

**La matemática crítica como enfoque para la apropiación de los objetos matemáticos a
estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas de La Argentina Huila**

Katerine Bravo Londoño

Asesor

Víctor Manuel Mendoza Rodríguez

Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD

Escuela Ciencias de la Educación ECEDU

Maestría en Educación

2024

Resumen

La presente investigación aborda la problemática de la educación matemática actual evidenciada desde los resultados obtenidos tanto en pruebas SABER 11 como en PISA, enfocándose en mejorar la educación matemática en la Institución Educativa Las Toldas en el grado Noveno, debido a que se requiere no solo adquirir conocimientos teóricos, sino también desarrollar habilidades prácticas en matemáticas que permitan a los estudiantes aplicarlas en contextos relevantes, como la tecnología, la ciencia, la economía y la política. Para lograr lo anterior, la investigación adopta un enfoque cualitativo que nos brinda una comprensión profunda y veraz de la realidad matemática educativa, asimismo, el método de investigación-acción fomenta cambios tanto educativos relacionados a la enseñanza de las matemáticas como sociales al pretender visualizar mediante la técnica de la observación la utilidad de las matemáticas dentro de la vida diaria. Lo anterior conlleva, al diseño de una unidad didáctica enfocada en la matemática crítica, que busca mostrarle al docente una forma de empoderar a los estudiantes al mismo tiempo que promueve el pensamiento crítico y facilita evidenciar la aplicabilidad de las matemáticas en el contexto, lo cual, impacte significativamente superando las barreras de la estratificación educativa y promoviendo la inclusión.

Palabras clave: Unidad Didáctica, Estratificación, Objeto matemático, Matemática Crítica, Enseñanza

Abstract

The present research addresses the problem of current mathematics education evidenced from the results obtained in both SABER 11 and PISA tests, focusing on improving mathematics education at the Las Toldas Educational Institution in the Ninth grade, because it is required not only to acquire theoretical knowledge, but also develop practical skills in mathematics that allow students to apply them in relevant contexts, such as technology, science, economics and politics. To achieve the above, the research adopts a qualitative approach that gives us a deep and truthful understanding of the educational mathematical reality. Likewise, the action research method promotes both educational changes related to the teaching of mathematics and social changes by attempting to visualize through the observation technique the usefulness of mathematics in daily life. The above leads to the design of a teaching unit focused on critical mathematics, which seeks to show the teacher a way to empower students while promoting critical thinking and facilitating evidence of the applicability of mathematics in the context, which, significantly impact overcoming the barriers of educational stratification and promoting inclusion.

Keywords: Didactic Unit, Stratification, Mathematical Object, Critical Mathematics, Teaching

Tabla de Contenido

Introducción	10
Justificación	13
Objetivos.....	17
Objetivo General.....	17
Objetivos Específicos.....	17
Planteamiento del Problema	18
Marco Teórico.....	22
Educación Matemática.....	22
Educación Matemática Crítica.....	24
La Matemática Crítica en la Enseñanza.....	25
Aprendizaje Cooperativo	26
Metodología	27
Estrategia Metodológica	28
Estrategia Didáctica	29
Unidades Didácticas.....	31
Metacognición.....	34
Marco Conceptual.....	36
Unidad Didáctica	36
Matemática Crítica.....	36
Enseñanza	37
Objetos Matemáticos	37
Enfoque de la Matemática Crítica en la Enseñanza.....	38

Estratificación	38
Toma de decisiones.....	39
Pensamiento Crítico	39
Espacio Democrático	40
Laboratorio.....	41
Metodología	42
Método de Investigación.....	43
Población y Muestra	43
Instrumentos y Técnicas de Investigación	44
Fases de la Investigación	46
Primera Fase. Construcción de los instrumentos	46
La Bitácora.....	46
La Entrevista.	47
Segunda Fase. Validez y Fiabilidad.....	49
Tercera Fase. Diseño y Construcción de la Unidad Didáctica (análisis de datos)	50
Cronograma de actividades.....	51
Resultados	52
Recolección de datos.....	52
Matriz de Análisis Documental	52
Entrevista a docentes.....	57
Entrevista a Estudiantes	60
Bitácora de Campo.....	62
Análisis	65

Entrevistas a Docentes	65
Entrevista a Estudiantes Mediante Técnica de Grupos Focales.....	66
Matriz de Análisis de Contenido.....	68
Bitácora de Campo.....	70
Discusión.....	73
Conclusiones	76
Referencias Bibliográficas	78
Apéndices.....	82

Lista de Tablas

Tabla 1 <i>Entrevista docentes</i> -----	48
Tabla 2 <i>Entrevista a estudiantes</i> -----	49
Tabla 3 <i>Cronograma de actividades</i> -----	51
Tabla 4 <i>Análisis documento 1</i> -----	53
Tabla 5 <i>Análisis documento 2</i> -----	55
Tabla 6 <i>Análisis documento 3</i> -----	56
Tabla 7 <i>Resultados entrevista a docentes</i> -----	58
Tabla 8 <i>Resultados entrevista a estudiantes</i> -----	61

Lista de Figuras

Figura 1 <i>Evidencia fotográfica aplicación entrevista docente</i>	59
Figura 2 <i>Evidencia fotográfica aplicación entrevista a estudiantes</i>	62
Figura 3 <i>Mapa mental de análisis de la información</i>	72

Lista de Apéndices

Apéndice A <i>Formato consentimiento informado estudiantes</i> -----	82
Apéndice B <i>Formato consentimiento informado docentes</i> -----	83
Apéndice C <i>Unidad didáctica</i> -----	84

Introducción

En el contexto rural, los bajos resultados que muestran las pruebas tanto internas como externas, SABER y PISA respectivamente, que a su vez representan la clasificación y estratificación, ya que se basan únicamente en su capacidad intelectual, pero no proporcionan ambientes de aprendizaje que promuevan la diversidad y la inclusión (Skovsmose y Valero, 2012), lo anterior también se ve reflejado en las guías didácticas tradicionales que se enfocan solo en dichos resultados. Lo anterior, conlleva a que el docente de matemáticas asuma el reto de contribuir en la mejora del desempeño de los estudiantes, pero principalmente en romper con la estratificación y clasificación; entonces, esta investigación toma su dirección a partir de esta problemática que resalta la necesidad de implementar diseños curriculares que fomenten la equidad y la justicia en la educación matemática, por medio de un diseño apropiado de una unidad didáctica que desarrolle un objeto matemático específico mediante el enfoque de la matemática crítica como un método diferenciador que busca garantizar una educación matemática de calidad y que a su vez promueva la reflexión y la participación de los estudiantes, donde se reevalúe la forma tradicional de evaluar y estratificar a los estudiante (Skovsmose y Valero, 2012).

