiantes de décimo grado.

La variabilidad en los resultados resalta la importancia de reconocer y abordar las distintas formas de aprendizaje de los estudiantes, mientras que las recomendaciones sugieren la implementación de estrategias similares en otros contextos educativos y la continuación de la formación docente en el uso de herramientas tecnológicas e innovaciones pedagógicas.

Este trabajo buscó trascender las limitaciones de los enfoques convencionales, abriendo nuevas posibilidades para la comprensión de las cónicas en el contexto de la geometría.

Justificación

La importancia y pertinencia del presente proyecto de investigación radica en la identificación de una brecha significativa en las metodologías de enseñanza tradicionales aplicadas al estudio de las matemáticas en el nivel medio, particularmente en el análisis de curvas cónicas como la parábola. La enseñanza convencional, que frecuentemente se limita al uso de tablero y marcador, se centra en un enfoque predominantemente algebraico, dejando a un lado la riqueza del análisis geométrico que es esencial para una comprensión holística de estos conceptos matemáticos.

Este proyecto busca cerrar esta brecha mediante la integración de las TIC, específicamente a través del uso de plataformas como GeoGebra y Tracker. Estas herramientas tienen el potencial de transformar la enseñanza de las matemáticas al permitir una visualización dinámica y una interacción directa con los objetos matemáticos, facilitando así un aprendizaje más profundo y conceptual.

Además, la implementación de las TIC en la enseñanza de la parábola está alineada con los estándares educativos y competencias modernas que enfatizan la necesidad de competencias digitales y un enfoque más integrador y aplicado de las matemáticas. La metodología propuesta busca no solo mejorar el rendimiento académico en matemáticas, sino también preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos prácticos y reales, mejorando su capacidad de aplicar el conocimiento matemático en contextos variados.

La innovación pedagógica es otra piedra angular de este estudio, que introduce métodos de enseñanza alternativos y creativos en un campo que tradicionalmente ha sido visto como rígido y desvinculado de la práctica. Este enfoque innovador no solo tiene el potencial de mejorar la comprensión de las cónicas entre los estudiantes, sino que también contribuye significativamente a la literatura en investigación educativa, ofreciendo nuevas perspectivas y evidencia sobre la efectividad de combinar tecnologías avanzadas con pedagogía matemática.

Objetivos

Objetivo General

Diseñar una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de grado décimo, enfocada en la integración de las herramientas tecnológicas GeoGebra (versión 6.0.829.0) y Tracker (versión 6.1.6), para la enseñanza de la parábola, con el propósito de profundizar en el análisis geométrico y conceptual.

Objetivos Específicos

Identificar los estándares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia pertinentes al estudio de las cónicas, especialmente la parábola, para integrarlos de manera efectiva en una secuencia didáctica mediada por tecnología a partir de los software por GeoGebra y Tracker, con el fin de fortalecer la enseñanza del concepto de la parábola para estudiantes de grado décimo.

Verificar, desde el punto de vista geométrico, la definición que confiere significado al concepto de la parábola, haciendo uso de la mediación tecnológica a partir de los software GeoGebra y Tracker.

Modelar el comportamiento de trayectorias de objetos cotidianos, relacionándolas con las propiedades geométricas de la parábola, a través de la implementación práctica de la mediación tecnológica a partir de los software GeoGebra y Tracker, en el entorno educativo de estudiantes de décimo grado.

Marco Teórico

Antecedentes

Al revisar la literatura científica respecto al problema de investigación que convoca este estudio, se ubica el trabajo llevado a cabo por De Sousa et al. (2022) destaca por su enfoque sistemático en la exploración de la parábola.

Este trabajo, parte integral de una investigación de maestría en curso, se propuso mejorar la enseñanza de la parábola como un componente esencial del conocimiento matemático, mediante la incorporación del software GeoGebra.

La investigación adopta una metodología teórica básica de tipo exploratorio, orientada a proporcionar una visión más profunda de la parábola con el objetivo de enriquecer su enseñanza a través del uso estratégico del software GeoGebra. Esta elección metodológica revela un enfoque reflexivo y analítico por parte de los autores, quienes buscan ir más allá de la mera descripción para explorar las posibilidades pedagógicas de la herramienta.

En cuanto a los resultados obtenidos, el estudio presenta con claridad un conjunto de cinco construcciones realizadas en GeoGebra. Estas construcciones no solo sirven como evidencia tangible de la aplicación práctica de la metodología, sino que también se ofrecen como recursos metodológicos que los docentes pueden emplear en el aula. Esta contribución práctica destaca la utilidad y aplicabilidad de la investigación para el ámbito educativo.

En las conclusiones, los autores reconocen la fase incipiente de su trabajo y la enmarcan dentro del contexto de una investigación de maestría en desarrollo.

Además, expresan la intención de llevar a cabo un proceso más amplio que incluirá el desarrollo de las construcciones propuestas en entornos educativos reales.

Este enfoque sugiere un compromiso continuo con la mejora de la enseñanza de la parábola, respaldado por la recopilación de datos empíricos que informarán un análisis más profundo y una discusión significativa.

Otro estudio, presentado en un artículo por De Oliveira (2023), aborda la temática de las prácticas pedagógicas y los desafíos inherentes a la combinación de tecnologías digitales en la educación matemática.

El estudio tiene como objetivo identificar las dinámicas pedagógicas actuales y entender profundamente tanto los beneficios como los desafíos que conlleva la implementación de herramientas digitales en el contexto educativo.

De manera específica, el autor destaca la influencia positiva de elementos tecnológicos como las computadoras, programas de matemáticas, sitios web y tutoriales en línea en el proceso educativo.

El estudio resalta el acceso libre que estas tecnologías proporcionan a la información matemática, facilitando así el aprendizaje y la aplicación de conceptos. Tanto docentes como estudiantes se benefician de una amplia variedad de recursos educativos, fomentando la innovación y el desarrollo de nuevas prácticas pedagógicas.

La integración de tecnologías digitales no solo optimiza la accesibilidad a la información, sino que también enriquece la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, promoviendo un entorno educativo dinámico y en constante evolución.

El autor enfatiza la importancia de utilizar los medios digitales de manera responsable y educativa, subrayando que el aprovechamiento adecuado de estos recursos puede contribuir significativamente a la construcción de conocimiento y a la mejora de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje en el campo de la educación matemática. Sin embargo, se advierte sobre la necesidad de una implementación cuidadosa y reflexiva

de estos recursos, reconociendo la importancia de abordar los desafíos inherentes y maximizar su utilidad pedagógica de manera ética y responsable. Este enfoque crítico destaca la complejidad del entorno educativo actual y la necesidad de considerar diversas perspectivas en la integración de tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.

El trabajo de Hirata (2022), titulado "Jugar para aprender: el impacto de la tecnología en el rendimiento matemático de los estudiantes", ofrece una perspectiva valiosa sobre los beneficios que la tecnología puede aportar al aprendizaje de las matemáticas, aunque se centra en una población estudiantil distinta a la contemplada en la presente investigación.

Este estudio se propuso analizar detenidamente el impacto del uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente para estudiantes de primero, segundo y tercer grado en un contexto brasileño, utilizando datos experimentales.

La herramienta de software empleada en este estudio fue diseñada con el propósito de que los estudiantes de primaria aprendieran y practicaran aritmética.

El enfoque experimental adoptado permitió evaluar el impacto directo de esta tecnología en el rendimiento matemático de los estudiantes.

Los resultados revelaron un aumento significativo en las puntuaciones de las pruebas de matemáticas para los estudiantes que utilizaron la herramienta de software.

De manera más específica, los estudiantes que participaron en la intervención aumentaron sus puntuaciones en una prueba de matemáticas en 0.56 a corto plazo, justo después de la intervención, y en 0.17 a medio plazo, un año después de su conclusión.

Estos hallazgos sugieren que el uso de la tecnología, en particular la herramienta de software diseñada para el aprendizaje de la aritmética, tuvo un impacto positivo tanto inmediato como a largo plazo en el rendimiento matemático de los estudiantes.

Este estudio concluyó enfatizando el potencial positivo de la tecnología en el proceso educativo, destacando la relevancia de herramientas específicas en el desarrollo de habilidades matemáticas.

Aunque la población estudiada difiere de la presente investigación, estos resultados sugieren un camino prometedor para la aplicación efectiva de tecnologías educativas en el contexto de la enseñanza de las matemáticas.

Estos antecedentes abren una puerta interesante para explorar cómo herramientas similares podrían impactar positivamente en la enseñanza de la parábola a estudiantes de décimo grado.

Un estudio conducido por Dahal et al. (2022) se enfoca en la aplicación de GeoGebra en la enseñanza de transformaciones geométricas, presentando una perspectiva enriquecedora para comprender la utilidad de esta herramienta en el aprendizaje matemático.

El marco teórico adoptado en este artículo se basa en la teoría cognitiva del aprendizaje y la teoría del aprendizaje social de Vygotsky.

El estudio se llevó a cabo con veinte estudiantes de noveno grado en una escuela privada en el Valle de Katmandú, Nepal.

El enfoque pedagógico se centró en diversas instancias de transformaciones geométricas, como reflexión, rotación, traslación y dilatación.

El método de investigación utilizado fue un experimento de enseñanza, que empleó GeoGebra en once episodios para ayudar a los estudiantes a visualizar conceptos abstractos de cambio. La aplicación de GeoGebra se destacó como una herramienta fácil de usar que permitió el aprendizaje por descubrimiento y fomentó la colaboración entre los estudiantes. Además, la herramienta contribuyó significativamente a la visualización de transformaciones geométricas y a la enseñanza y comprensión de conceptos abstractos relacionados.

Los resultados indicaron que GeoGebra no solo sirvió como una herramienta de instrucción efectiva, sino que también promovió la transición del enfoque educativo tradicional centrado en el maestro hacia un enfoque centrado en el aprendiz. Los estudiantes se convirtieron en constructores activos de conocimiento, comunicándose entre sí, siguiendo el proceso de cambio y respetando la autoridad de sus instructores.

En este contexto, GeoGebra se posiciona como una herramienta valiosa para complementar el método tradicional en la enseñanza de las matemáticas, respaldando la evolución del sistema educativo hacia un modelo más participativo y orientado al estudiante.

Una investigación llevada a cabo por Sudihartinih y Purniati (2019) se propuso evaluar la mejora en la comprensión de los conceptos de la parábola entre estudiantes, mediante un diseño cuasiexperimental que abordó varios aspectos clave del proceso educativo.

Este estudio adoptó un enfoque meticuloso que incluyó la descripción de la población, la preparación de materiales y herramientas didácticas, la aplicación de pasos estructurados, la recopilación de datos, el análisis estadístico y la presentación de hallazgos.

La investigación se dividió en dos clases: la experimental, que incorporó elementos manipulativos, y la de control, que no hizo uso de los mismos.

Los instrumentos empleados para la recopilación de datos abarcaron una prueba, una guía de entrevistas y un cuestionario.

El análisis de datos se centró en comparar la comprensión de los conceptos de parábola entre los estudiantes que utilizaron métodos manipulativos y los que no.

El estudio destacó el uso de manipulativos como bocetos y tablas de madera, utilizados para representar gráficos de parábolas y explorar conceptos clave como el enfoque, el punto de vértice, la directriz, el eje de coordenadas y la cuadrícula.

La evidencia recolectada insinúa que el uso de manipulativos en la enseñanza de los conceptos asociados a la parábola condujo a una mejora significativa en la comprensión comparada con aquellos estudiantes que no emplearon dichos recursos.

El análisis reveló que los estudiantes que se beneficiaron de materiales manipulativos demostraron habilidades geométricas más sólidas en la comprensión de los conceptos, además, la actitud positiva de estos estudiantes hacia el aprendizaje con manipulativos se asoció con un rendimiento académico más destacado. Estos resultados sugieren que la introducción de manipulativos en la enseñanza no solo mejora la comprensión conceptual, sino que también ejerce un influjo positivo en la disposición y el rendimiento académico de los estudiantes en el estudio de las parábolas.

Castillo et al. (2021) presentan un trabajo que se enfocó en la enseñanza del movimiento parabólico, explorando una metodología centrada en el aprendizaje por descubrimiento a través de un simulador interactivo.

La investigación, llevada a cabo con estudiantes de décimo grado del Colegio Hernando Caicedo de la Paila Valle, estableció una comparación entre un grupo control que recibió educación tradicional y un grupo experimental que empleó el simulador interactivo.

El artículo se fundamenta en la teoría del aprendizaje por descubrimiento, enfatizando la importancia de que el contenido sea aprendido de manera autónoma, requiriendo una intervención activa por parte de los estudiantes.

Este enfoque es defendido por Bruner y su conexión con el constructivismo, señalando que el proceso de aprendizaje se basa en la construcción activa de habilidades por parte de los estudiantes. Asimismo, se subraya la importancia de los experimentos demostrativos para que los aprendices perciban la física como una ciencia natural.

La metodología incluyó talleres, ejercicios prácticos, guías de laboratorio y actividades de retroalimentación y cierre. Se llevó a cabo un análisis de las características de los estudiantes, y se hizo referencia a estudios previos que respaldan la eficacia del aprendizaje por descubrimiento.

Los resultados revelaron un aumento significativo en el rendimiento de los estudiantes que utilizaron el simulador interactivo, destacando la eficacia de la estrategia pedagógica basada en el aprendizaje por descubrimiento.

El grupo experimental mostró una mejora sustancial, pasando del 23.33% al 53.33% en respuestas correctas, con una ganancia normalizada de aprendizaje del 0.80.

Estos resultados indican que la aplicación del método de descubrimiento resultó ser efectiva en la enseñanza del movimiento parabólico, proporcionando un respaldo valioso para los procesos de enseñanza de la física en estudiantes de educación media.

El estudio concluye que la enseñanza del movimiento parabólico mediante un simulador interactivo desde la perspectiva del aprendizaje por descubrimiento, condujo a un aprendizaje significativo y a una mejora en las habilidades socioemocionales de los estudiantes, validando la efectividad de esta metodología en el entorno educativo.

En la misma línea, el estudio de Ángel y Rivas (2020), busca analizar las percepciones sobre el movimiento parabólico en estudiantes de tercero de primaria en Mérida, Venezuela.

Empleando un enfoque de investigación-acción en cuatro fases, se emplearon pruebas diagnósticas, observación participante y entrevistas para comprender y mejorar la enseñanza. Esta combinación de métodos proporcionó una visión completa de las concepciones y la eficacia de las estrategias educativas implementadas.

Las deficiencias identificadas en la prueba diagnóstica y observaciones iniciales señalan problemas en la interacción docente-estudiante, afectando la construcción de conocimientos y su aplicación a la vida cotidiana. Las dificultades incluyen carencias en geometría, operaciones básicas, resolución de ecuaciones, trigonometría y comprensión lectora.

La limitada carga horaria y la falta de continuidad en el aprendizaje también son desafíos.

Durante la aplicación de estrategias, se introdujo la resolución de problemas que abordaban análisis, comprensión lectora y asociación de fenómenos, promoviendo una participación activa y reflexiva. La observación reveló un cambio positivo en la ambiente aula, destacando la importancia de la participación individualizada y la necesidad de adaptar estrategias según las preferencias y habilidades de cada grupo de estudiantes.

La planificación docente, coherencia entre estrategias y evaluación, así como la reflexión constante sobre la práctica docente, emergen como elementos cruciales.

Se subraya la diversidad de estrategias, incluyendo demostraciones, teoría, gráficos y actividades lúdicas para enriquecer la construcción del conocimiento.

La inclusión de juegos se destaca como motivadora, fomentando un ambiente dinámico y participativo en el aula. La conclusión enfatiza la importancia de la variedad y adaptabilidad de las estrategias, con el objetivo de hacer que el proceso de aprendizaje sea más dinámico y atractivo para los estudiantes.

Gutiérrez y Castillo (2020) en su investigación, buscan mejorar la aplicación de recursos didácticos en la enseñanza de las ciencias a través del uso de tecnologías digitales. Describen dos simuladores computacionales creados con GeoGebra, diseñados para explorar movimientos parabólicos y armónicos simples, y los definen como objetos de aprendizaje.

El artículo detalla dos planes de lecciones donde estos simuladores pueden integrarse. Cada plan consta de tres momentos: reflexión sobre los aspectos teóricos, interacción con el fenómeno modelado mediante el simulador, y la derivación de conclusiones tras la actividad.

En última instancia, el trabajo pretende proporcionar apoyo a los profesores que desean incorporar tecnologías digitales en sus clases, al mismo tiempo que busca inspirarlos para que generen sus propios materiales didácticos. Se considera que estos simuladores son recursos digitales valiosos para profesores de matemáticas y ciencias que pretenden vincular la tecnología en sus prácticas pedagógicas.

En consonancia con los hallazgos, se sugiere que los profesores participen en un desarrollo profesional continuo para mejorar sus conocimientos y habilidades en el desarrollo y uso de simuladores digitales, especialmente en el contexto de la educación en matemáticas y ciencias.

En su investigación, Guzmán (2022) aborda el desafío de modelar fenómenos reales mediante simuladores incorporados en su experiencia de aula.

Aunque su enfoque no coincide completamente con los objetivos de esta investigación, su estudio ofrece elementos valiosos para el análisis.

Guzmán emplea simuladores desarrollados con GeoGebra para abordar movimientos parabólicos y armónicos simples, presentándolos como objetos de aprendizaje. Proporciona dos planes de lecciones que integran estos simuladores, con momentos dedicados a la reflexión teórica, la interacción con el simulador y la derivación de conclusiones.

El objetivo principal del artículo de Gutiérrez y Castillo (2020) es orientar a los docentes interesados en integrar tecnologías digitales en sus aulas, proporcionándoles motivación para desarrollar sus propios recursos educativos. Aunque su enfoque no se alinea completamente con los objetivos de esta investigación, proporciona elementos útiles para el análisis.

Guzmán (2022) sostiene que modelar fenómenos reales mediante herramientas tecnológicas es un desafío importante para la nueva generación de profesores.

Su experiencia de aula se centra en la modelación de una parábola como lugar geométrico, utilizando manipulaciones algebraicas a través de GeoGebra y Tracker. Adopta una perspectiva semiótica de las matemáticas y valida la importancia de utilizar modelos emergentes de la actividad matemática.

Es esencial destacar que la conversión de representaciones semióticas permitió que los estudiantes se acercaran dinámicamente al objeto matemático.

El uso de software en procesos matemáticos facilita la reorganización de actividades cognitivas, lo que se reflejó en la experiencia de aula, donde las estudiantes demostraron un mayor dominio de los elementos matemáticos involucrados.

El trabajo en equipo favoreció la construcción de hipótesis argumentativas, pero la intervención del docente fue crucial para guiar a las estudiantes en momentos de desviación o dificultad.

A pesar de no tener como objetivo construir el concepto de parábola, la actividad requirió que las estudiantes manejaran operaciones algebraicas y se familiarizaran con GeoGebra.

Guzmán destaca la importancia de que los estudiantes importen videos al usar Tracker para rastrear masas puntuales, lo que agilizaría la elaboración del modelo algebraico o tabular.

Resulta necesario en este punto, referirse a la manera de abordar, desde lo pedagógico, el proceso de enseñanza aprendizaje de la parábola apoyados en una secuencia didáctica, desde una metodología activa.

Las metodologías activas comprenden un conjunto de enfoques pedagógicos que persiguen la eficacia en el aprendizaje de los estudiantes, al mismo tiempo que estimulan la participación activa, la colaboración y la aplicación práctica de conocimientos (Márquez, 2021).

En este contexto, la eficacia se combina con el estímulo a la participación activa, el fomento de la colaboración y la aplicación práctica de conocimientos. Estas estrategias no buscan solo obtener información, sino también involucrar directamente al estudiante, lo que facilita una comprensión más profunda y una internalización más efectiva de los contenidos.

Rodríguez et al. (2017) aportan valiosas reflexiones sobre las metodologías activas, destacando variantes como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), el Método de Casos (MdC), el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPy) y el Aprendizaje Colaborativo.

En el caso del ABP, se lleva a cabo una investigación diagnóstica para identificar las concepciones de docentes y alumnos sobre la resolución de problemas. Los resultados revelan una conexión entre la efectividad de los métodos y procesos que favorecen la repetición, inclinándose hacia una metodología más conductista que constructivista.

El MdC se distingue como un método centrado en la participación activa, cooperativa y el diálogo democrático de los estudiantes frente a situaciones reales. Sus dimensiones abarcan el papel activo de los estudiantes, el nivel de cooperación y la capacidad de dialogar para alcanzar consensos.

En cuanto al ABP y, coloca al estudiante como protagonista del proceso educativo, mientras el profesor actúa como mediador. Este método implica contextos de aprendizaje reales, comprometiendo a los estudiantes en el diseño, resolución de problemas, toma de decisiones y actividad investigadora. A diferencia del ABP, puede extenderse a lo largo de todo un semestre e incluso superarlo como continuación en el próximo.

Finalmente, el Aprendizaje Colaborativo se define como un sistema de interacciones cuidadosamente diseñado que organiza e induce la influencia recíproca entre los miembros de un equipo. Este enfoque refleja una dinámica planificada para fomentar la colaboración efectiva entre los estudiantes.

La comprensión y diseño de una secuencia didáctica destinada a fortalecer la enseñanza aprendizaje de la cónica de la parábola desde una mirada geométrica se encuentra fundamentada en diversos desafíos y problemáticas que rodean este propósito educativo.

Valbuena et al. (2021) señalan un dilema significativo: a pesar de que los docentes en Colombia reconocen la importancia de la tecnología en la calidad educativa, la falta de capacitación en este ámbito impide la integración efectiva de recursos digitales en sus prácticas educativas. Esta carencia de conocimiento sobre el potencial académico de los recursos digitales limita las oportunidades de aprendizaje tanto dentro como fuera del aula física.

Sánchez (2015) aporta otra dimensión al señalar la relevancia de las cónicas, específicamente la parábola, en la comprensión de diversas áreas del conocimiento como la física. La parábola, por ejemplo, desempeña un papel crucial en el estudio del movimiento parabólico. Este enfoque resalta la importancia de ir más allá del simple manejo algebraico de las ecuaciones, subrayando la conexión interdisciplinaria que la geometría cónica puede tener con otras disciplinas.

Herrera et al. (2012) abogan por un cambio en el paradigma educativo, desafiando la enseñanza tradicional pasiva hacia un enfoque que fomente la reflexión y el pensamiento crítico. Además, resaltan la necesidad de integrar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Este llamado a una enseñanza más activa y reflexiva se alinea con la propuesta de diseñar una secuencia didáctica que involucre interactividad y participación activa de los estudiantes.

Por su parte, Murillo (2020) destaca la importancia de contextualizar las interacciones en el aula de matemáticas a la realidad actual para despertar el interés y la empatía de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La conexión entre los conceptos matemáticos y su aplicación en situaciones del mundo real puede mitigar la apatía que a menudo se asocia con esta disciplina.

Barrios (2018), en una investigación específica sobre la enseñanza de la cónica de la parábola, identifica un desequilibrio en el enfoque pedagógico. Mientras los estudiantes priorizan el desarrollo de transformaciones algebraicas para obtener gráficas, el proceso inverso, es decir, la comprensión geométrica de la parábola, no se aborda de manera suficiente.

Una investigación de Rincón (2023) aborda la creciente necesidad de optimizar los entornos virtuales de aprendizaje (VLE) en las instituciones de educación superior, destacando la importancia de la navegabilidad y usabilidad como factores críticos para el éxito educativo.

Al utilizar un conjunto de datos provenientes de la Universidad UNAD y aplicar técnicas avanzadas basadas en la teoría de grafos, el estudio se centra en evaluar cómo los estudiantes y profesores interactúan con los recursos disponibles en los VLE.

Este enfoque no solo resalta la relevancia de los recursos educativos en línea, sino que también subraya la necesidad de entender las dinámicas de uso para mejorar la experiencia de aprendizaje.

La implementación del algoritmo *Desarrollo rápido de comunidades en redes grandes* (desarrollado por Vincent et al., 2008, como se citó en Rincón, 2023), es particularmente notable. Este algoritmo se emplea para identificar comunidades dentro de los VLE, lo que es esencial para comprender cómo los usuarios se agrupan y colaboran dentro de estos entornos.

La capacidad de identificar estas comunidades permite a los investigadores y administradores educativos detectar patrones de uso y estructuras de interacción que son fundamentales para optimizar la navegabilidad y mejorar la experiencia de usuario en general.

Además, la participación de evaluadores expertos en experiencia de usuario y arquitectura de software añade una capa adicional de profundidad al análisis.

Esta colaboración interdisciplinaria asegura que el estudio no solo se base en datos cuantitativos, sino que también incorpore una comprensión cualitativa de cómo los aspectos técnicos de los VLE afectan la experiencia de aprendizaje.

Esta perspectiva es crucial para identificar debilidades y fortalezas en las estrategias pedagógicas actuales, así como para proponer mejoras informadas.

Los hallazgos de este estudio tienen implicaciones significativas para la toma de decisiones en las instituciones de educación superior.

Al identificar las áreas de mejora, las instituciones pueden implementar cambios estratégicos en sus VLE para mejorar la usabilidad y navegabilidad, lo que a su vez puede tener un impacto positivo en los indicadores clave de rendimiento.

Este enfoque basado en datos para mejorar los entornos de aprendizaje virtual subraya la importancia de una continua evaluación y adaptación de las estrategias pedagógicas para satisfacer los requerimientos cambiantes de educandos y docentes.

Estos hallazgos y desafíos señalan la necesidad de diseñar estrategias didácticas que aborden estas problemáticas, integrando tecnología de manera efectiva, contextualizando los conceptos matemáticos y fomentando una comprensión integral de la parábola desde una perspectiva geométrica.

Por su parte Restrepo y Martínez (2023) presentan un estudio que se enfoca en la integración efectiva de tecnologías educativas en el currículo de matemáticas, centrándose en el impacto del Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) Genios en el aprendizaje de operaciones básicas con números racionales en estudiantes de séptimo grado.

A través de un diseño descriptivo y un enfoque mixto longitudinal, el análisis comenzó con una evaluación de la comprensión conceptual preexistente de los estudiantes, estableciendo un punto de partida claro para medir el impacto posterior de la implementación del OVA Genios como estrategia didáctica.

La adopción de Genios marcó un punto de inflexión significativo en los resultados de aprendizaje.

La mejora observada tras la integración de este recurso en una clase magistral refleja su potencial como herramienta didáctica, trascendiendo la simple presentación de contenidos para convertirse en un catalizador de la comprensión y el interés de los estudiantes.

Este cambio notable sugiere que Genios no solo enriqueció la experiencia educativa al presentar los conceptos de una manera más atractiva y accesible, sino que también fomentó una mayor interacción y participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

El éxito de Genios en mejorar la resolución de problemas con números racionales destaca la importancia de las herramientas digitales en la educación contemporánea.

Al servir como un puente entre la teoría y la práctica, Genios demostró cómo la tecnología puede ser utilizada para reforzar la comprensión de conceptos matemáticos complejos, ofreciendo a los estudiantes una plataforma interactiva para explorar y aplicar estos conceptos en contextos variados.

Este enfoque práctico y participativo es primordial para el fomento de capacidades de solución de problemas, un aspecto vital en la educación matemática que trasciende la mera memorización de fórmulas y procedimientos.

Además, el estudio subraya el valor de los OVA como Genios en el diseño curricular de matemáticas, donde la integración de tecnologías educativas puede transformar la enseñanza tradicional.

Al proporcionar experiencias de aprendizaje dinámicas y personalizadas, los OVA como Genios no solo facilitan la adquisición de conocimientos, sino que también promueven habilidades de pensamiento crítico y creatividad entre los estudiantes.

Esta capacidad de adaptar y responder a las necesidades individuales de aprendizaje mediante el uso de tecnologías educativas representa un avance significativo en la forma en que se enseñan y aprenden las matemáticas.

Algunas Consideraciones sobre las Cónicas

Baltus (2019) señala que las cónicas de Apolonio representan una contribución significativa a las matemáticas griegas, y la traducción del comentario de Eutocio sobre las cónicas evidencia la interrelación entre ambas obras y sus respectivos autores.

Aunque Arquímedes no redactó un tratado independiente sobre las cónicas, su extensa obra contiene información relacionada con estas curvas geométricas.

La aproximación diofántica de las cónicas se refiere al estudio de los puntos reales de una cónica que son más difíciles de aproximar mediante puntos racionales de baja altura, siendo el comportamiento de la aproximabilidad, el espectro de Lagrange y el espectro de Markoff variables en estas circunstancias.

En la geometría griega, el estudio de las secciones cónicas no ofrece una respuesta directa en los textos antiguos, y sus aplicaciones prácticas, como en relojes de sol y órbitas planetarias, se descubrieron más tarde.

El universo de las cónicas abarca diversos aspectos, como geometría euclidiana y proyectiva, polaridades y lápices, geometría afín, y problemas especiales.

En la Europa moderna temprana, el estudio de las secciones cónicas se inició con la publicación de versiones traducidas de los primeros cuatro libros de las Cónicas de Apolonio en el siglo XVI. La traducción de Urbino por Commandino en 1566 desempeñó un papel influyente al introducir las secciones cónicas en la comunidad matemática europea.

Los libros 5, 6 y 7 de las Cónicas fueron descubiertos posteriormente en manuscritos árabes, ampliando así el conocimiento sobre las secciones cónicas. No obstante, el libro 8 de las Cónicas parece haberse perdido, llevando a los matemáticos a lo largo de los siglos a proponer sus propias restauraciones (Baltus, 2019).

Según Pierce (2022), una sección cónica se genera al intersecar un cono con un plano, dando lugar a varias formas específicas:

Elipse: resultado de la intersección de un cono y un plano que atraviesa ambas mitades del cono, formando una curva cerrada simétrica respecto a dos ejes perpendiculares.

Parábola: sección cónica creada por la intersección de un cono y un plano paralelo a uno de los lados del cono, generando una curva abierta simétrica respecto a su vértice.

Hipérbola: sección cónica formada por la intersección de un cono y un plano que corta ambas mitades del cono, pero con un ángulo más pronunciado que el de una elipse, dando lugar a una curva abierta simétrica respecto a su centro.

La Parábola

Para Gaspar de Alba et al. (2012), los indicios iniciales acerca de la parábola remontan al siglo quinto antes de Cristo, siendo los pitagóricos los primeros en mencionarla. Sin embargo, su conceptualización difiere de la que empleamos en la actualidad; para ellos, la parabolé consistía en "yuxtaponer a un segmento dado, según un ángulo dado, un paralelogramo que sea igual (en área) a un triángulo dado", equivalente en la actualidad a solucionar $ay = S$ (De Guzmán, 1986, como se citó en Gaspar de Alba et al., 2012).

Gaspar de Alba et al. (2012) señalan que a Menaechmus (380–320 a. C.) se le reconoce por haber descubierto las secciones cónicas en la forma en que las entendemos hoy, obtenidas al cortar un cono recto con un plano alineado con su generatriz, lo que representa una aproximación de la vía genética. Sin embargo, no es hasta el siglo II a. C. que Apolonio de Perga, un matemático griego, desarrolló el concepto del cono circular oblicuo de dos hojas. Como pionero en el estudio de las curvas cónicas, Apolonio introdujo conceptos como la normal a una curva, la evoluta y el centro de curvatura, empleando métodos exclusivamente sintéticos para establecer una descripción más rigurosa (Gaspar de Alba et al., 2012).

La Geometría Analítica, que se apoya en herramientas algebraicas para derivar representaciones analíticas de figuras geométricas, fue pionera por René Descartes en su libro "Géometrie", publicado en 1637. En esta obra, Descartes proporcionó representaciones analíticas de una variedad de curvas con geometría conocida.

Durante los siglos XVI al XVIII, diversos matemáticos contribuyeron al enriquecimiento de esta teoría, que hoy se fundamenta en el empleo de diversos sistemas de coordenadas, como se menciona en Gaspar de Alba et al. (2012).