La población objeto de estudio son los estudiantes y docentes del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas del municipio de La Argentina-Huila con una muestra no probabilística, compuesta por los docentes del grado noveno de la sede principal, a lo que Monje (2011) denomina muestreo teórico lo cual permite al estudio que el número de su muestra no tenga un valor significativo sino la reconstrucción de vivencias y sentidos asociados a ciertas instancias en el aula de clase. Ante lo que se formuló la pregunta ¿cómo desde el enfoque de la matemática crítica se puede diseñar una unidad didáctica para la apropiación de objetos

matemáticos del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas Argentina Huila? la cual permitió el desarrollo de este proyecto y alcanzar el objetivo general de esta investigación.

El método seleccionado fue el enfoque cualitativo, el cual exige conocer con profundidad el campo de estudio, lo que determinó la necesidad del acercamiento del investigador con el campo y la muestra, donde se desarrollaron observaciones con las cuales logró llegar a los objetivos planteados mediante registro de las propias observaciones y el descubrimiento de significados que los sujetos ofrecen de sus propias experiencias, confiando en sus expresiones subjetivas, escritas y verbales (Monje, 2011). Ahora, el diseño de investigación-acción al ser un proceso reflexivo-activo permitió el diseño de una unidad didáctica que pretende generar una transformación en el proceso de la enseñanza de los objetos matemáticos mediante el enfoque de la matemática crítica que conlleve no solo a un cambio educativo sino social mediante el mejoramiento continuo y permanente de la eficacia de la acción social.

La metodología comprendió tres fases, iniciando con la construcción de los instrumentos de recolección de información, los cuales se alinean a las técnicas definidas como lo es la observación simple no regulada, grupos focales y análisis documental. Estos instrumentos (entrevistas, matriz de análisis documental y bitácora de campo) permitieron recolectar la información, por medio de su aplicación a los participantes, donde se trabajó con los estudiantes y docentes del grado noveno a quienes se les aplicó las entrevistas y se diligenció la bitácora de campo por medio de la observación directa no regulada en clase de matemáticas, también se realizó un estudio documental sobre el enfoque de la matemática crítica, mediante el instrumento matriz de análisis documental. Luego de recolectada y analizada la información se determinó la pertinencia del enfoque de la matemática crítica para el diseño de la unidad didáctica cuya estructura tiene en cuenta la taxonomía de Bloom y comprende los momentos de

inicio (recordar, comprender), desarrollo (aplicar, analizar) y cierre (evaluar y crear) respectivamente.

La segunda fase, comprende la validez y la fiabilidad de los instrumentos, la validez se refiere a la capacidad de este para medir de manera precisa y adecuada la construcción de una unidad didáctica, en ese sentido se aplica una encuesta cerrada tipo Likert a tres docentes de matemáticas con experiencia en contextos rurales; mientras tanto, la fiabilidad de los dos instrumentos pretende encontrar una estandarización del proceso de entrevista en donde la clarificación y documentación de las respuestas es fundamental para no perder la información obtenida dentro del campo de investigación.

En cuanto a la tercera fase, esta que nos dirige hacia el cumplimiento del objetivo general de la investigación y es donde se diseña y construye la unidad didáctica luego del análisis de los datos recolectados, donde la información obtenida mediante la bitácora y las entrevistas se complementa con el análisis de los datos recopilados mediante la matriz de análisis en la exploración teórica, es triangulada utilizando el software Atlas.ti el cual permitirá identificar patrones, temas y relaciones dentro de los datos cualitativos recopilados. El enfoque de la investigación permitirá llevar a cabo un análisis cualitativo profundo mediante las unidades de análisis estratificación, unidad didáctica y matemática crítica. Finalmente, con los resultados obtenidos se procede al diseño y construcción de la unidad didáctica.

Justificación

La investigación parte del interés de indagar sobre los desarrollos del saber y la renovación de las prácticas pedagógicas, didácticas y curriculares, donde la búsqueda de nuevos conocimientos teóricos y empíricos hacen parte de la línea de investigación "pedagogía, didáctica y currículo" la cual corresponde a una de las líneas transversales de la Escuela de Ciencias de la Educación ECEDU de la UNAD (UNAD, 2024). Expuesto lo anterior, las prácticas docentes serán el campo de investigación en el cual se pretende resignificar su labor por medio de la construcción de una unidad didáctica basada en el enfoque de la matemática crítica para mejorar la enseñanza de objetos matemáticos en el grado Noveno de la Institución Educativa Las Toldas, de este modo, sistematizar una práctica docente efectiva con la cual se fortalezca las competencias docentes y contribuya al desarrollo integral de los estudiantes.

Debido a que la Institución Educativa Las Toldas enfrenta desafíos significativos en los resultados de las pruebas SABER 11 dentro de un contexto rural, a causa de la manipulación y desarrollo de unidades didácticas descontextualizadas con los requerimientos actuales de la educación matemática por parte de los docentes. Razón por la cual, se pretende beneficiar las prácticas docentes desde un enfoque crítico en la educación matemática, que promueve un aprendizaje más autónomo y contextualizado, donde no se atiende solamente los resultados académicos, sino también tenga en cuenta la transformación de las interacciones sociales y el acercamiento al conocimiento en un entorno educativo que requiere innovación y adaptabilidad, entonces, proporcionar soluciones educativas que respondan a las necesidades específicas de los estudiantes en contextos rurales.

A raíz de lo anterior, se introduce la matemática crítica de manera dinámica e innovadora con el objetivo de empoderar a los estudiantes como agentes políticos a través de las

matemáticas, donde la adopción de este enfoque surge como una respuesta necesaria para fortalecer los valores democráticos de equidad y justicia en las aulas. De acuerdo con Ole Skovsmose y Paola Valero, es crucial romper con la estratificación y clasificación de los estudiantes basada únicamente en su capacidad intelectual, y en su lugar, proporcionar entornos de aprendizaje que promuevan la diversidad y la inclusión (Skovsmose y Valero, 2012 citados por Bravo, 2024).

Este problema subraya la necesidad de implementar diseños curriculares que fomenten la equidad y la justicia en la educación matemática. En este sentido, la matemática crítica se presenta como un enfoque diferenciador que busca garantizar una educación matemática de calidad, reevaluando la manera tradicional de evaluar y estratificar a los estudiantes (Skovsmose y Valero, 2012). Por lo tanto, es esencial indagar cómo lograr estos objetivos dentro del marco de la matemática crítica, por tanto, la presente investigación propone diseñar una unidad didáctica que desarrolle un objeto matemático específico, pero dentro de un marco crítico que promueva la reflexión y la participación de los estudiantes (Bravo, 2024).

Esta investigación responde a la necesidad de abordar los problemas de la educación matemática en la I.E. Las Toldas mediante una unidad didáctica que fomente el pensamiento crítico y la aplicabilidad de las matemáticas. Lo que busca es empoderar a los estudiantes y promover su desarrollo integral como ciudadanos informados, capaces de enfrentar desafíos en su entorno, al tiempo que se refuerza un aprendizaje que permita validar procedimientos y estrategias matemáticas para resolver problemas (Bravo, 2024).