La revisión de textos que Gaspar de Alba et al. (2012) realizan al respecto del concepto de parábola, encontró que, en la mayor parte de ellos, se conceptualiza la parábola de dos maneras: como la curva generada al cortar un cono con un plano inclinado, excluyendo el vértice y siendo paralelo a una única generatriz; y como el conjunto de puntos equidistantes de un foco y una recta fija (directriz).

A pesar de abordar los cortes del cono, definir los elementos de la parábola, derivar su ecuación a partir de estos elementos y viceversa, y mencionar propiedades que la definen como lugar geométrico, los textos hacen referencia a figuras históricas como Apolonio, Arquímedes, Kepler, Galileo, Descartes o Newton, relacionando la parábola con la ecuación de segundo grado en *x e y*.

No obstante, las actividades propuestas no están configuradas para que los estudiantes descubran estos conceptos por sí mismos.

Esta limitación señala problemas en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de parábola.

Calderón y Londoño (2021) identificaron que en la actualidad existen numerosas evidencias que indican problemas en la comprensión de las cónicas por parte de estudiantes de educación media y universitaria. En el caso específico de la parábola, se observa que muchos estudiantes tienden a abordarla de manera algorítmica, centrando su enfoque en un proceso puramente algebraico y memorístico, descuidando el análisis conceptual. Se señala el desconocimiento por parte de los estudiantes de los componentes que conforman la parábola, lo que resulta en la incapacidad de relacionar analíticamente dichos elementos (Calderón y Londoño, 2021).

Durante el primer acercamiento de los educandos a la idea de lugar geométrico dentro de escenarios algebraicos, suele generar una impresión negativa, ya que “ocasiona que los estudiantes se dediquen a realizar cálculos y no logren identificar dos elementos fundamentales del concepto: la dependencia entre cada punto generado y la condición geométrica dada, así como la necesidad de dar como respuesta todos los elementos del conjunto” (Calderón y Londoño, 2021, pp. 4-5).

En este sentido, los autores ponen de manifiesto la problemática común en la enseñanza de la parábola, donde los estudiantes, al centrarse en cálculos puramente algebraicos, pueden pasar por alto aspectos fundamentales del concepto.

La falta de atención a la dependencia entre los puntos generados y las condiciones geométricas asociadas impide una comprensión profunda.

Es esencial que los estudiantes no solo realicen cálculos mecánicos, sino que también interioricen la relación intrínseca entre los elementos de la parábola y comprendan cómo estas curvas se derivan de condiciones geométricas específicas.

Fomentar la conexión entre el cálculo algebraico y la interpretación geométrica podría ser clave para superar este desafío, permitiendo a los estudiantes no solo encontrar respuestas numéricas sino también entender la esencia geométrica y la interrelación de los elementos en juego.

Se han identificado otras dificultades en la comprensión y enseñanza de la parábola. Calderón y Londoño (2021) han indicado que estas dificultades incluyen las múltiples formas de representación que los estudiantes emplean para abordar la temática. Además, el hallazgo revela que los profesores tienden a utilizar pocas estrategias analíticas al enseñar las cónicas. Este panorama sugiere que los problemas en el conocimiento de la parábola como lugar geométrico podrían derivar de enfoques pedagógicos.

En una investigación con profesores de matemáticas, se destaca que algunos docentes tienen conceptos difusos sobre la parábola como lugar geométrico, llegando a confundir la representación gráfica de la función cuadrática con la parábola como lugar geométrico, evidenciando la tendencia a equiparar la representación con el objeto, lo que podría impactar negativamente en la calidad de la enseñanza de estos conceptos matemáticos (Calderón y Londoño, 2021).

Estas dificultades por parte de los profesores limitan la eficacia de su enseñanza.

Al respecto, Calderón y Londoño (2021) citan a Van Hiele quien indica, “Obviamente los estudiantes, por sí solos, no podrían realizar un aprendizaje, por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén dirigidas hacia los conceptos y propiedades que deben estudiar" (p.5).

Este enfoque sugiere que la eficacia del aprendizaje no solo depende de la disposición individual del estudiante, sino también de la calidad y orientación de las actividades pedagógicas propuestas.

Es imperativo en este punto resaltar la importancia, para el caso que atañe a esta investigación, la construcción de una secuencia didáctica efectiva que dirija el esfuerzo de los estudiantes hacia los aspectos más relevantes y fundamentales del contenido a aprender, optimizando así el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En relación con las secuencias didácticas que se fundamentan en un enfoque pedagógico centrado en el estudiante, Puga y Jaramillo (2017) argumentan que la implementación de una metodología activa en la construcción del conocimiento se fortalece al sugerir que, para desviarse de los paradigmas tradicionales, es crucial incorporar estrategias de enseñanza participativas desde el inicio del proceso educativo. Esto incluye la creación de problemas contextualizados y la identificación de procesos particulares.

El proceso concluye con la recopilación de datos durante la resolución de problemas, etapa en la que se incorporan nuevas áreas del conocimiento mediante estrategias interdisciplinarias.

Este enfoque sugiere que, desde el inicio del proceso de aprendizaje, se implementen estrategias participativas que involucren activamente a los estudiantes.

Un elemento crucial es la presentación de problemas contextualizados, estableciendo una conexión directa entre los conceptos académicos y situaciones del mundo real. Identificar procesos esenciales durante este proceso promueve una comprensión más profunda, ya que los estudiantes no solo resuelven problemas, sino que también comprenden los métodos y razonamientos detrás de las soluciones.

El cierre del proceso implica la redacción de datos en la resolución de problemas, enfatizando la importancia de comunicar efectivamente los resultados alcanzados. En este sentido, Puga y Jaramillo (2017) destacan que este enfoque no se limita a la adquisición de conocimientos aislados, sino que abraza la interdisciplinaridad al incorporar nuevas áreas del saber. La conexión entre disciplinas fortalece la comprensión integral y subraya la relevancia de aplicar el conocimiento en contextos más amplios.

Explorando la perspectiva del aprendizaje basado en retos, Rodríguez et al. (2021), resaltan la integración de esta metodología en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje de la escuela activa.

El Aprendizaje Basado en Retos (ABR) emerge como un enfoque que capacita al estudiante para desempeñarse como un participante activo y continuo en su propio proceso de aprendizaje. Caracterizado por su enfoque crítico y reflexivo, el estudiante se ve facultado para abordar y resolver desafíos inherentes a situaciones cotidianas.

Según Catalán et al. (2023), el discurso dialógico en el aula debe estar enfocado desde la mediación, convirtiéndose en el camino eficaz para establecer, dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, la socialización de saberes entre el docente y el estudiante o entre pares.

En el estudio desarrollado por Villamizar (2014) sobre la creación de una secuencia didáctica para el estudio de la elipse, se propone que el estudiante debe adoptar una actitud proactiva, mientras que el maestro debe actuar como su guía. La dirección de las acciones no implica emitir órdenes, sino proporcionar al estudiante los conocimientos previos y las pautas necesarias para alcanzar la comprensión de los conceptos.

En consonancia con esta perspectiva, se sostiene que, para fomentar la actitud activa del estudiante, es necesario desarrollar una estrategia de clase que facilite la resolución de problemas.

Frente a la complejidad de ciertos escenarios que pueden presentarse en matemáticas al tratar problemas específicos, se sugiere adoptar el desarrollo de cualquier tema de estudio mediante la aplicación de métodos heurísticos y de niveles jerárquicos para la enseñanza de la geometría, como los que propusieron los esposos Van Hiele (Villamizar, 2014).

Adicionalmente, Villamizar (2014) establece que, siguiendo los principios de la escuela activa, J. Piaget destacó la importancia crucial de la acción en el desarrollo del pensamiento.

Simultáneamente, Hans Aebli sugirió que los cursos de acción son un método efectivo para educar a los estudiantes, utilizando actividades orientadas específicamente hacia el desarrollo de conceptos.

La perspectiva presentada por Villamizar (2014) refleja una orientación hacia la pedagogía activa, destacando la influencia de pensadores como J. Piaget y Hans Aebli. Piaget, un psicólogo suizo, postuló la importancia de la acción como un componente fundamental en el proceso de pensamiento. Esta idea sugiere que el aprendizaje es más efectivo cuando los estudiantes participan activamente en experiencias prácticas que les permiten construir su comprensión de los conceptos.

Por otro lado, la propuesta de Hans Aebli sobre los cursos de acción como una forma de enseñanza, conecta directamente con la noción de aprendizaje basado en la acción.

En este enfoque, se promueve la idea de que los estudiantes aprenden mejor cuando se involucran en actividades prácticas y orientadas a la construcción de conceptos. Aebli aboga por dirigir las acciones del estudiante hacia la construcción activa de su conocimiento.

Si se miran en conjunto, estas perspectivas respaldan la idea de que el aprendizaje más efectivo ocurre cuando se combina la teoría con la práctica, permitiendo que los estudiantes no solo adquieran conocimientos teóricos, sino que también participen en acciones que les permitan interiorizar y aplicar esos conocimientos de manera significativa en su proceso educativo.

Villamizar (2014) se embarcó en la tarea de diseñar las actividades siguiendo el modelo didáctico propuesto por Cuevas y Pluvinage, el cual abarca diversos aspectos clave.

Entre estos, se destaca la importancia de la acción como punto de partida, la contextualización del problema, la verificación de los resultados, la subdivisión del problema en componentes más manejables, la aplicación de operaciones inversas, la exploración de diversas alternativas de solución, la cuidadosa selección y presentación de problemas, la facilitación mínima para fomentar la autonomía, la inclusión de diferentes registros de representación semiótica, y el análisis profundo y complejo del concepto en cuestión.

Este enfoque integral reconoce la diversidad de aspectos que contribuyen a un aprendizaje significativo y efectivo.

Cada aspecto del modelo didáctico de Cuevas-Pluvinage es presentado por Villamizar (2014) de manera concreta, para que el lector pueda tener clara la referencia que el autor utilizó en el diseño de sus actividades.

La acción. Este es el primer elemento destacado, enfocándose en lo importante de la participación activa del educando en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En el entorno del salón de clases, se resalta la necesidad de que los estudiantes participen activamente, especialmente en la solución de problemas que se introducen de forma gradual y controlada. Según este enfoque, la acción constante no solo permite a los estudiantes resolver problemas concretos, sino también asimilar e interiorizar los conceptos clave (Villamizar, 2014).

Un ejemplo ilustrativo de este principio se encuentra al abordar la enseñanza de la elipse como una curva cónica, se recomienda comenzar con un contexto histórico, explicando cómo se forma la elipse a través de la sección de un cono con un plano. De esta manera, la acción de realizar este proceso permite que el estudiante asimile los conceptos relacionados y comprenda la conexión inherente entre la elipse y el cono.

Otra aproximación sugerida es a través de definir la elipse como un lugar geométrico mediante actividades interactivas en GeoGebra. En este escenario, los estudiantes interactúan y realizan acciones simuladas que culminan en el trazado de una elipse, permitiendo que la acción sea un vehículo para que los estudiantes adquieran una aptitud activa en lugar de ser meros espectadores en el salón de clases.

Problema en contexto. Un aspecto fundamental del enfoque didáctico implica la introducción de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas contextualizados, cuidadosamente seleccionados para captar el interés del estudiante. Villamizar (2014) indica que es común que los estudiantes cuestionen la utilidad de ciertos conceptos matemáticos y se preguntan ¿para qué me sirve esto?

Se ha observado que, en muchos casos, las aplicaciones prácticas de la matemática se dejan para el final del tema, y debido a las restricciones de tiempo en la enseñanza, a menudo se descuidan. Sin embargo, estas aplicaciones son esenciales para otorgar significado funcional a las matemáticas en la cotidianidad.

Por lo tanto, es esencial empezar con un problema que refleje un escenario real, plantear ejercicios que permitan soluciones estructuradas y coordinadas, y que finalmente guíen hacia la comprensión del concepto matemático buscado (Villamizar, 2014).

Un ejemplo específico de cómo implementar esto en el estudio de la elipse es sugerir a los estudiantes diseñar un jardín elíptico usando el método del jardinero. Este método consiste en fijar dos postes en el suelo, conectarlas con un hilo de longitud mayor a la distancia entre ellos y, moviendo el hilo, dibujar la elipse. Al medir la distancia de cada poste fijo a un punto cualquiera sobre la elipse y sumar estas distancias, se observa que la suma permanece constante, definiendo así la elipse como un lugar geométrico. Este método práctico y visual ayuda a los estudiantes a entender la propiedad geométrica de la elipse.

Comprobar los resultados. Verificar los resultados de una resolución de problemas es una sugerencia clave. Después de resolver un problema, se insta al estudiante a confirmar que los resultados obtenidos tengan coherencia lógica y estén alineados con la naturaleza del problema inicial (Villamizar, 2014).

Dividir en subproblemas. En esta fase, Villamizar (2014) sostiene que entender un concepto de manera acabada o ya definida limita la participación activa del estudiante en su construcción. Por ende, es crucial desglosar el problema en subproblemas que muestren las operaciones intermedias, facilitando así la integración gradual de la solución completa.

En este contexto, un plan de acción que distribuya gradualmente los ejercicios facilitará que el estudiante alcance la solución o construcción de los conceptos de forma sistemática y estructurada.

Específicamente, para comprender el concepto de la elipse como una ecuación, es necesario dividir el problema en varias fases. Estas fases demandan ciertos conocimientos previos para su explicación, incluyendo elementos como la semejanza de triángulos, la formulación del trinomio cuadrado perfecto, el despeje de variables en ecuaciones y la solución de ecuaciones cuadráticas, entre otros aspectos.

La operación inversa. Siempre que se aborden las operaciones directas vinculadas a un concepto, en la medida de lo posible, se deben diseñar ejercicios que representen la operación inversa correspondiente (Villamizar, 20014).

Las actividades sugeridas incorporan ejercicios que reflejan los dos retos esenciales de la Geometría Analítica: I. Realizar una interpretación geométrica a partir de una ecuación proporcionada. II. Formular una ecuación basada en una propiedad geométrica o las condiciones que deben cumplir ciertos puntos especificados (Villamizar, 20014).

Por ejemplo, en el estudio de la elipse, se propone inicialmente trabajar con su ecuación canónica para que los estudiantes extraigan los parámetros a, b y/o c y procedan a graficarla; de manera inversa, cuando la elipse se presenta de forma gráfica, se solicita a los estudiantes determinar estos parámetros para llegar a la ecuación que la define.

Diferentes alternativas de solución. Cada vez que se introduce un método para resolver un problema, es esencial considerar diversas alternativas de solución. Si no es posible ofrecer un método alternativo, es crucial no restringir la resolución a una única vía. Este enfoque proporciona a los estudiantes la libertad de desarrollar sus propias estrategias para enfrentar el problema.

Para ilustrar esto, también se recomienda una serie de construcciones sintético-analíticas que se consideran efectivas para deducir la ecuación de la elipse (Cuevas y Pluvinage, 2003, p. 277; Contreras, Contreras y García, 2002, como se cita en Villamizar, 2014).

Problemas dosificados. Al diseñar problemas, es crucial adherirse al principio de adecuación óptima, asegurando que la dificultad de los problemas aumente gradualmente. Esta estrategia permite que los estudiantes enfrenten desafíos que demanden esfuerzo, manteniendo su interés y evitando que se sientan desmotivados (Villamizar, 2014).

En este contexto, los niveles de Van Hiele pueden ser reevaluados para permitir que el diseño de actividades se organice en niveles que fomenten el desarrollo de un pensamiento geométrico que sea tanto estructurado como jerárquico.

Mínima ayuda. El principio de proporcionar ayuda mínima se basa, de acuerdo a Villamizar (2014), en brindar al estudiante los elementos esenciales para que construya, de manera autónoma, diversas definiciones matemáticas. Esto se logra a través de una serie de indicaciones que no deben ser excesivamente directas.

En el contexto del laboratorio, el estudiante afronta los problemas solicitando ayuda al profesor, quien se limita a proporcionar únicamente la asistencia esencial, buscando siempre que sea el estudiante quien forje su propio conocimiento.

Diferentes registros de representación semiótica. Es fundamental en el proceso cognitivo del pensamiento humano la habilidad de representar visualmente un concepto matemático en los diferentes registros que le son inherentes.

En este sentido:

> La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece, así como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones (Duval, 1998, como se citó en Villamizar, 2014, p., 34).

Según Villamizar (2014), la didáctica de Cuevas y Pluvinage integra ciertas teorías de Duval, sugiriendo que, al desarrollar problemas para enseñar un concepto matemático dentro de un registro o sistema específico, es necesario crear actividades paralelas que exploren el mismo concepto en diversos sistemas de representación, siempre y cuando la característica de la actividad lo consienta.

En este contexto, el uso de GeoGebra juega un papel crucial al fomentar el trabajo en diversos registros, facilitando así la transición entre los aspectos geométricos y algebraicos.

Villamizar (2014) señala que la visualización de un objeto matemático, como una función, trasciende la mera observación de su representación gráfica. En realidad, es un proceso mediante el cual el estudiante integra la información en su pensamiento y lenguaje, utilizando conceptos matemáticos vinculados a diversos registros de representación, incluidos el gráfico, numérico y algebraico, así como el lenguaje cotidiano para describir sus experiencias.

Análisis complejo del concepto. La didáctica de Cuevas y Pluvinage, para Villamizar (2014), destaca la importancia de formular problemas en los cuales el concepto recién aprendido se convierta en un componente analítico para un tema más avanzado o complejo.

Un ejemplo práctico sería que el estudiante, tras haber asimilado las definiciones a través de actividades, pueda aplicarlas de manera competente en la interpretación y resolución de problemas de la vida real.

Las Cónicas en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

La Geometría Analítica forma parte de los contenidos educativos en el sistema educativo colombiano, siendo comúnmente abordada por estudiantes de décimo grado.

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas indican que, en el contexto de las cónicas, se espera que los estudiantes alcancen:

> (i) identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono; (ii)identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y, en particular, de las curvas y figuras cónicas; (iii) usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias; y, (iv) reconocer y describir curvas y/o lugares geométricos (MEN, 2006, p.88).

Calderón y Londoño (2021) destacan desafíos significativos en la comprensión de las secciones cónicas en el contexto de la geometría analítica.

Los estudiantes, al finalizar la educación media, demuestran habilidades para identificar estas figuras en situaciones cotidianas, pero al enfrentarse a tareas que implican representaciones detalladas, características específicas, propiedades y aplicaciones, se evidencian limitaciones en su comprensión.

Se resalta además la discrepancia entre la identificación superficial y la comprensión profunda de las secciones cónicas. Los estudiantes pueden reconocerlas de manera rudimentaria, pero enfrentan dificultades al tratar de representarlas con precisión o al describir sus atributos fundamentales.

Esta brecha entre el reconocimiento visual y la comprensión conceptual señala áreas específicas que requieren atención en la enseñanza de la geometría analítica.

Por otro lado, subrayan los persistentes problemas en el entender los contenidos relacionados con las secciones cónicas en el ámbito de la geometría analítica.

Estas dificultades pueden originarse en la falta de claridad conceptual, problemas en la aplicación de propiedades específicas o en la identificación de elementos clave.

Resulta importante abordar no solo la identificación visual, sino también la comprensión conceptual profunda de las secciones cónicas. La enseñanza efectiva debería dirigirse a superar estos desafíos, fomentando una comprensión integral que permita a los estudiantes aplicar conceptos geométricos de manera más sólida y significativa en diversas situaciones.

Para el caso de este trabajo de investigación, el interés se ubica en los siguientes estándares básicos de competencias, emanados del MEN (2006):

> (i) Identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono; (ii) Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y, en particular, de las curvas y figuras cónicas; (p. 88).

Esta elección de estándares se basa en la identificación de las carencias que muchos docentes de matemáticas muestran al abordar los estándares mencionados con sus estudiantes y los obstáculos en el entendimiento de las cónicas.

En el contexto específico de la parábola, se observa que los estudiantes tienden a desarrollar un enfoque algorítmico, respaldado principalmente por un proceso algebraico y memorístico, relegando el aspecto analítico del concepto.

Este escenario demuestra una falta de comprensión de los componentes de la parábola por parte de los educandos, lo que lleva a una dificultad para formular conexiones analíticas entre estos elementos.

Durante el primer acercamiento de los estudiantes al concepto de lugar geométrico dentro de contextos algebraicos, se observa que los estudiantes tienden a concentrarse en realizar cálculos, sin conseguir reconocer dos aspectos cruciales del concepto: la interrelación entre cada uno de los puntos generados y la condición geométrica específica, así como la importancia de incluir todos los componentes del conjunto como parte de la respuesta (Calderón y Londoño, 2021).

En este marco, la propuesta de la secuencia didáctica se ha diseñado con el objetivo de explorar de manera más completa la cónica asociada a la parábola, centrándose en aspectos geométricos más profundos y aprovechando las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Esto permite una observación detallada de aspectos que resultarían difíciles de visualizar mediante métodos convencionales, como el uso de tablero y marcador.

Así las cosas, GeoGebra y Tracker emergen como las herramientas tecnológicas que permiten a docente y estudiantes, tener un acercamiento más profundo al estudio de la cónica asociada a la parábola.

Ordoñez et al. (2022) manifiestan que GeoGebra es una herramienta tecnológica dedicada al aprendizaje de las matemáticas que se destaca especialmente en el ámbito de las construcciones geométricas y el razonamiento automatizado.

Este software proporciona funciones que permiten explorar las relaciones entre los elementos de una construcción geométrica, facilitando la comparación de medidas y posiciones.

Un aspecto destacado de GeoGebra es su naturaleza dinámica e interactiva, lo que brinda a los usuarios la capacidad de crear herramientas personalizadas o scripts para llevar a cabo operaciones matemáticas, como sumatorias, directamente dentro de la plataforma.

El uso de GeoGebra como herramienta fundamental en el trabajo tiene como objetivo mejorar la comprensión de las cónicas mediante enfoques dinámicos y creativos, aprovechando las funcionalidades proporcionadas por este software.

Además de ello, se aspira a transformar la experiencia de enseñanza de las matemáticas, haciendo que sea más placentera y efectiva.

En este contexto, se busca fomentar la construcción y comprensión activa de los conceptos, procedimientos y habilidades matemáticas (Farías, 2019).

Respecto al software Tracker, Gerard et al. (2023) se refiere a este como un software aplicado en la educación física, se emplea para el análisis y modelización de vídeos, ofreciendo la capacidad de examinar el movimiento y medir fuerzas en modelos dinámicos. Su utilidad se destaca al estudiar movimientos de rotación, como el giro de la rueda de una bicicleta, permitiendo visualizar y comprender la influencia de las fuerzas en los objetos en movimiento.

Además, Tracker posibilita el estudio de conceptos clave como momento, impulso y la difracción de electrones.

Cabe destacar su pertinencia en entornos de educación a distancia, ya que proporciona una solución práctica para llevar a cabo experimentos y análisis de datos de manera remota.

Para el caso que atañe a este trabajo de investigación, GeoGebra aporta a la enseñanza de la parábola mediante la representación visual y dinámica de objetos matemáticos, permitiendo a los estudiantes observar en tiempo real cómo cambios en los parámetros afectan la forma de la curva.

La herramienta fomenta la exploración interactiva al permitir a los estudiantes modificar elementos como el vértice y la directriz. Además, facilita la construcción de construcciones geométricas dinámicas relacionadas con la parábola, promoviendo el análisis geométrico y la conexión entre la geometría y el álgebra.

Tracker, por otro lado, se destaca en el análisis cinemático y la captura de datos en tiempo real. Su utilidad radica en el estudio del movimiento en trayectoria parabólica, permitiendo analizar datos de videos.

La herramienta posibilita experimentación virtual, verificación de conceptos y la interconexión con GeoGebra, donde datos cinemáticos pueden importarse para comparar representaciones gráficas con datos experimentales.

Aspectos metodológicos

El presente trabajo de investigación se enmarca en un perfil cuantitativo con un diseño de tipo experimental también llamado estudio de intervención.

A continuación, se detalla el enfoque del mismo.

Enfoque de Investigación

Hernández et al. (2014) afirman que, en la investigación de carácter cuantitativa con un diseño de tipo experimental, se busca establecer relaciones de causa y efecto entre variables mediante la manipulación de una variable independiente y la medición de su efecto sobre una variable dependiente.

Este enfoque metodológico se fundamenta en la recolección y análisis de datos numéricos con el fin de probar hipótesis y generalizar los resultados a una población más amplia.

De igual manera, en este tipo de investigación, el investigador tiene un control riguroso sobre las variables, lo que permite establecer relaciones de causalidad con mayor certeza (Hernández et al., 2014).

El diseño experimental implica la asignación aleatoria de los participantes a grupos de tratamiento y control, lo que ayuda a minimizar la influencia de variables extrañas y a asegurar la validez interna del estudio (Hernández et al., 2014).

La investigación cuantitativa experimental se caracteriza por su énfasis en la objetividad y la replicabilidad, ya que busca obtener resultados que sean independientes del investigador y que puedan ser verificados por otros investigadores, además, permite realizar inferencias causales sólidas, lo que la convierte en un enfoque especialmente útil para probar la eficacia de intervenciones o tratamientos en diversas áreas del conocimiento (Hernández et al., 2014).

En la investigación se consideran dos grupos de estudiantes cursando décimo grado, identificados como grado 10-1 y grado 10-2.

El grupo 10-2 actúa como grupo experimental, mientras que el grupo 10-1 se desempeña como grupo de control.

En el grupo 10-1, se implementa una secuencia didáctica de estilo magistral, donde el docente utiliza únicamente pizarra y marcador.

Es crucial destacar que esta metodología ejerce una fuerte influencia en el desarrollo algebraico y el reconocimiento de los elementos que definen una parábola.

Por otro lado, el grupo 10-2 sigue una secuencia didáctica que, además del enfoque algebraico tradicional en el proceso de enseñanza de la cónica en estudio, involucra a los estudiantes en la exploración de aspectos geométricos mediante la herramienta digital GeoGebra. Adicionalmente, utilizando el simulador Tracker, los estudiantes analizan trayectorias parabólicas presentes en situaciones cotidianas, como en deportes como el fútbol y el baloncesto, donde el balón al ser lanzado sigue este tipo de curva.

La variable independiente asumida es la incorporación de las TIC (GeoGebra y Tracker) en el proceso de enseñanza del objeto de estudio y sus aplicaciones cotidianas.

Por otro lado, la secuencia didáctica con exposición magistral exclusiva se toma como variable dependiente.

Según Hernández et al. (2014), en experimentos se manipulan variables independientes para observar sus efectos en otras variables dependientes en una situación de control.

Para la recolección de información, se lleva a cabo una posprueba en ambos grupos con el objetivo de determinar si existen hallazgos significativos en la integración de las TIC a la secuencia didáctica.

Es relevante mencionar que ambos grupos cuentan con una cantidad aproximadamente igual de estudiantes. Además, se garantiza que la presentación de la posprueba se realiza a la misma hora, asegurando la equivalencia entre los grupos.

En relación a los resultados de la posprueba, Hernández et al. (2014) enfatiza que al examinar los resultados posteriores de ambos grupos (01 y 02), se puede determinar el impacto de la intervención. Una disparidad notable entre los dos (01 ≠ 02) indicaría que el tratamiento experimental surtió efecto, llevando a la aceptación de la hipótesis que propone una diferencia entre los grupos. Por el contrario, si no se observan diferencias significativas (01 = 02), esto sugeriría que el tratamiento no produjo un cambio relevante, y en este caso, se aceptaría la hipótesis nula.

Secuencia Didáctica enfocada en la Integración de las Herramientas Tecnológicas GeoGebra y Tracker

Con el objetivo de enriquecer el desarrollo de la secuencia didáctica, se incorpora una actividad interactiva específica para cada una de las fases del proceso. Detalles sobre estas actividades se presentan de manera organizada en la Tabla 1.

En la secuencia didáctica, se emplean las fases de exploración y transferencia como mecanismos de evaluación. Durante la fase de exploración, se realiza un test diagnóstico para evaluar los conocimientos previos de los estudiantes en pensamientos numérico-variacionales y métrico-geométricos, esenciales para comprender el objeto de estudio. Este test consta de dos cuestionarios, cada uno con cinco preguntas, que miden el desempeño en cada pensamiento. La aplicación se lleva a cabo mediante la App Kahoot, que se adapta al desarrollo de la gamificación.

Tabla 1

Descripción de fases y actividades interactivas

Fase	**Actividad interactiva**
Exploración	Actividad de gamificación usando Kahoot
Estructuración	Actividades interactivas empleando GeoGebra y Tracker
Transferencia	Actividad de gamificación usando Kahoot

Nota. Esta tabla muestra las actividades por fase en el desarrollo de la secuencia.

En la fase de transferencia, se administra un postest para analizar el avance en los conceptos estudiados y medir la incidencia de la dinamización del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante la integración de las TIC. Al igual que el test diagnóstico, el postest se realiza utilizando la App Kahoot y consta de dos cuestionarios con cinco preguntas cada uno.

Dentro de la fase de estructuración, se desarrollan tres actividades interactivas con el apoyo de los programas GeoGebra y Tracker.

La primera actividad se centra en explorar y verificar aspectos geométricos sobre la definición del concepto de parábola, que no se pueden estudiar fácilmente a mano alzada en un tablero convencional durante una clase magistral.

Actividad 1

Empleando GeoGebra, se llevará a cabo la actividad de comprobación de la equidistancia de cada punto del plano a un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz.

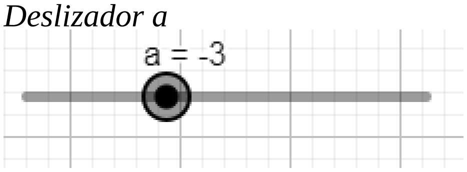
El objetivo es que el estudiante verifique que cada punto en la curva de la parábola se encuentra a la misma distancia del segmento que forma con el foco y el segmento perpendicular a un punto en la directriz. La actividad se realizará en GeoGebra a través del siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/rrrtmrav

Dentro del recurso, localizará el control deslizador denominado "a", tal como se ilustra en la Figura 1.

Figura 1

Deslizador a



Fuente. GeoGebra

Luego, procederá a desplazar dicho deslizador de izquierda a derecha y anotará las medidas proporcionadas por el programa en la Tabla 2.

Tabla 2

Formato para consignar resultados

Deslizador	Longitud del segmento $\overline{CD}$	Longitud del segmento $\overline{DE}$	Use los símbolos menor que (<), mayor que (>) o igual (=) para comparar la medida de la longitud de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$
a=-4			
a=-3			
a=-2			
a=-1			
a=0			
a=1			
a=2			
a=3			
a=4			

Nota. Esta tabla muestra el formato para registrar resultados del ejercicio.

Preguntas Tabla 2

Señale con una x la opción correcta en el punto 1

1. Al comparar la medida de la longitud de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ en cualquier caso, se establece que

______ $\overline{CD} = \overline{DE}$ ______ $\overline{CD} > \overline{DE}$

2. Basado en la información previa, indica con tus palabras la condición que precisan los puntos sobre una parábola, o lugar geométrico de la parábola:

____

____

____

____

Actividad 2

La intención de esta tarea requiere que el estudiante observe cómo se modifica la curva generada por la parábola al alejar equidistantemente el foco y la directriz del vértice.

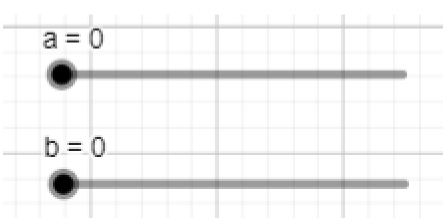
Para realizar esta actividad, el estudiante deberá acceder a la lección disponible en GeoGebra mediante el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/m6mpzcqr

Dentro de la herramienta, identificará dos controles deslizantes, denominados "a" y "b", tal como se presenta en la figura proporcionada:

Figura 2

Deslizadores a y b



Fuente. GeoGebra

En la Tabla 3 el estudiante debe ir registrando los datos obtenidos cuando mueve en primer lugar el deslizador a y posteriormente cuando mueva el deslizador b.