En este contexto, surge la oportunidad de abordar la problemática de la estratificación y fomentar la inclusión mediante la implementación de una unidad didáctica basada en la matemática crítica. Esta aproximación permite crear entornos educativos que no se estén

limitados solo a los resultados de pruebas externas como las SABER 11, sino que utilicen estos resultados como una herramienta para la mejora continua de la educación matemática (Bravo, 2024).

Así, el docente juega un papel fundamental al dar uso a metodologías que permitan a los estudiantes desarrollar una comprensión crítica de la forma en que se utilizan las matemáticas en la sociedad y cómo pueden contribuir a promover la justicia social y la equidad. A través de la resolución de problemas y la toma de decisiones, los estudiantes adquieren las habilidades necesarias para participar activamente en la construcción de un mundo más justo (Skovsmose y Valero, 2012 citado por Bravo, 2024).

El docente debe adoptar la postura de enseñanza de la matemática propuesta por Freudenthal, quien afirma que la enseñanza de la matemática debe estar relacionada con la "realidad". Es decir, la enseñanza de las matemáticas debe estar determinada por las situaciones del contexto y no por la memorización y repetición de definiciones y procesos algorítmicos sin contexto (González, 2019 citado por Bravo, 2024).

En esta línea, González (2019) citando a Skovsmose (1999) menciona que la EMC no debe ser una imposición, sino una negociación entre el docente y el estudiante sobre las razones y las metas del proceso educativo, mostrando así la EMC como una herramienta para fortalecer conceptos matemáticos (Skovsmose y Valero, 2012). Posteriormente, la educación matemática crítica reconoce que las matemáticas no son neutrales y busca fomentar una reflexión crítica sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana, abordando problemas de exclusión y estratificación social y promoviendo la participación ciudadana y la democracia a través del razonamiento matemático (Skovsmose y Valero, 2012 citado por Bravo, 2024).

Es necesario investigar el impacto de diseñar una unidad didáctica enfocada en la matemática crítica en contextos vulnerables como el rural en Colombia. Esto permitirá reforzar el aprendizaje sin caer en la estratificación de los estudiantes, logrando así ciudadanos democráticos. El compromiso crítico de la educación matemática con la democracia se refiere a la idea de que esta educación debe promover los valores y principios democráticos, como la igualdad, la justicia y la participación ciudadana (Skovsmose y Valero, 2012 citado por Bravo, 2024). No debe ser una competencia entre instituciones para obtener los mejores resultados en las pruebas SABER 11, sino un reconocimiento de que la enseñanza de las matemáticas está influenciada por valores, intenciones e intereses políticos, fomentando una reflexión crítica sobre su papel en la sociedad y la vida cotidiana (Skovsmose y Valero, 2012).

Objetivos

Objetivo General

Diseñar una unidad didáctica con el enfoque de la matemática crítica para la apropiación de objetos matemáticos del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas.

Objetivos Específicos

Realizar un estudio teórico del enfoque de la matemática crítica para la construcción de una unidad didáctica.

Evaluar la pertinencia del enfoque de la matemática crítica para la apropiación de los objetos matemáticos a los estudiantes del noveno grado.

Construir una unidad didáctica desde el enfoque de la matemática crítica para la apropiación de objetos matemáticos a los estudiantes del noveno grado

Planteamiento del Problema

En el escenario actual de la educación matemática en Colombia, al igual que en muchos otros países, se trabaja en el fortalecimiento de la formación matemática para satisfacer las demandas contemporáneas en áreas como tecnología, ciencia, economía y política. En este contexto, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son fundamentales, ya que hoy en día no se trata solo de adquirir conocimientos teóricos, sino de desarrollar en los estudiantes habilidades, destrezas y recursos tanto físicos como mentales necesarios para la sociedad presente y futura (Bravo, 2024).

Lo anterior es respaldado por Quintero y Restrepo (2016) citados por Bravo (2024), quienes señalan que existe un desafío en el ámbito educativo en el que los estudiantes tienen dificultades para analizar, interpretar y desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva para resolver problemas; habilidades que parecen inalcanzables para muchos. A nivel global, el informe de la OCDE (2018) destaca que, en el contexto educativo de Colombia, solo aproximadamente el 1% de los estudiantes alcanzaron el Nivel 5 o superior en matemáticas, mientras que el promedio de la OCDE es del 11%. Estas cifras son alarmantes para la formación matemática en el país y reflejan una problemática actual significativa (Bravo, 2024).

Por otro lado, en algunas economías asiáticas como Beijing, Shanghái, Jiangsu y Zhejiang (China), Singapur, Hong Kong (China), Macao (China), China Taipéi y Corea, los porcentajes de estudiantes que alcanzaron el Nivel 5 o superior en matemáticas son más altos significativamente; para el caso de Beijing, Shanghái, Jiangsu y Zhejiang (China), el 44% de los estudiantes alcanzaron este nivel, mientras que en Singapur el 37%, en Hong Kong (China) el 29%, en Macao (China) el 28%, en China Taipéi el 23% y en Corea el 21% (OCDE, 2018 citado por Bravo, 2024).

Los estudiantes que alcanzan el nivel 5 en estos países asiáticos muestran una notable capacidad para modelar situaciones complejas matemáticamente y para seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas para abordar problemas matemáticos. La habilidad de aplicar el pensamiento matemático a situaciones reales es esencial para desarrollar competencias prácticas y prepararse para los desafíos del mundo actual. En comparación, en 2006 existía una brecha de 24 puntos entre el promedio colombiano y el latinoamericano en la evaluación PISA, pero para 2018 esta diferencia se redujo a solo tres puntos a favor de Colombia (OCDE, 2018), indicando una mejora relativa. Lo anterior pone en evidencia que los estudiantes colombianos obtuvieron un puntaje promedio superior en matemáticas en comparación con estudiantes de otros países latinoamericanos que participaron en la evaluación PISA 2018 (Bravo, 2024).

En cuanto a los resultados de las pruebas SABER 11 de 2022, hubo un aumento de 1 punto en el puntaje promedio en comparación con 2021, regresando al promedio de 52 puntos observado en 4 de los últimos 5 años (ICFES, 2022). No obstante, el panorama sigue siendo preocupante, ya que el informe nacional de resultados SABER 11 de 2022 indica que el 84% de los estudiantes se ubicó en los niveles 2 y 3, mientras que solo el 5% alcanzó el nivel 4. En las zonas rurales, donde se desarrollará esta investigación, la distribución fue similar al grupo de nivel socioeconómico más bajo, donde cerca del 20% de los estudiantes se ubicó en el nivel 1 y solo el 2% o menos alcanzó el nivel 4, en contraste con el 21% de los estudiantes en zonas urbanas ubicados en el nivel 4. De manera general, la zona urbana redujo el porcentaje de estudiantes en los niveles 1 y 2 al 41%, frente al 45% a nivel nacional (ICFES, 2022 citado por Bravo, 2024).