Tabla 3

Formato para consignar resultados

Deslizador	El punto B respecto del punto V se:		La curva de la parábola se	
	acerca	aleja	abre	cierra
a=1				
a=2				
a=3				
b=1				
b=2				
b=3				

Nota. Esta tabla muestra el formato para registrar resultados del ejercicio.

Preguntas tabla 3

Señale con una x la opción correcta en la pregunta 1

1. Al alejar el punto de B del punto V, ¿Qué le sucede a la curva de la parábola?

_____ Se abre _____ Se cierra

2. Al acercar el punto de B del punto V, ¿Qué le sucede a la curva de la parábola?

_____ Se abre _____ Se cierra

3. Teniendo en cuenta lo anterior, concluye con tus propias palabras que sucede al alejar o al acercar el foco dejando el vértice fijo en una parábola:

____

____

Actividad 3

El fin de este ejercicio será que el estudiante reconozca la curva obtenida por una parábola a partir del seguimiento del rastro de la definición del lugar geométrico que la conceptualiza.

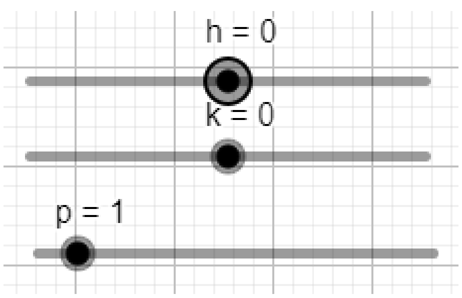
Para la resolución de esta actividad el educando deberá acceder a la lección propuesta en GeoGebra por medio del siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/fprbjzsp

Cuando este dentro del recurso identificará los siguientes deslizadores:

Figura 3

Deslizadores h, k y p



Fuente. GeoGebra

Con el uso de ellos, complete la Tabla 4.

Tabla 4

Formato para consignar resultados

Parámetro h	Parámetro k	(h,k)	p	Dibuje el rastro generado
0	0		1	
1	3		1	
0	0		2	
1	3		2	
0	0		3	
1	3		3	

Nota. Esta tabla muestra el formato para registrar resultados del ejercicio.

Preguntas tabla 4

Responda las preguntas 1 y 2 a partir de la información obtenida.

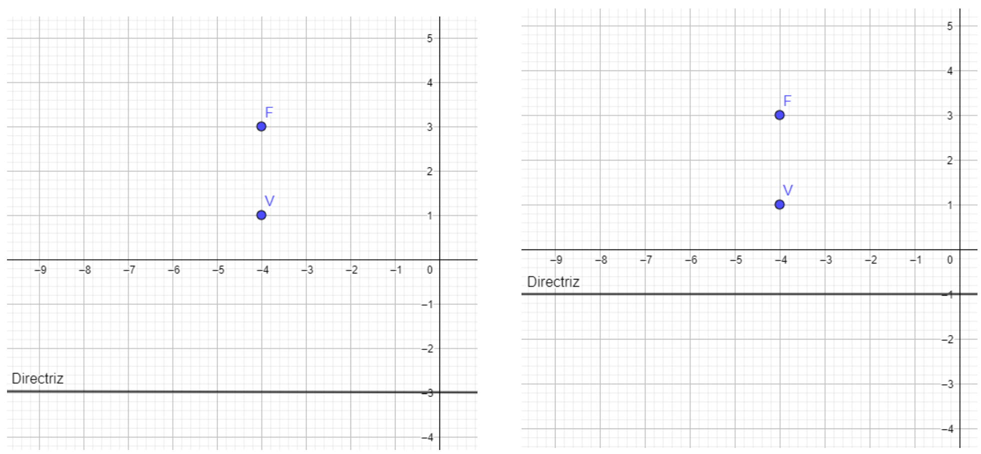
1. Al variar h, k y p en todos los casos gráficamente, ¿cómo se ubican F, V y la directriz?

---

2. Si el rastro de la parábola se quisiera de forma invertida, ¿cómo se ubican F, V y la directriz?

Figura 4

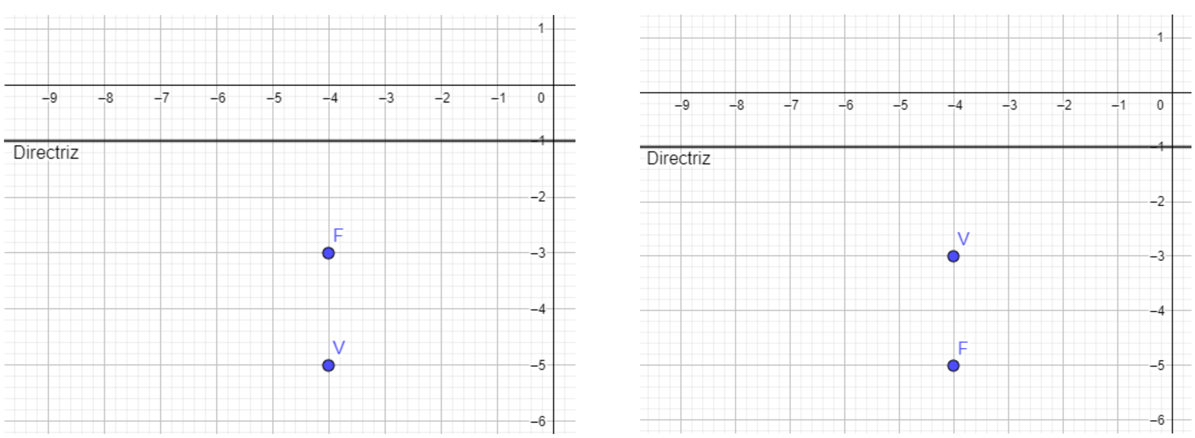
Ubicación al variar h, k y p



Fuente. GeoGebra

Figura 5

Ubicación con rastro de parábola invertida



Fuente. GeoGebra

3. Teniendo en cuenta lo anterior, dibuja la ubicación del foco, el vértice y la directriz para parábolas que cuyo rastro se forma a la izquierda y luego hacia la derecha.

Actividad 4

El propósito de esta actividad es confrontar el modelo matemático desarrollado en las actividades previas con situaciones cotidianas, específicamente relacionadas con algunos deportes practicados en el colegio Agustiniano Campestre, como el baloncesto, el voleibol, el fútbol y la natación.

Los estudiantes llevarán a cabo un análisis utilizando herramientas como Tracker y GeoGebra para estudiar el comportamiento del balón cuando es impulsado en deportes como baloncesto, voleibol y fútbol, así como el movimiento de una nadadora al realizar una salida desde el partidor de una piscina semiolímpica.

El procedimiento es común para todos los deportes analizados. Se inicia activando la aplicación Tracker instalada en la PC. Luego, en la ventana de video, se importa el video que se desea analizar. Una vez cargado el video, se realizan los ajustes necesarios para llevar a cabo un estudio detallado de la curva. Uno de estos ajustes cruciales es la calibración del video, que permite establecer el inicio y el final de la curva a analizar. En la Figura 6 se proporciona una indicación clara sobre el comando que debe seleccionarse para realizar este ajuste.

Figura 6

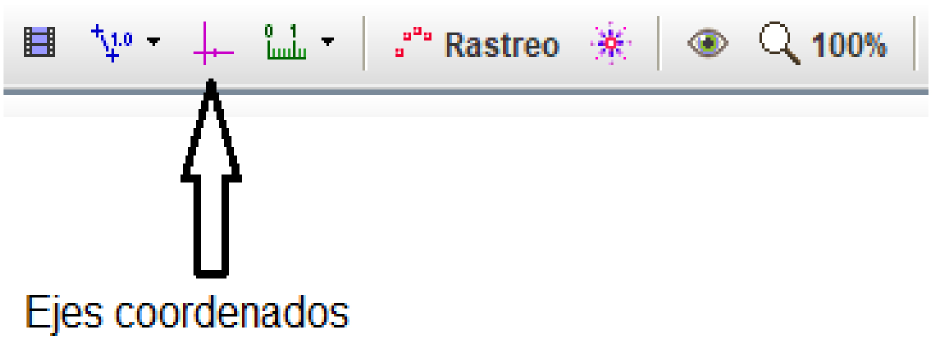
Pantallazo video subido a Trcker

Fuente. Tracker

1. Se agrega un plano cartesiano usando la función mostrada en la figura.

Figura 7

Ícono ejes coordenados en Tracker

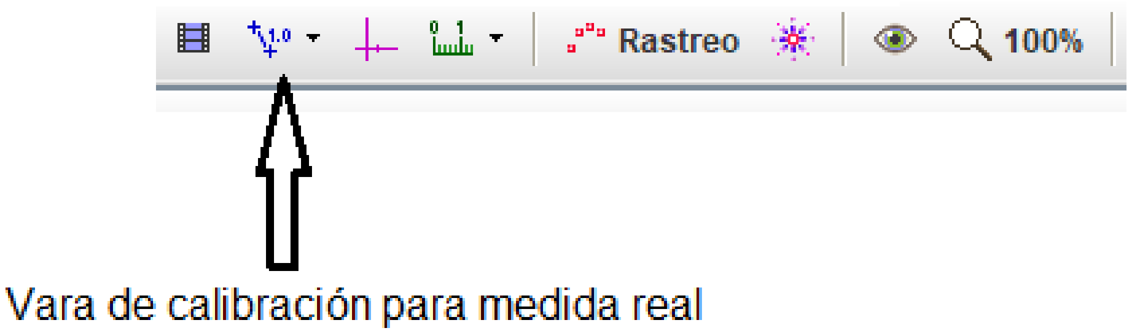


Fuente. Tracker.

2. Se calibra el plano cartesiano a una escala real usando para este caso el poste vertical del arco que mide 2,44m usando la función descrita en la imagen.

Figura 8

Ícono Vara de calibración para medida real en Tracker

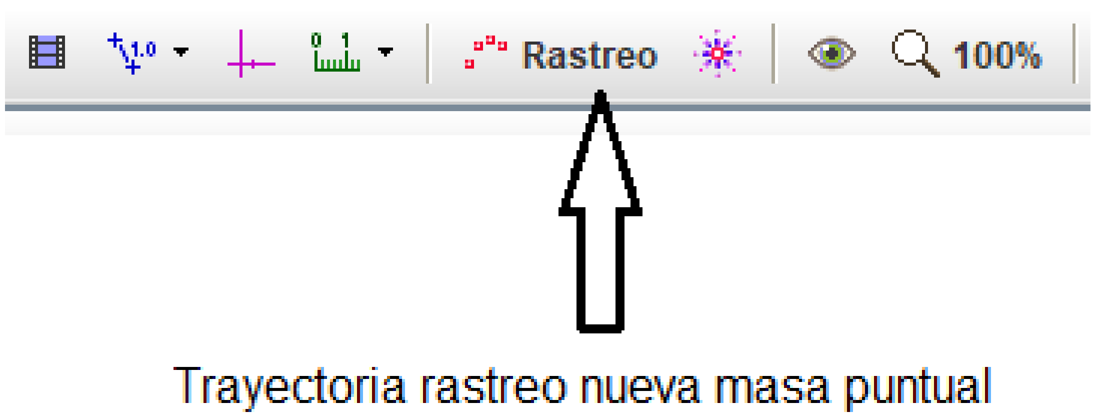


Fuente. Tracker

3. Se realiza el análisis del movimiento del balón con la función rastreo (modo automático). Para ello, empleamos la función señalada en la flecha de la figura.

Figura 9

Ícono Trayectoria rastreo nueva masa puntual



Fuente. Tracker

Se selecciona nueva masa puntual y oprimiendo en el teclado Ctrl y Shift damos click en el balón para seleccionarlo.

Posteriormente, se deja correr el análisis del movimiento.

Si el proceso automático no refleja de forma minuciosa el análisis del movimiento se puede proceder a estudiar la trayectoria de forma manual para lo cual en la obtención de cada punto utilizamos del teclado la tecla Shift para ubicar punto a punto la posición del balón obteniendo hacer el rastreo del mismo.

Después de realizar el rastreo, se seleccionan los datos obtenidos para la posición en el *eje x* y en el *eje y*, luego se copian y se llevan a una hoja de cálculo en GeoGebra para la obtención de la ecuación de una curva que pueda describir el movimiento desarrollado por el balón.

Preguntas orientadoras

Marque con una x la opción que considere correcta en las preguntas 1 y 2.

1. Al comparar las curvas obtenidas en un lanzamiento de tiro libre de baloncesto y un tiro libre en futbol respecto a la ubicación entre el foco y el vértice se puede inferir que

____El foco está más cerca del vértice en la curva generada por el balón en el lanzamiento en un tiro libre en baloncesto que en un tiro libre en futbol.

____ El foco está más lejano del vértice en la curva generada por el balón en el lanzamiento en un tiro libre en baloncesto que en un tiro libre en futbol.

2. En los diferentes deportes analizados la bola primero asciende y luego desciende generando una parábola. Con base a lo anterior, ¿Qué gráfico muestra la ubicación de los elementos correspondientes a una parábola?

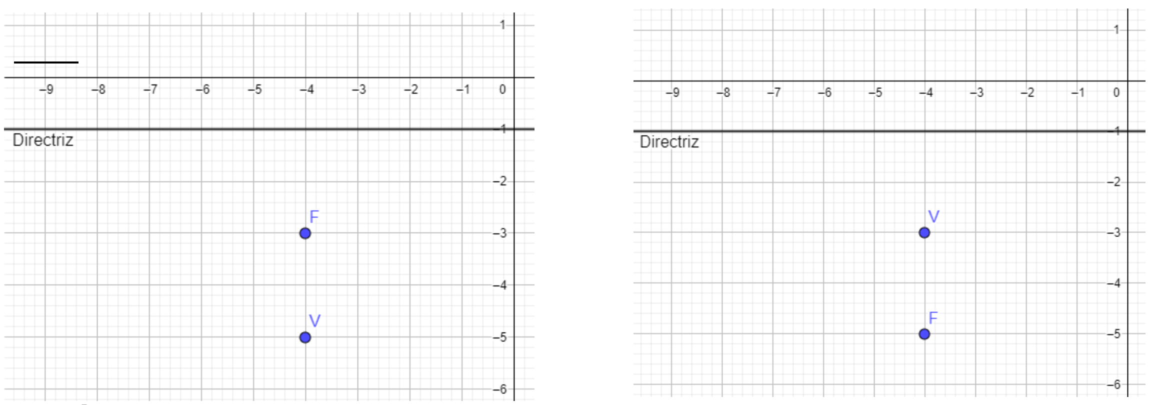
3. Para obtener un mayor alcance vertical al comparar las curvas obtenidas en un lanzamiento de tiro libre de baloncesto y un tiro libre en futbol respecto a la ubicación entre el foco y el vértice se puede inferir que

____El foco está más cerca del vértice en la curva generada por el balón en el lanzamiento en un tiro libre en baloncesto que en un tiro libre en futbol.

____ El foco está más lejano del vértice en la curva generada por el balón en el lanzamiento en un tiro libre en baloncesto que en un tiro libre en futbol.

Figura 10

Gráfico de los elementos correspondientes a una parábola



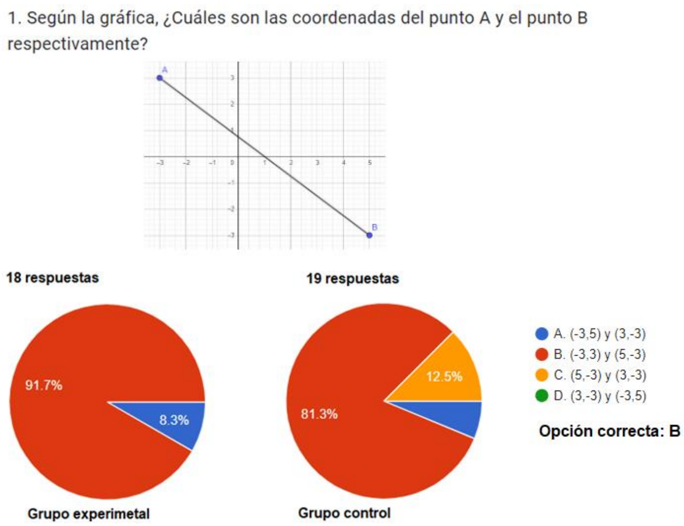
Fuente. Tracker

Resultados

A continuación, se presentan los resultados de la posprueba para cada uno de los ítems elaborados.

Figura 11

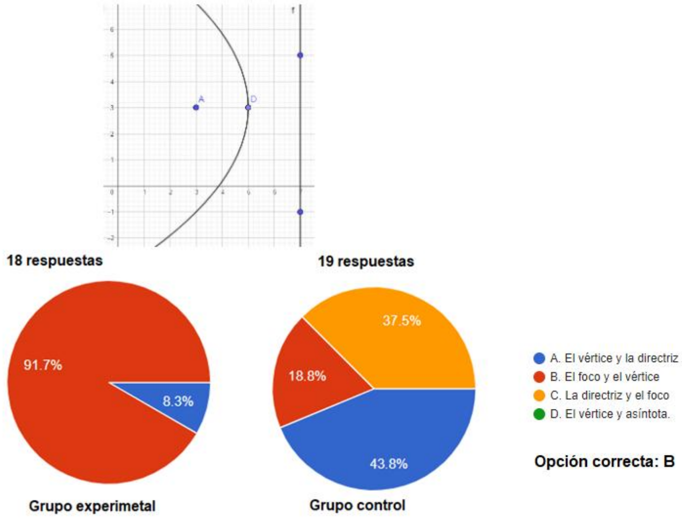
Pregunta 1



Fuente. Autoría propia.

Figura 12

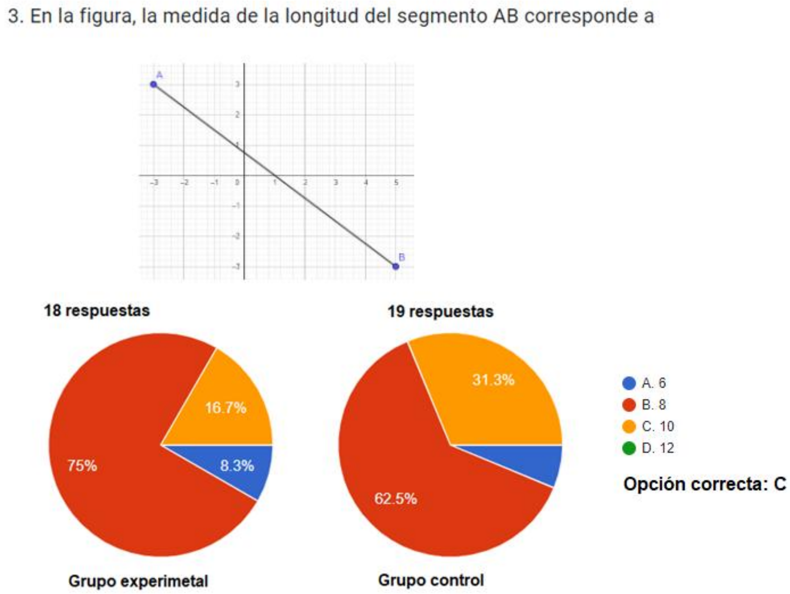
Pregunta 2



Fuente. Autoría propia.

Figura 13

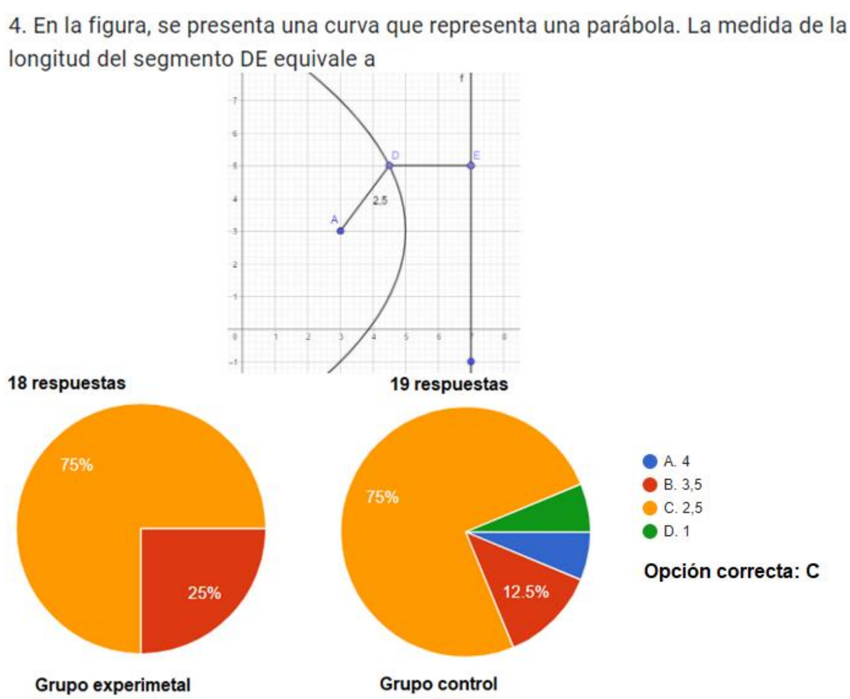
Pregunta 3



Fuente. Autoría propia.

Figura 14

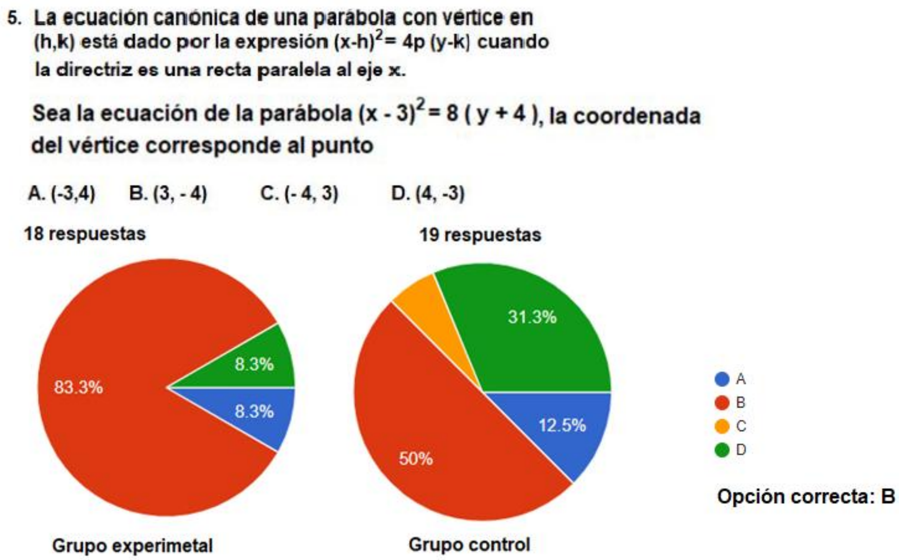
Pregunta 4



Fuente. Autoría propia.

Figura 15

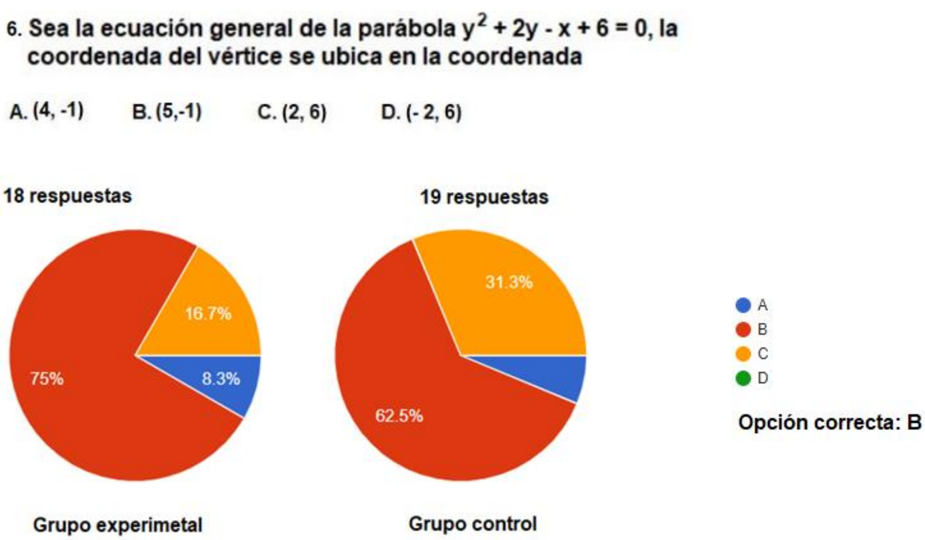
Pregunta 5



Fuente. Autoría propia.

Figura 16

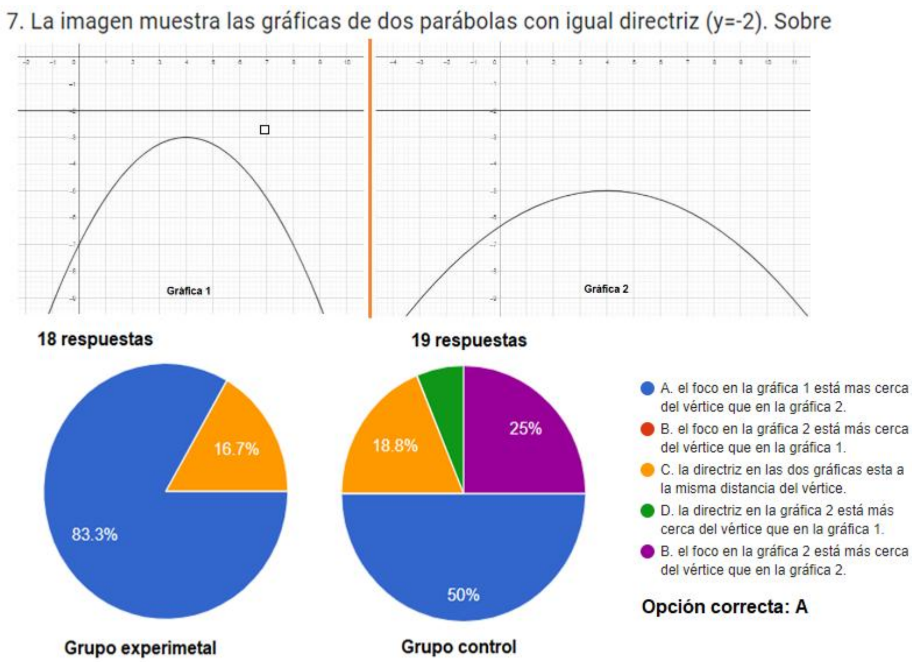
Pregunta 6



Fuente. Autoría propia

Figura 17

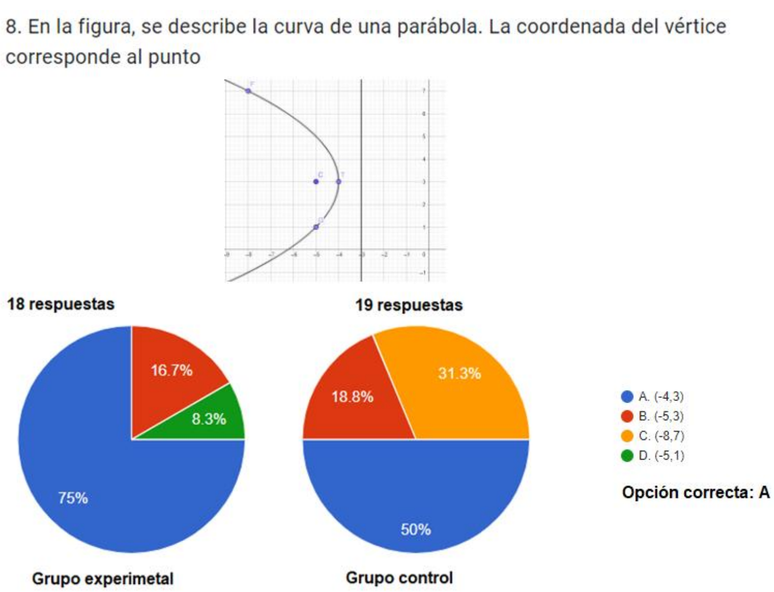
Pregunta 7



Fuente. Autoría propia

Figura 18

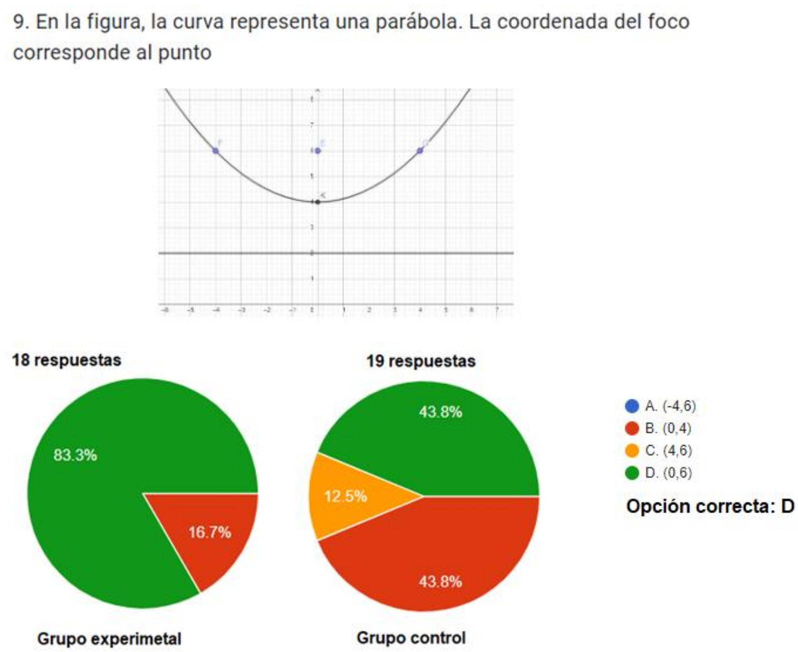
Pregunta 8



Fuente. Autoría propia

Figura 19

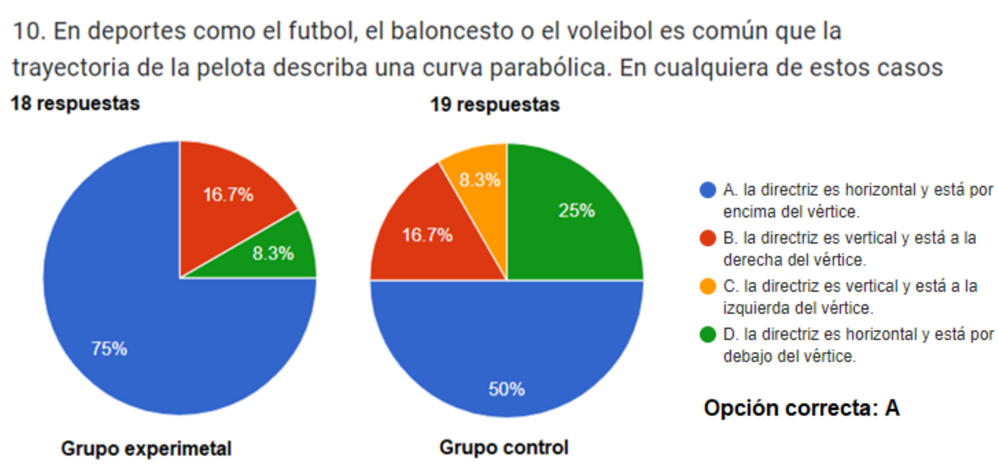
Pregunta 9



Fuente. Autoría propia

Figura 20

Pregunta 10



Fuente. Autoría propia

En relación con los hallazgos obtenidos en la posprueba, se observa que las preguntas 1, 3 y 4 no revelan aspectos significativos relacionados con la implementación de una secuencia didáctica en comparación con otra. Estas preguntas representan un 30% del total de preguntas de la posprueba.

Contrariamente, las preguntas 2, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 exhiben hallazgos sustanciales que indican un rendimiento significativamente superior en el grupo experimental. Estas preguntas conforman el 70% del conjunto total de preguntas de la posprueba.