Estos datos evidencian las brechas de desigualdad entre las zonas urbanas y rurales. En este contexto, la Institución Educativa Las Toldas no es ajena a esta problemática. Los resultados

de las pruebas SABER 11 de 2022 muestran que solo el 3% de los estudiantes alcanzaron el nivel 4 en matemáticas, frente a un 21% en el nivel 2, y un 76% en el nivel 3, muy por encima de la media nacional del 49% (Bravo, 2024).

Dado lo anterior, la Institución Educativa Las Toldas enfrenta una problemática significativa en el área de matemáticas. En 2022, se evidenció que el 50% de los estudiantes no logra validar procedimientos y estrategias matemáticas, el 24% no comprende ni transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos, y el 34% no puede plantear ni implementar estrategias adecuadas para resolver problemas con información cuantitativa (ICFES, 2022). Estas cifras reflejan una falta de comprensión profunda y aplicación efectiva de los conceptos matemáticos en situaciones reales (Bravo, 2024).

La problemática expuesta sugiere la necesidad de reforzar la enseñanza para aumentar el porcentaje de estudiantes en el nivel superior (nivel 4) de la prueba, adoptando una enseñanza reflexiva y crítica que empodere a los estudiantes como sujetos políticos capaces de adquirir poder a través de las matemáticas. Entonces, el grado noveno es crucial en este objetivo, ya que ofrece la oportunidad de fortalecer los conocimientos y habilidades matemáticas necesarias para superar las debilidades identificadas. Considerando esta situación, se plantea la pregunta: *¿Cómo desde el enfoque de la matemática crítica se puede diseñar una unidad didáctica para la apropiación de objetos matemáticos del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas Argentina Huila?* (Bravo, 2024).

Para responder a esta pregunta, es esencial que los docentes de matemáticas en la I.E. Las Toldas consideren la aplicación de las matemáticas en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas en distintos escenarios críticos, abordando conceptos como colectividad, transformación, deliberación y conexión (Skovsmose y Valero, 2012 citados por Bravo, 2024).

Skovsmose y Valero (2012) proponen que la investigación en educación matemática debe considerar aspectos sociales, políticos, económicos y culturales para evitar conflictos internos y promover una educación matemática comprometida con los principios democráticos. Por lo tanto, la presente investigación busca solucionar esta problemática mediante actividades guiadas desde el enfoque de la matemática crítica, que empoderen a los estudiantes y los hagan conscientes de la estratificación en la que se encuentran. Como indican Skovsmose y Valero (2012), es crucial reflexionar sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y en la toma de decisiones, desde una perspectiva crítica y consciente de las desigualdades y exclusiones sociales, para que el conocimiento esté "cargado de significados e intenciones provenientes de contextos sociales y culturales en los que está inmerso el contexto escolar" (MEN, 1988 citado por Bravo, 2024).

Marco Teórico

Este apartado proporciona una orientación general que sirve como guía para la comprensión del problema de investigación, además de dirigir el enfoque de la recolección y el análisis de datos. Por tanto, aquí se esbozan los componentes que fundamentan la parte teórica sobre la que se sustentan las bases de la investigación, ofreciendo un sólido andamiaje con el que se respalde una investigación que se centra en el fortalecimiento de la educación matemática en la Institución Educativa Las Toldas, desde un enfoque de la matemática crítica, sustentado con investigaciones previas y los estudios relevantes en el campo de la educación matemática, tanto a nivel nacional como internacional, para contextualizar aún más la problemática abordada en esta investigación y respaldar la pertinencia de su enfoque.

Educación Matemática

Hoy en día, el conocimiento no se encuentra concentrado en una sola fuente; en cambio, está disperso en múltiples fuentes accesibles con un solo clic. En este contexto, el conocimiento matemático en el ámbito escolar se basa en la comprensión que los estudiantes desarrollan de los temas propuestos, es decir, cómo pueden reconocer y utilizar conceptos matemáticos en diversos contextos (Rico, 1990 citado por Bravo, 2024).

Esto implica una constante evolución de la educación matemática y una nueva forma de abordar los procesos educativos. Por lo tanto, el conocimiento no solo debe enfocarse en las matemáticas, sino también en la psicología y la neurociencia del aprendizaje, promoviendo el desarrollo de estos conocimientos desde la solidaridad y la cooperación, superando así el individualismo en el sistema escolar (Rico, 1990 citado por Bravo, 2024).

En educación, nada está terminado, y realizar transformaciones formales no es suficiente. Es necesario llevar a cabo una remodelación que permita abordar el fondo del problema. Esto

implica una reflexión crítica sobre el rol docente y las consecuencias de sus acciones en el aula. El profesor debe tener una visión holística en sus procesos didácticos y estar fundamentado para diseñar una estructura organizativa de aspectos concretos del currículo (Rico, 1990 citado por Bravo, 2024).

En la educación matemática, el docente tiene la labor de facilitar, estimular y fomentar el interés de los estudiantes en las tendencias actuales y futuras. Cockcroft argumenta que la matemática es una materia difícil de enseñar y aprender, y por ello, los docentes de matemáticas deben trabajar y practicar constantemente, independientemente del nivel de conocimiento que posean. No pueden estratificar ni rechazar a aquellos estudiantes que no siguen un ritmo determinado de asimilación, ni imponer un reciclaje permanente a un grupo de educandos (Rico, 1990 citado por Bravo, 2024).

Para desarrollar la educación matemática, es fundamental conocer las necesidades de los niños y adolescentes y establecer una base amplia de fenómenos y experiencias relacionadas con los conocimientos que se quieren transmitir. La utilidad de lo que se enseña, junto con la coherencia interna, es crucial en la selección del contenido, permitiendo que la educación matemática promueva movimientos igualitarios desde causas políticas y sociales (Bravo, 2024).

El proceso de enseñanza no puede prescindir de los saberes propios de las matemáticas, que generan nuevos conocimientos en otras ciencias (matematización), permitiendo explorar con los estudiantes su aplicabilidad en diversos contextos (Rico, 1990). Para que la educación matemática funcione, es importante estimular el deseo de aprender, considerando que los seres humanos no deben aprender las matemáticas como un sistema cerrado, sino como una actividad, el proceso de matematizar la realidad y, cuando sea posible, incluso matematizar las matemáticas (Rico, 1990 citado por Bravo, 2024).

Educación Matemática Crítica

La educación matemática crítica (EMC) surgió en los años 80 y se orienta hacia los aspectos sociales de la educación matemática. Este movimiento no solo busca mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sino también compensar los fenómenos educativos y su relación con la sociedad, la democracia y la justicia social (Bravo, 2024).