Los resultados revelan que el tratamiento experimental ha ejercido un impacto notable. De esta manera, se respalda la hipótesis que postula una diferencia significativa entre los grupos, con un 70% de las preguntas presentando un nivel de aprendizaje superior en el grupo experimental en comparación con el 30% en el grupo de control.

Discusiones

En el ámbito de la educación matemática, se ha buscado constantemente desarrollar estrategias efectivas para la enseñanza de conceptos matemáticos complejos. Villamizar (2014) emerge como el referente para este trabajo. Él propone un enfoque que destaca la relevancia de la experiencia práctica y la conexión de los conceptos matemáticos con la vida cotidiana.

Su perspectiva aboga por la participación activa del estudiante y una comprensión profunda de los conceptos, ofreciendo una alternativa valiosa a los métodos de enseñanza convencionales.

El enfoque de Villamizar (2014) se fundamenta en superar las barreras convencionales de la enseñanza de las matemáticas, promoviendo la exploración activa y la aplicación práctica de los conceptos.

Esta perspectiva se alinea con lo imperativo de ajustar las estrategias pedagógicas según las características individuales de los estudiantes, como se evidencia en la variabilidad de los resultados.

La propuesta de conectar los conceptos matemáticos con la realidad cotidiana, planteada por Villamizar (2014), podría ofrecer una motivación adicional al demostrar la relevancia de estos conceptos en la vida diaria.

La aplicación de la metodología experimental, en sintonía con la propuesta de Villamizar (2014), permite evaluar la eficacia de estas estrategias pedagógicas y determinar su efecto en el aprendizaje de los estudiantes.

La implementación de la secuencia didáctica con GeoGebra y Tracker, presentada anteriormente, constituye un esfuerzo por integrar la teoría con la práctica para maximizar el aprendizaje de la parábola.

En este sentido, la investigación educativa y la experimentación ofrecen una base sólida para el desarrollo de enfoques pedagógicos innovadores y efectivos en la enseñanza de las matemáticas.

La secuencia didáctica, respaldada por el uso de TIC, ha demostrado ser esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la parábola.

Las actividades diseñadas buscan no solo transmitir conocimientos sino también fomentar la participación activa y la comprensión profunda de los estudiantes, alineándose con los principios pedagógicos de Villamizar (2014).

La evaluación posterior a la implementación revela hallazgos significativos, donde el 70% de las preguntas de la posprueba, vinculadas a las actividades ejecutadas con GeoGebra y Tracker, mostraron un notable aumento en el nivel de aprendizaje en el grupo experimental. Este resultado respalda la hipótesis de que la combinación de la secuencia didáctica y el uso de TIC tiene un impacto positivo en el aprendizaje de la parábola.

La actividad 4, que involucra la aplicación de los conceptos aprendidos a situaciones cotidianas mediante el análisis de videos, añade un componente práctico valioso. Este enfoque conecta los conceptos abstractos de la parábola con fenómenos reales, cumpliendo con la premisa de Villamizar (2014) sobre la importancia de relacionar las matemáticas con la vida cotidiana.

La variabilidad en los resultados, evidenciada por el 30% de preguntas que no mostraron diferencias significativas, podría atribuirse a diversos factores, como la diversidad en el nivel de participación de los estudiantes o la adaptación individual a la metodología.

Villamizar (2014) destaca la importancia de abordar esta variabilidad en el aprendizaje, reconociendo la diversidad de estilos y ritmos de los estudiantes.

Conclusiones

La aplicación de la secuencia didáctica diseñada, respaldada por la metodología propuesta por Villamizar (2014), ha demostrado ser efectiva para mejorar la comprensión de la parábola en los estudiantes de décimo grado.

La combinación de actividades interactivas con GeoGebra y Tracker ha permitido una exploración visual profunda de las propiedades geométricas de la parábola, alineándose con la premisa de fomentar la participación activa y la comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

La variabilidad en los resultados, evidenciada por el 30% de preguntas que no mostraron diferencias significativas, resalta la importancia de reconocer y abordar las distintas formas de aprendizaje de los estudiantes.

La conexión de los conceptos abstractos de la parábola con situaciones cotidianas, como se llevó a cabo en la actividad 4 mediante el análisis de videos con Tracker y GeoGebra, comprueba la idea sobre la importancia de relacionar las matemáticas con la vida cotidiana. Esta conexión práctica puede acrecentar la motivación de los estudiantes al mostrar la relevancia de los conceptos matemáticos en su entorno.

Recomendaciones

Se sugiere la implementación de secuencias didácticas similares, que integren herramientas tecnológicas y enfoques interactivos, para beneficiar la enseñanza de otros conceptos matemáticos complejos. La adaptabilidad de estas estrategias según las necesidades y características de los estudiantes podría ser clave para el éxito.

Es recomendable realizar un análisis más detallado de la variabilidad en los resultados, identificando posibles factores que puedan influir en las diferencias individuales de aprendizaje. Esto podría incluir la realización de encuestas o entrevistas con los estudiantes para comprender mejor sus estilos de aprendizaje y preferencias.

La continua formación de los docentes en el uso de herramientas tecnológicas y enfoques pedagógicos innovadores es esencial. La implementación exitosa de la metodología propuesta por Villamizar (2014) depende en gran medida de la capacitación y disposición de los educadores.

Se sugiere explorar la aplicación de este enfoque en otros niveles educativos y contextos, evaluando su adaptabilidad y efectividad en diferentes situaciones.

La investigación educativa y la experimentación pedagógica deben seguir siendo una parte integral del desarrollo de nuevas estrategias de enseñanza. Evaluar regularmente la efectividad de las metodologías implementadas permitirá ajustes continuos y mejoras en el proceso educativo.

Referencias Bibliográficas

Angel, E. y Rivas, R. (2020). Concepciones sobre el Movimiento Parabólico: Estrategias de enseñanza y aprendizaje que contribuyen a su compresión. *Educere*, *24*(79), 633-643. https://www.redalyc.org/jatsRepo/356/35663293012/35663293012.pdf 2.pdf (redalyc.org)

Antezana, R. y , Lizana, D. (2020). Representación semiótica en el aprendizajede conceptos básicos de la estructuraalgebraica de grupo. *Horizonte de la ciencia, 11(20)*:177-178 DOI: DOI: https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2021.21.904

Baltus, C. (2019). Conic Sections in Early Modern Europe. First Part: Philippe de la Hire on Circles. doi: 10.1007/978-3-030-46287-1_5

Calderón, W. y Londoño, R. (2021). Descriptores para el concepto de parábola en el modelo de van Hiele. *Educación y Humanismo, 23*(40). https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4221

Cano J.T. (2015). Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM. (2). ISSN 2422-037X. http://funes.uniandes.edu.co/9896/1/S%C3%A1nchez2015Algunas.pdf

Castillo, N., Giraldo, D., y Devia, D. (2021). Enseñanza del movimiento parabólico mediante el uso de un simulador interactivo desde la perspectiva del aprendizaje por descubrimiento. *Scientia Et Technica*, *26*(3), 371-379. https://doi.org/10.22517/23447214.24779

Catalán, M., Figueroa, M. y Espinoza, R. (2023). Aprendizaje cooperativo, trascendiendo el aula convencional. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación 7*(27):86-98 DOI:10.33996/revistahorizontes.v7i27.499

Dahal, N., Prasad, B., Mani, P. & Manandhar, S. (2022). Use of GeoGebra in Teaching and Learning Geometric Transformation in School Mathematics. *International journal of interactive mobile technologies, 16*(08):65-78. doi: 10.3991/ijim.v16i08.29575

David, P. (2022). Conic Diagrams. *Journal of humanistic mathematics*, *12*(2):378-398. doi: 10.5642/jhummath.nfhq4170

De Oliveira, E. (2023). Tecnologías digitales en la educación matemática. *Revista de Debates Interdisciplinarios*, doi: 10.51249/jid.v4i01.1255

De Sousa, R., Alves, F. & Souza, M. (2022). Systematic study of the parabola with the contribution of GeoGebra software as a teaching proposal. *Radenintan 13*(2), 313–329. http://ejournal.radenintan.ac.id/index.php/al-jabar/index

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia: Grupo de Educación Matemática.

Espinoza, R. (2023). Aprendizaje cooperativo, trascendiendo el aula convencional. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *7*(27), 87-98. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v7i27.499

Farias, E. (2019). *Utilizando o software GeoGebra no ensino da Matemática: uma ferramenta para construção de gráficos de parábolas e elipses no 3° ano do Ensino Médio*. 11(24):197-211. doi: 10.28998/2175-6600.2019V11N24P197-211

Gamit, A.(2023). Adopción de las tecnologías digitales en la educación matemática. *Revista de currículo y enseñanza*, doi: 10.5430/jct. v12n1p283

Gaspar De Alba D., A., Mederos, O. & Mayén, S. (2012). *La formación del concepto de parábola.* Memoria de la XV escuela de invierno en matemática educativa http://funes.uniandes.edu.co/16537/1/DeAlba2012La.pdf.

Gutiérrez A., R. & Castillo B. (2019). Simuladores com o software GeoGebra como objetos de aprendizagem para o ensino da Física. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: ted*, (47), 201-216. https://doi.org/10.17227/ ted.num47-11336

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista L., P. (2014). *Metodología de la Investigación.* Iztapalapa. Mexico D. F.: Mc Graw Hill.

Herrera, N., Montenegro, W. & Poveda, S. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, (35), 254-287.

Hirata, G. (2022). Jugar para aprender: el impacto de la tecnología en el rendimiento matemático de los estudiantes. *Revista de Capital humano*. doi: 10.1086/719846

Márquez, A. (2021). *Metodologías activas: ¿Sabes en qué consisten y cómo aplicarlas?* UNIR - Universidad Internacional de La Rioja. https://www.unir.net/educacion/revista/metodologias-activas/

Ordóñez, K., García, M., Molina, I., Ortiz, J. & Ordóñez, E. (2022). Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender matemáticas. *RECIAMUC, 6*(1):182-192. doi: 10.26820/reciamuc/6.(1).enero.2022.182-192

Puga, L. & Jaramillo, L. (2015). Metodología activa en la construcción del conocimiento matemático. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación, (19),* 291-314. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=441846096015

Restrepo, J. A. & Martínez, X. (2023*). Un objeto virtual de aprendizaje (ova) como herramienta didáctica en la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas con operaciones básicas entre números racionales en estudiantes del grado séptimo de la institución educativa enrique olaya herrera de puerto lópez, meta.* [Proyecto aplicado]. Repositorio Institucional UNAD. https://repository.unad.edu.co/handle/10596/57423

Rincón, D. (2023). *Modelo para validar la experiencia de usuario basado en analítica de datos para mejorar la navegabilidad y usabilidad de los ambientes de aprendizaje en* *programas de educación virtual*. [Proyecto de investigación]. Repositorio Institucional UNAD. https://repository.unad.edu.co/handle/10596/57957

Rodríguez, B., Ramírez, J. y Fernández, W. (2017). Metodologías Activas para Alcanzar el Comprender. *Formación universitaria, 10*(1), 79-88. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000100009

Rodríguez, C., Pérez, J., Bracho Rodríguez, A., Cuenca, L. y Henríquez Coronel, M. (2021). Aprendizaje basado en retos como estrategia enseñanza-aprendizaje de la asignatura resistencia de los materiales. *Dominio de las Ciencias, 7*(3), 82-97. https://doi.org/10.23857/dc.v7i3.1983

Sánchez, E. (2015). *Algunas dificultades de aprendizaje presentes en el estudio de la parábola en un grupo de estudiantes de grado once del Colegio María Cano J. T.* https://funesfrpre.uniandes.edu.co/tipo-de-documento/articulo/?order=ASC&orderby=date&view_mode=list&perpage=12&paged=1&fetch_only=thumbnail%2Ccreation_date%2Ctitle%2Cdescription&fetch_only_meta=1321705%2C144212%2C144075%2C36091%2C35097%2C33903%2C33065

Sudihartinih, E. & Purniati, T. (2019). *Visualizing parabola: the study of a manipulative's effectiveness.* doi: 10.31540/JMSE.V2I1.816

Valbuena, S., Gutiérrez, Y Berrio, J. (2021). Intervención didáctica tecnológica para el estudio de las secciones cónicas basada en el potencial semiótico. *Formación universitaria, 14*(1), 181-194. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062021000100181

Villamizar, F. (2014). Propuesta didáctica para introducir una curva cónica mediante un entorno digital interactivo: El caso de la elipse [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de

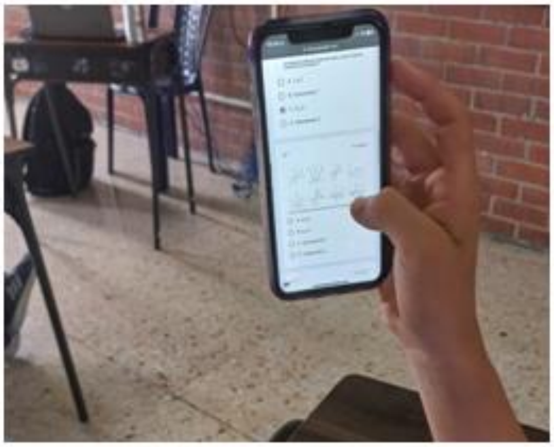
Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]
http://funes.uniandes.edu.co/14160/1/Villamizar2016Construccion.pdf

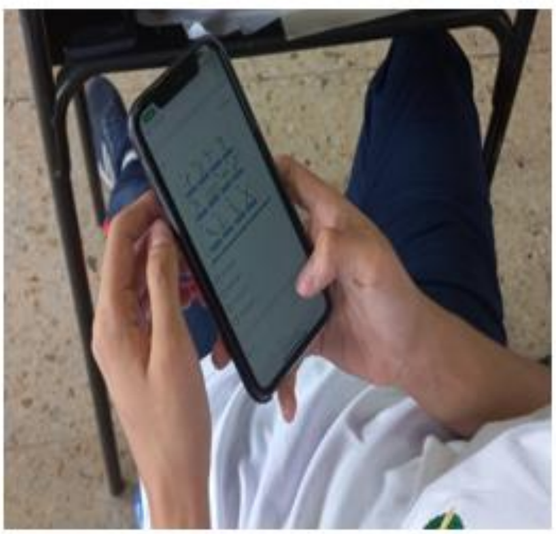
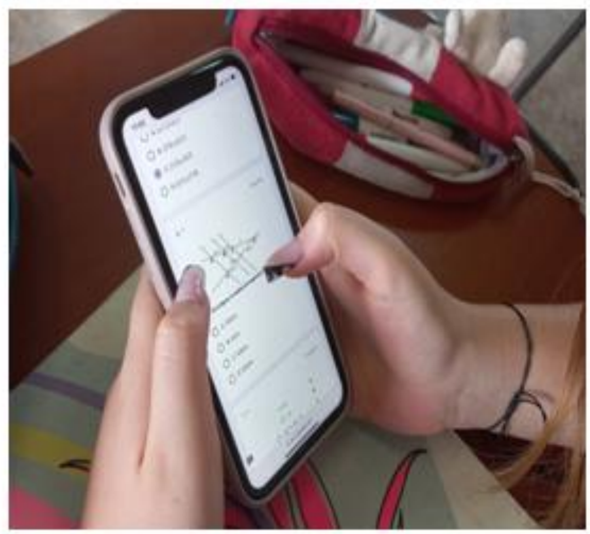
Zamalloa, A., Cruz, G. Camani, J., Almanza, V., Gonzales, B., Villa, D. & Warthon, B. (2023). Use of Tracker software for teaching distance physics laboratories: Demonstration of error reduction in the simple pendulum. *Revista de Educación a Distancia, 76*. https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2306/2306.06352.pdf

Apéndices

Apendice A

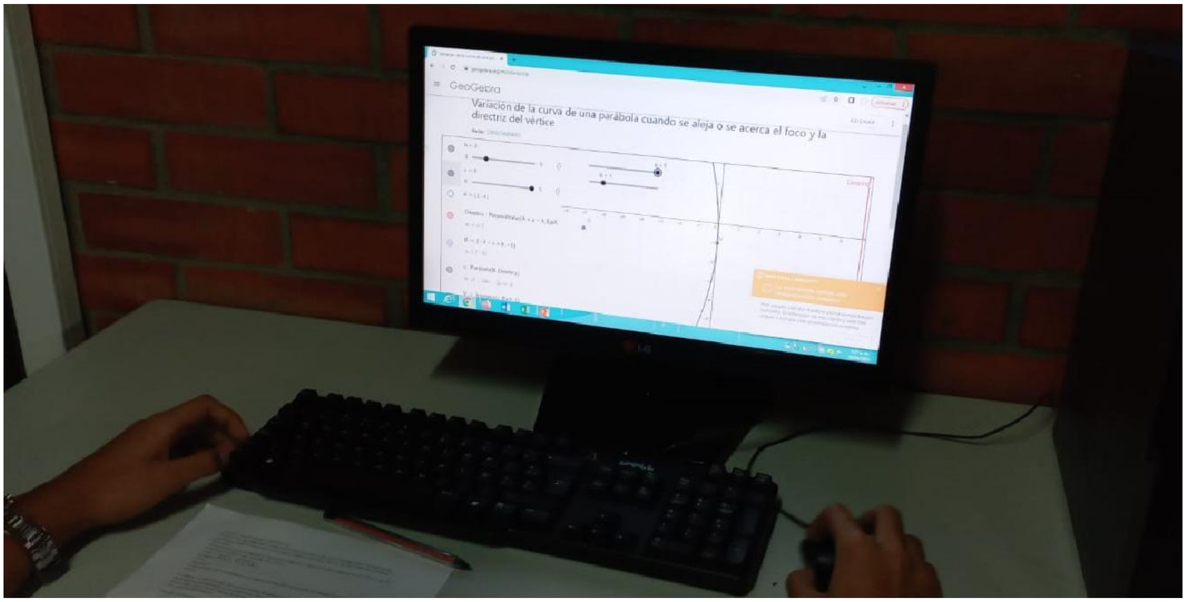
Evidencia grado decimo desarrollo de actividad presaberes ova en el aula de clase

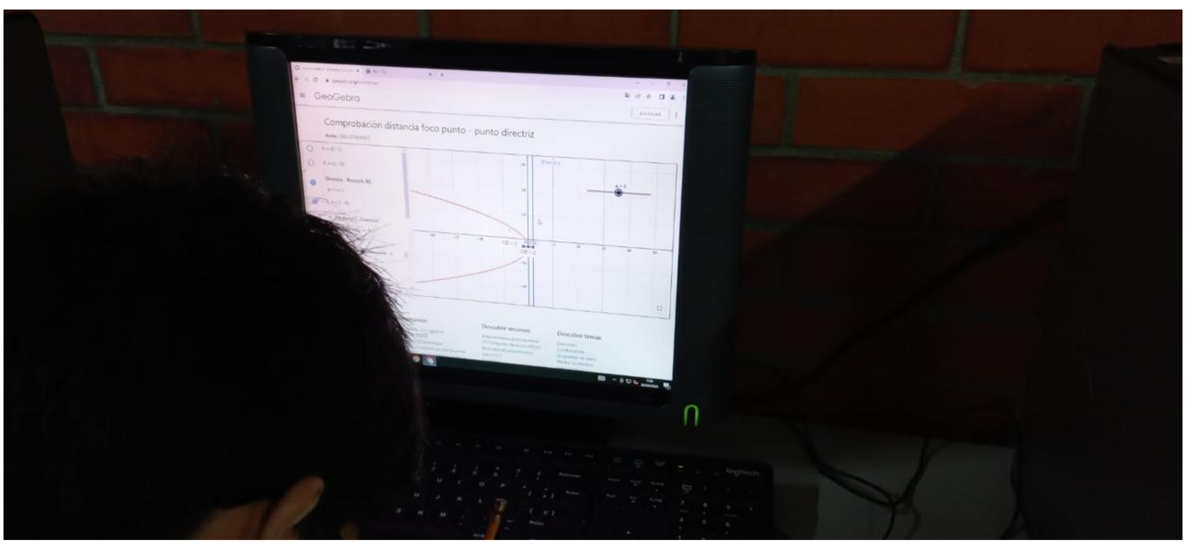


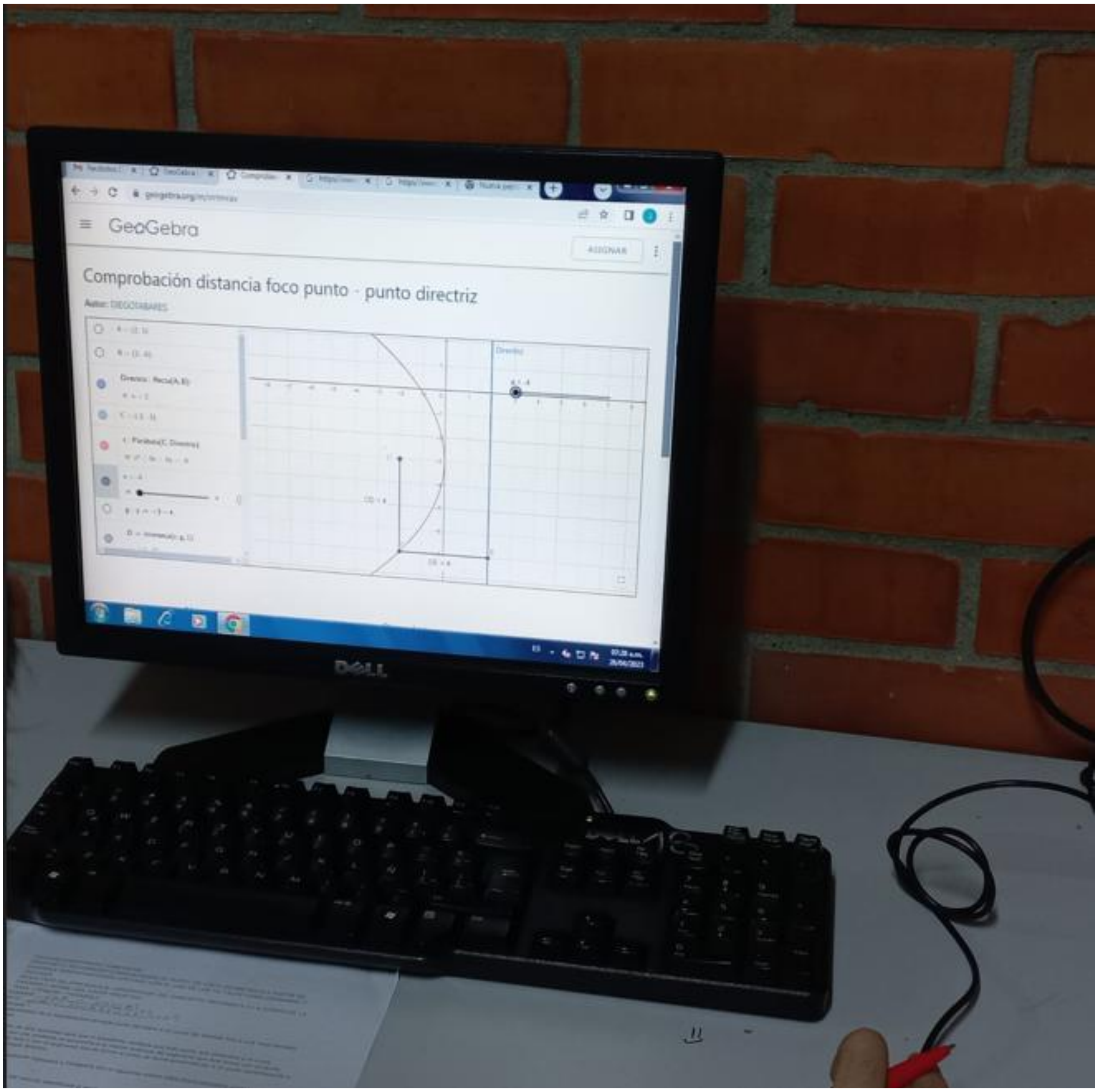



Apendice B

Desarrollo del OVA con GeoGebra y Tracker en la sala de sistemas





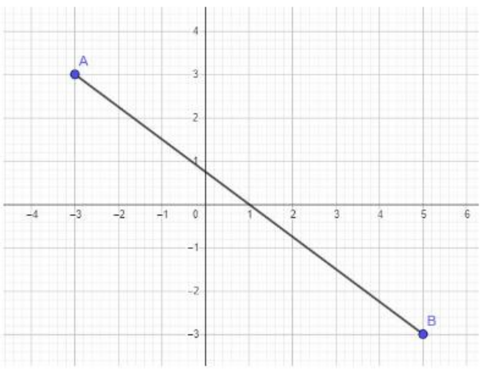

GeoGebra
ASIGNAR
Comprobación distancia foco punto - punto directriz
DELL

Apendice C

Test Final

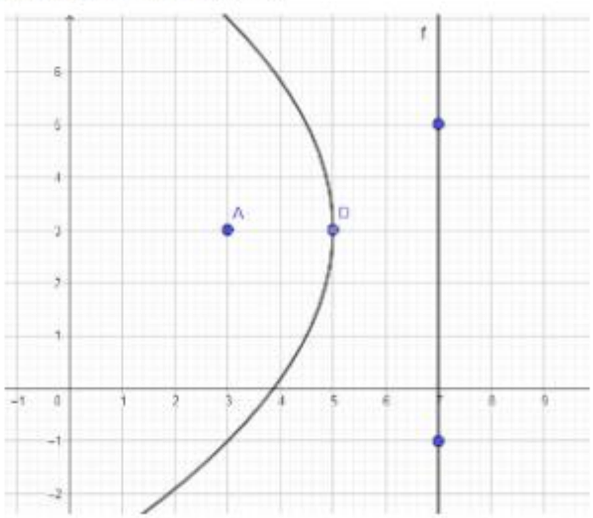
Preguntas

1. Según la gráfica, ¿Cuáles son las coordenadas del punto A y el punto B respectivamente? *



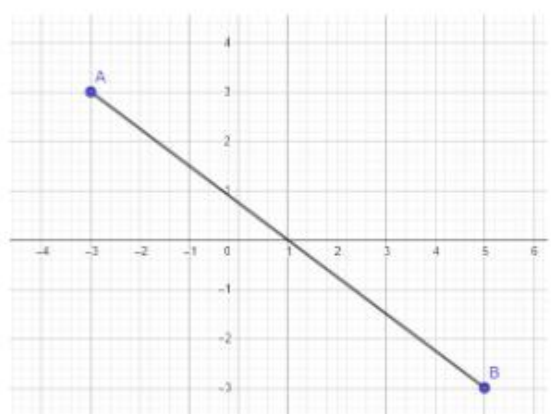
- A. (-3,5) y (3,-3)
- B. (-3,3) y (5,-3)
- C. (5,-3) y (3,-3)
- D. (3,-3) y (-3,5)

2. En la figura, se presenta el lugar geométrico denominado parábola. ¿Qué elementos de la parábola están indicando los puntos A y D?



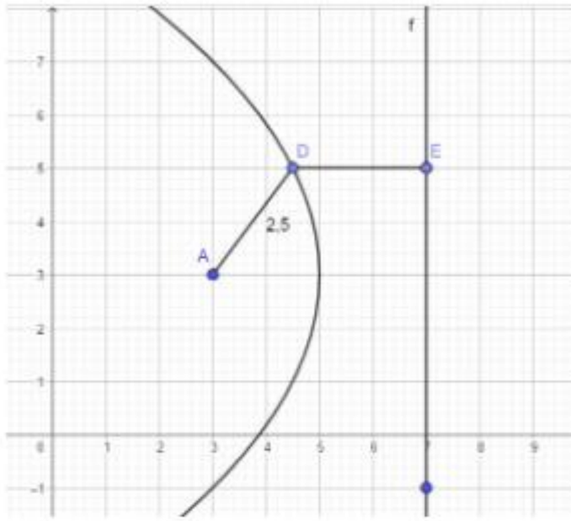
- A. El vértice y la directriz
- B. El foco y el vértice
- C. La directriz y el foco
- D. El vértice y asíntota.

3. En la figura, la medida de la longitud del segmento AB corresponde a *



- A. 6
- B. 8
- C. 10
- D. 12

4. En la figura, la medida de la longitud del segmento DE equivale a *



- A. 4
- B. 3,5
- C. 2,5
- D. 1

La ecuación canónica de una parábola con vértice en (h,k) está dado por la expresión $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ cuando la directriz es una recta paralela al eje x.

Sea la ecuación de la parábola $(x - 3)^2 = 8\,(y + 4)$, la coordenada del vértice corresponde al punto

A. (-3,4) B. (3, - 4) C. (- 4, 3) D. (4, -3)

- A
- B
- C
- D

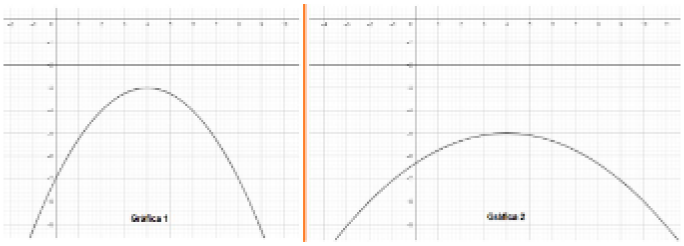
6. *

6. Sea la ecuación general de la parábola $y^2 + 2y - x + 6 = 0$, la coordenada del vértice se ubica en la coordenada

A. (4, -1) B. (5,-1) C. (2, 6) D. (- 2, 6)

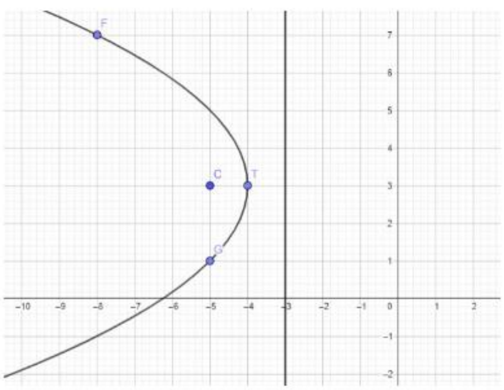
- A
- B
- C
- D

7. La imagen muestra las gráficas de dos parábolas con igual directriz (y=-2). Sobre las curvas se infiere que *



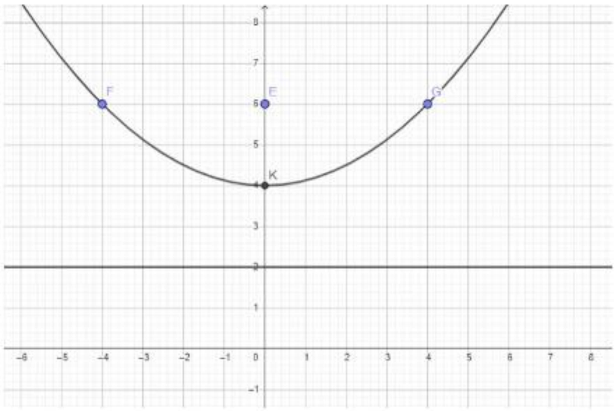
- A. el foco en la gráfica 1 está mas cerca del vértice que en la gráfica 2.
- B. el foco en la gráfica 2 está más cerca del vértice que en la gráfica 1.
- C. la directriz en las dos gráficas esta a la misma distancia del vértice.
- D. la directriz en la gráfica 2 está más cerca del vértice que en la gráfica 1.

8. En la figura, se describe la curva de una parábola. La coordenada del vértice corresponde al punto *



- A. (-4,3)
- B. (-5,3)
- C. (-8,7)
- D. (-5,1)

9. En la figura, la curva representa una parábola. La coordenada del foco corresponde al punto *



- A. (-4,6)
- B. (0,4)
- C. (4,6)
- D. (0,6)

10. En deportes como el futbol, el baloncesto o el voleibol es común que la trayectoria de la pelota describa una curva parabólica. En cualquiera de estos casos

- A. la directriz es horizontal y está por encima del vértice.
- B. la directriz es vertical y está a la derecha del vértice.
- C. la directriz es vertical y está a la izquierda del vértice.
- D. la directriz es horizontal y está por debajo del vértice.