Actualmente, existe una crítica hacia el poder formativo de las matemáticas, dado su gran impacto en las estructuras tecnológicas, científicas y sociales de las sociedades altamente tecnificadas. Este enfoque pretende reflexionar sobre la matemática que subyace en un mundo estructurado en torno a modelos matemáticos, los cuales no siempre han generado progreso y bienestar, sino que también han contribuido a estructuras de riesgo y catástrofes naturales y sociales (Bravo, 2024).

La educación matemática no debe ser vista simplemente como una habilidad para el mercado laboral, sino como una herramienta crítica para entender la sociedad y cuestionar las estructuras de poder. La EMC se enfoca en la alfabetización matemática, la democracia y la justicia social, siendo una fuerza crítica hacia la sociedad al revelar desigualdades y opresiones. Entre sus preocupaciones están la relación entre la alfabetización matemática y la competencia crítica del ciudadano, y la relación entre la educación matemática y la democracia, equidad, justicia social y exclusión. La EMC se diferencia de aquellas organizaciones que ven la educación matemática solo como una herramienta para el mercado laboral y el capitalismo (Bravo, 2024).

La educación matemática crítica se basa en tres enfoques teóricos: el enfoque cognitivo, que investiga las representaciones mentales del estudiante y permite un aprendizaje significativo; el enfoque del constructivismo radical, que individualiza el aprendizaje como producto de la

acción y la reflexión del estudiante, con el docente como acompañante del proceso; y el enfoque sistémico, que reflexiona sobre el saber matemático a enseñar y propone constructos como la transposición didáctica y situaciones didácticas (Font, 2002 citado por Sánchez y Torres, 2009).

El enfoque crítico asume una mirada sobre los aspectos sociopolíticos presentes en las prácticas pedagógicas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto implica un interés por el estudio de los procesos sociales, históricamente situados, que involucran la creación y recreación de diversos tipos de conocimiento y razonamiento asociados con las matemáticas (Valero, 2007 citado por Sánchez y Torres, 2009). Además, busca develar las intenciones, muchas veces ocultas, de poder detrás de determinadas prácticas pedagógicas y matemáticas, y su influencia en la construcción de la sociedad (Sánchez y Torres, 2009 citado por Bravo, 2024).

La Matemática Crítica en la Enseñanza

Transformar tanto las prácticas educativas matemáticas como la realidad social, es la contribución de la matemática crítica en la enseñanza. Según Guerreo (2008), esta perspectiva, es influenciada por corrientes como la Escuela de Frankfurt, Paulo Freire y la etnomatemática de D'Ambrosio, las cuales reconocen que las matemáticas son una construcción cultural que refleja relaciones de poder y dominación, de ahí, que resulta esencial fomentar una actitud de autorreflexión y crítica en estudiantes y docentes para desvelar y transformar las estructuras de poder presentes en la enseñanza de las matemáticas.

Freire (1972) aboga por una educación problematizadora y liberadora, basada en el diálogo y la reflexión, que permita a los educandos desarrollar una conciencia crítica y actuar sobre su realidad; mientras tanto, la etnomatemática destaca la relación entre la cultura y las matemáticas, promoviendo un enfoque multicultural que reconoce y respeta las diferentes formas de conocimiento. En este contexto, la enseñanza de las matemáticas no debe limitarse a la

transmisión de conocimientos abstractos, sino que debe vincularse con la realidad y las experiencias de los estudiantes donde el diálogo, la reflexión y la acción son fundamentales para construir significados y promover un razonamiento matemático tanto cuantitativo como cualitativo.

La matemática crítica en la enseñanza no solo busca el desarrollo de habilidades técnicas, sino también la emancipación de los individuos, la valoración de la diversidad cultural y el fomento de una conciencia crítica que permita transformar la realidad social, como lo explica Habermas (citado en Carr y Kemmis, 1988), cuando afirma que el conocimiento humano es moldeado por los intereses y necesidades presentes en las actividades diarias, las cuales determinan cómo entendemos y actuamos en el mundo que nos rodea, Habermas identifica tres tipos de conocimiento: técnico, que se refiere a la habilidad para usar herramientas y comprender causas y efectos; práctico, que implica interpretar y aplicar conocimientos en la vida cotidiana; y emancipatorio, que se relaciona con la capacidad de reflexionar críticamente sobre las propias acciones y creencias.

Aprendizaje Cooperativo

El aprendizaje cooperativo se define como un método educativo que enfatiza la participación activa y directa de los estudiantes en actividades grupales, donde cada miembro del grupo se beneficia del intercambio de conocimientos y habilidades con sus compañeros. Según Johnson, Johnson y Holubec (1994) citado por Cruz (2018), “el aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en que los estudiantes trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás” (p. 5). Para implementar este enfoque, se forman grupos formales que pueden durar desde una hora hasta varias semanas de clases. Estos grupos trabajan en pro de alcanzar objetivos comunes bajo la supervisión del docente, quien asegura que las

tareas de aprendizaje sean completadas de manera cooperativa, independientemente de la asignatura o programa de estudio.

El aprendizaje cooperativo también permite la organización de actividades más informales, como clases magistrales, demostraciones o visionados de vídeos, creando un clima propicio para el aprendizaje y la creación de expectativas sobre el contenido de la clase (Johnson, Johnson y Holubec, 1994 citado por Cruz, 2018). Además, Ferreiro y Calderón (2001, citado por Cruz, 2018) argumentan que, aunque el aprendizaje es un fenómeno individual, ocurre en un contexto social donde las relaciones e interacciones entre iguales facilitan el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes. Estudios como el de Gavilán y Almario (2012) han demostrado que, aunque inicialmente no se observan diferencias significativas en las estrategias de aprendizaje entre grupos cooperativos y no cooperativos, a largo plazo, el grupo que emplea el aprendizaje cooperativo muestra mejoras significativas. Por lo tanto, el aprendizaje cooperativo se presenta como una estrategia eficaz para maximizar la participación y el rendimiento académico de los estudiantes (Cruz, 2018)

Metodología

Las metodologías son acciones concretas derivadas de una posición teórica que determinan la interacción entre el profesor y el estudiante durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. La metodología didáctica se refiere a cómo el docente enseña de manera estratégica y científicamente fundamentada en el aula, para que los estudiantes logren ciertos aprendizajes. Las metodologías centradas en los estudiantes buscan fomentar el pensamiento crítico, la motivación y la aplicación de los aprendizajes en diversas situaciones. Una metodología efectiva suele combinar diferentes enfoques y, para elegirla adecuadamente, es esencial conocer sus ventajas e inconvenientes y tener claros los objetivos de enseñanza. Por tanto, se debe considerar

la combinación de estrategias y metodologías para comprender la relación entre didáctica y pedagogía (Bravo, 2024).

Las estrategias metodológicas se refieren a los enfoques y criterios que, mediante métodos, técnicas y procedimientos, se utilizan para organizar una secuencia planificada que facilite la construcción de conocimientos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje (Quintero, 2011). Según Quintero (2011) citado por Bravo (2024), las estrategias metodológicas comprenden una secuencia planificada de técnicas, procedimientos de enseñanza y actividades que los docentes emplean con el propósito de facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, es fundamental que los docentes elijan estrategias metodológicas adecuadas al contenido que enseñarán y al nivel escolar y edad de los estudiantes.

Estrategia Metodológica

Las estrategias metodológicas contienen objetivos específicos que se logran mediante procedimientos, es decir, una metodología. Estas estrategias son técnicas y acciones utilizadas en la enseñanza para alcanzar objetivos educativos. Los docentes las emplean para planificar actividades, generar aprendizajes y evaluar el progreso de los estudiantes. Por otro lado, las estrategias de aprendizaje son procedimientos que los estudiantes utilizan intencionalmente para facilitar su propio proceso de aprendizaje, abordando los contenidos de manera efectiva y desarrollando habilidades de estudio. Ambas son esenciales para un aprendizaje efectivo (Torres y Girón, 2009; Alcaraz et al., 2004 citados por Bravo, 2024).

Las estrategias de enseñanza son elecciones planificadas que los docentes realizan para que los estudiantes adquieran ciertos conocimientos o habilidades. Estas estrategias guían la forma de actuar en el aula, organizando y dirigiendo preguntas, actividades y explicaciones, y motivando a los estudiantes para que se interesen en el aprendizaje (Romero, 2009 citado por

Bravo, 2024). Las estrategias de enseñanza comprenden aspectos como la dirección del profesor, la organización de la clase y el uso de recursos didácticos. Cualquier estrategia de enseñanza puede incluir elementos como tareas (actividades a realizar en un tiempo y situación determinados), procedimientos (secuencia de tareas) y técnicas (secuencia ordenada de tareas y procedimientos que conducen a resultados precisos) (Nisbet, 1991, citado en Alcaraz et al., 2004).

Las estrategias de aprendizaje son diversas acciones mentales que un estudiante emplea en una situación específica de aprendizaje para facilitar la adquisición de conocimientos. También pueden entenderse como el proceso o las etapas que permiten el almacenamiento y/o la utilización efectiva de la información adquirida (Romero, 2009 citado por Bravo, 2024).

Estrategia Didáctica

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben concebirse como una oportunidad para crear actividades educativas que promuevan el desarrollo de la inteligencia socioafectiva en los estudiantes, fomentando actitudes y valores de cooperación, colaboración, tolerancia y esfuerzo compartido dentro de la comunidad educativa. Estos aspectos influyen directamente en cómo los estudiantes abordan la resolución de problemas matemáticos (Bravo, 2024).

Basándonos en el argumento previo, es imprescindible utilizar una planificación lógica, sistemática, táctica y operativa. Es necesario implementar una estrategia que permita mejorar el aprendizaje, ya sea de forma individual o colaborativa, y facilite la resolución de problemas de manera efectiva (Bravo, 2024).

El concepto de estrategia está relacionado con "la persecución de objetivos y programas, de forma consciente o inconsciente, no reductibles a objetivos y programas implícitos en la

acción tradicional" (Watson, 1990 citado por Guerrero, 2007, p. 81). En un contexto educativo, hablamos de estrategias docentes, que son "procesos encaminados a facilitar la acción formativa, la capacitación y la mejora sociocognitiva, tales como la reflexión crítica, la enseñanza creativa, la interrogación didáctica, el debate o discusión dirigido, el aprendizaje compartido, la metacognición y la utilización didáctica del error" (De la Torre, 2000 citado por Guerrero, 2007, p. 2).

Enseñar a aprender requiere el conocimiento de algunas estrategias docentes. La investigación parte de una estrategia didáctica, definida como el "procedimiento adaptativo -o conjunto de ellos- por el que organizamos secuencialmente la acción en orden a conseguir las metas previstas" (De la Torre, 2000 citado por Tejada, 2007, p. 3). Para esta investigación, el objetivo es diseñar una unidad didáctica desde el enfoque de la matemática crítica para la apropiación de objetos matemáticos del grado noveno. Esto implica facilitar la acción formativa del objeto matemático mediante la capacitación para mejorar en lo sociocognitivo, con una enseñanza motivadora, un aprendizaje cooperativo enmarcado por el debate o discusión de errores o fortalezas, y donde la metacognición brinde herramientas para la autoevaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje en un ambiente basado en la resolución de problemas tanto del docente como del estudiante (Bravo, 2024).

Esta investigación tiene como objetivo principal implementar una estrategia didáctica que promueva un cambio cultural en la educación, orientado hacia la solución de conflictos. Esta estrategia se enfoca en fomentar la comunicación entre el docente y el estudiante, así como entre los propios estudiantes, a través de la reflexión y la acción, con el propósito de alcanzar el bien común por encima del interés individual. Se busca una educación para la paz, que desarrolle

habilidades específicas para fortalecer la competencia matemática en la resolución de problemas (Bravo, 2024).

Ante esta situación, surge la necesidad de contextualizar las situaciones problemáticas dentro de la competencia democrática. La adaptación a la realidad contextual es una cualidad fundamental de toda estrategia (Guerrero, 2007 citado por Bravo, 2024), por lo que el contexto se considera el punto de partida fundamental para el desarrollo de la unidad didáctica, guiando todo el proceso hacia el logro del objetivo establecido. En el caso específico de las instituciones educativas rurales con metodología Escuela Nueva en el país, es crucial tener en cuenta su entorno particular. Aunque la estrategia didáctica diseñada en esta investigación no puede generalizarse para todas estas instituciones, sí puede servir como punto de referencia y proporcionar ideas para adaptarla en otros centros educativos con características similares o incluso en instituciones urbanas de todo el país (Bravo, 2024).

El enfoque busca acercarse adecuadamente a la realidad del estudiante. Por ello, en esta investigación se otorga importancia a los agentes involucrados en la estrategia. De acuerdo con Guerrero (2007), "los agentes y personas implicadas en la estrategia, su papel y tipo de relación no son elementos secundarios ni para la estrategia ni para sus resultados" (p. 90). Una estrategia didáctica que motive a los estudiantes a participar activamente en su propio proceso de aprendizaje adquiere un carácter innovador. Enseñar a aprender mediante un enfoque sistemático de la matemática crítica, y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de la metacognición, se convierte en el fundamento de una investigación innovadora (Bravo, 2024).

Unidades Didácticas

Esta investigación se fundamenta en las teorías de Rico (1997) y Gómez (2001) citados por Bravo, (2024) al hablar sobre unidades didácticas, lo cual permitirá cumplir con lo planteado.

Ambos autores definen la unidad didáctica como un organizador del currículo y la consideran un conocimiento esencial para articular el diseño, desarrollo y evaluación del contenido matemático, convirtiéndose en el eje central del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En primer lugar, Gómez (2001 citado por Bravo, 2024) indica que, al analizar el contenido, las unidades didácticas permiten identificar errores, dificultades y obstáculos que los estudiantes enfrentan en su aprendizaje. También abordan la diversidad de representaciones y modelizaciones, la fenomenología de los conocimientos involucrados, y la variedad de materiales y recursos para la enseñanza. Además, consideran la evolución histórica de cada campo en el estudio de estas unidades didácticas (Bravo, 2024).

Posteriormente, la estructura conceptual de una unidad didáctica se construye a partir de la pregunta: ¿cómo representar los conceptos y procedimientos? Esto implica respaldar las relaciones existentes entre dichos conceptos y procedimientos mediante una descripción detallada de la estructura matemática en el contexto específico de la investigación. Así, se puede observar la conexión entre hechos, conceptos, estructuras conceptuales, habilidades, razonamiento y estrategias involucradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Gómez, 2001 citado por Bravo, 2024).

Esta situación lleva al investigador a reflexionar sobre el currículo implementado en la Institución Educativa Las Toldas. Surge la pregunta sobre cómo establecer una conexión efectiva entre el currículo y la programación. La respuesta debe proporcionar herramientas conceptuales necesarias para trabajar con estudiantes de noveno grado y, a partir de ellas, diseñar las tareas (actividades, problemas) que se desarrollarán y evaluarán dentro de la unidad didáctica de matemáticas (Bravo, 2024).

Siguiendo estas consideraciones, la investigación adopta en el diseño de la unidad didáctica cinco aspectos propuestos por Rico (1997) citado por Bravo (2024):

Consideración de los errores y dificultades comunes en el aprendizaje de las matemáticas para cada tópico, así como los problemas u obstáculos de aprendizaje que se detectan para cada concepto.

Diversidad de representaciones utilizadas para cada sistema conceptual, junto con las razones usuales de los correspondientes conceptos.

Fenomenología de los conocimientos implicados y las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenido.

Diversidad de materiales manipulativos y recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico.

Evolución histórica de cada campo y de cada concepto (Rico, 1997 citado por Bravo, 2024).

En relación con lo mencionado anteriormente, el análisis fenomenológico propuesto por Gómez (2001) citado por Bravo (2024) se enfoca en identificar los modelos y fenómenos generados por estas subestructuras. Este análisis se basa en la modelación de subtemas relacionados con la matemática dentro de contextos reales que involucran situaciones naturales, sociales o puramente matemáticas, y que son relevantes para los estudiantes. Esto permite abordar problemas relacionados con los distintos fenómenos que el docente modela inicialmente en el proceso de enseñanza.

Por tanto, es necesario comprender cómo se organizan las tareas, actividades y problemas, que en esta investigación se consideran sinónimos de "estructuras conceptuales del

contenido matemático en términos de representaciones y análisis fenomenológico" (Gómez, 2001, p. 5).

Metacognición

Abordar la metacognición implica enfrentar uno de los principales desafíos en la enseñanza de la matemática, que consiste en explorar las estructuras y funciones mentales, es decir, los conocimientos cognitivos que el estudiante posee en relación con diversos objetos matemáticos (Bravo, 2024).

Ante el escenario presentado, el objetivo es superar las limitaciones de la estratificación de los estudiantes, centrando la investigación en la metacognición, definida como el proceso o resultado cognitivo relacionado con la adquisición de conocimiento. Se validan dos dimensiones: habilidades y conocimiento metacognitivos (Flavell, 1976 citado por Miranda et al., 2005).

En cuanto al conocimiento metacognitivo, se pueden distinguir tres aspectos principales; primero, está el conocimiento estratégico, que abarca todo lo que el estudiante sabe sobre estrategias generales que facilitan el desarrollo de habilidades de pensamiento; en segundo lugar, encontramos el conocimiento relacionado con las tareas cognitivas, donde el estudiante escoge la estrategia más adecuada tras evaluar el contexto específico de la situación, tarea o desafío; finalmente, está el conocimiento de sí mismo, en el cual el estudiante, impulsado por la motivación y la autoeficacia, se vuelve consciente de sus propias fortalezas y debilidades (Pintrich, 2002 citado por Miranda et al., 2005).

Esta perspectiva, orientada hacia el bienestar del estudiante, debe expresarse claramente cuando se trata de que el estudiante formule sus propias estrategias. Es necesario enseñar al estudiante a reconocer sus capacidades y habilidades para aprender sobre probabilidad, permitiéndole adquirir conocimientos sin exagerar su habilidad académica en relación con su

rendimiento real. Así, el estudiante no se sentirá presionado por el grupo, ya que su autoestima no será puesta a prueba cada vez que aporte alguna hipótesis para resolver problemas, lo que indica una conciencia metacognitiva (Miranda et al., 2005 citado por (Bravo, 2024).

Luego, se debe guiar al estudiante hacia la realización de predicciones, lo que implica usar una habilidad metacognitiva para reflexionar sobre el tema y recurrir a conocimientos previos sobre la situación o tarea. Esto le permitirá identificar distractores y diferenciar entre dificultades reales o aparentes. En el proceso, el estudiante comparará sus apreciaciones con su capacidad y habilidad para resolver el ejercicio (Miranda, Acosta, Tárraga, Fernández y Rosel, 2005 (Bravo, 2024).

Finalmente, la habilidad metacognitiva de la evaluación, que se enseña una vez finalizado el ejercicio, brinda una nueva perspectiva del nivel cognitivo del estudiante y el desarrollo de la destreza adquirida al valorar si la estrategia utilizada fue la más eficaz o si se pueden mejorar los procedimientos empleados, sin importar si el ejercicio quedó resuelto (Miranda et al., 2005 citado por Bravo, 2024).

Marco Conceptual

Este sistema describe en detalle la relación entre conceptos y variables específicos de la investigación, por lo cual expondrá la guía que permite operacionalizar las observaciones empíricas que se pueden conectar con la teoría y especificar cómo se responde a la pregunta de investigación.

Unidad Didáctica

La unidad didáctica es definida por Rico (1997) como un *organizador del currículo*, que permite hacer una articulación del diseño, el desarrollo y la evaluación de los objetos matemáticos, esto hace que la unidad didáctica se convierta en el eje central del proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, se debe enmarcar conceptualmente la enseñanza de las matemáticas, como un espacio que tienda a la reflexión donde se evidencie la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático bajo unos conocimientos matemáticos con criterios que aborden y controlen esa complejidad.

Para el docente, encargado del proceso de enseñanza, la unidad didáctica se convierte en la hoja de ruta o guía por la cual va a navegar, por otro lado, en el marco del aprendizaje pretende identificar los problemas que tienen los estudiantes y proporcionar las bases sólidas junto a unos criterios para estructurar conocimientos didácticos (Rico, 1997).

Matemática Crítica

La Matemática Crítica es un enfoque pedagógico que va más allá de la neta manipulación de números y fórmulas, y busca explorar las implicaciones sociales, culturales y políticas de las matemáticas; está basado en la reflexión crítica sobre la naturaleza de las matemáticas y su papel en la sociedad, que permite promover una comprensión contextualizada y más profunda de los conceptos matemáticos. En ese orden de ideas, la educación matemática crítica deja de ser

neutral, al intervenir en lo político, social y cultural desde una pedagogía crítica como práctica social, exponiendo que la educación de la matemática debe asumir una enseñanza que permita desarrollar mecanismos para identificar patrones culturales que son extraños a sus propias culturas (Sánchez y Torres, 2009).

Enseñanza

La enseñanza es un proceso que implica la transmisión de conocimientos, valores e ideas entre individuos, se encuentra permeado por una red de relaciones de poder según lo propuesto por Foucault, quien manifiesta que este proceso atraviesa diversas etapas, desde la culpabilización, pasando por la obligación y finalizando en la verificación (Ars Nova, 2020)

Sin embargo, más allá de la mera transferencia de información, la enseñanza, según Skovsmose (1999), conlleva una dimensión más profunda al enfocarse en la modelación de situaciones cotidianas que fomentan la educación crítica y en la búsqueda que los estudiantes cuestionen su realidad y participen activamente en su transformación. Para lograrlo, se abordan temas relevantes para la sociedad, permitiendo que los estudiantes observen, reflexionen y propongan soluciones a través del prisma de las matemáticas u otros campos del conocimiento. Así, la enseñanza no solo busca la apropiación por medio de la adquisición de destrezas y conceptos, sino también el empoderamiento de los individuos para comprender y transformar su entorno.

Objetos Matemáticos

Chevallard, 1991(citado por Godino y Batanero, 1994) los define como una entidad abstracta que representa un estado definido por relaciones específicas entre elementos, surgidas de un sistema de prácticas donde se manipulan objetos materiales y se desglosan en diferentes registros semióticos, como lo oral, lo gestual y la inscripción. Estos objetos son descubiertos por

la razón, no solo por la experiencia sensorial, y emergen a partir de la necesidad de organizar e interpretar el contexto percibido y su dinámica. Representan cualidades interpretativas del contexto o acciones que lo organizan e interpretan. Además, se distinguen de otros tipos de objetos por su capacidad estructural y necesaria para organizar o interpretar el contexto, lo que justifica su razón de existencia.

Enfoque de la Matemática Crítica en la Enseñanza

La enseñanza de objetos matemáticos se refiere a la transmisión de conceptos, procesos y habilidades matemáticas a los estudiantes. Este marco reconoce la importancia de abordar estos objetos matemáticos de manera significativa y relevante para los estudiantes, fomentando su comprensión y aplicación en contextos diversos.

La Matemática Crítica como enfoque en la enseñanza, según Sánchez y Torres (2009) considera los aspectos sociopolíticos que influyen en las prácticas pedagógicas relacionadas con las matemáticas, al mismo tiempo que estudia los procesos sociales específicos y contextualizados históricamente, mediante los cuales las personas participan en la generación de conocimiento, de esta forma pretende poner de manifiesto las intenciones de poder implícitas en las prácticas pedagógicas en la enseñanza de las matemáticas, y cómo estas influyen en la configuración de la sociedad.

Estratificación

La estratificación, se refiere a la clasificación y jerarquización de sujetos y poblaciones escolares en función de su desempeño en matemáticas y su acceso a la educación matemática, lo que conlleva implicaciones en términos de equidad, ya que ser excluido de las matemáticas también significa ser excluido de la participación en la sociedad. El proyecto de matematización de la sociedad ha sido fundamental en la constitución del sujeto moderno, lo que hace que las

matemáticas adquieran un poder político y cultural significativo. La estratificación se manifiesta en la evaluación masiva de los resultados de aprendizaje en matemáticas, que influye en políticas educativas destinadas a mejorar la equidad en el acceso y el rendimiento en esta materia.

Entonces, la estratificación en el contexto de la educación matemática implica la segmentación y clasificación de individuos y poblaciones en función de su desempeño y acceso a las matemáticas, con implicaciones profundas en términos de equidad y participación en la sociedad (García, 2022).

Toma de Decisiones

La toma de decisiones se define como el proceso por medio del que se realiza una elección entre diferentes opciones o maneras posibles que permitan resolver diversas situaciones en la vida. Según Skovsmose, (1999) este proceso se basa en supuestos, conocimientos y argumentos que pueden estar más allá del entendimiento de la mayoría de las personas, es ahí donde la educación matemática juega un papel crucial en la toma de decisiones, al estar en la base de los modelos que sustentan tales decisiones, justificando así la necesidad de una educación matemática crítica; entonces, una educación para la democracia debe incluir una mirada crítica a los antecedentes de la toma de decisiones en un contexto específico.

Pensamiento Crítico

Según Alcina y Planas (2008) el pensamiento crítico exige que quien pretenda resolver un problema, primero contribuya a identificarlo, por lo tanto, se puede definir como una habilidad fundamental que implica analizar, evaluar y cuestionar de manera reflexiva la información que se presenta, así como formular buenas preguntas y buscar respuestas complejas. Lo anterior implica que sea un proceso que va más allá de la mera aceptación de la información recibida, involucrando la capacidad de buscar más información, contrastar puntos de vista y ser

preciso en el análisis; lo que hace al pensamiento crítico una habilidad esencial para la resolución de problemas y la toma de decisiones en todos los aspectos de la vida.

Espacio Democrático

Según Cruz (2018) es un ambiente democrático que promueve un entorno educativo o social donde se fomenta la participación activa y el diálogo entre los individuos, especialmente en contextos educativos, con el propósito de cultivar una reflexión crítica y constructiva sobre situaciones problemáticas. En este espacio, los participantes son impulsados a expresar sus opiniones, debatir ideas y buscar soluciones colaborativas mediante el planteamiento de preguntas y la búsqueda de respuestas a partir de una situación problema; este espacio, busca promover el pensamiento crítico y la capacidad de argumentar, así como el respeto por las opiniones divergentes y la valoración del bien común por encima de intereses individuales.

Contexto

Según el MEN (2007) el contexto se relaciona con los entornos que rodean al estudiante, los cuales le dan sentido a las matemáticas que este aprende. Este entorno incluye múltiples factores, entre los que están las condiciones sociales, culturales y económicas, las interacciones sociales, los intereses individuales y comunitarios, las creencias y las influencias del entorno familiar y cultural del estudiante.

El conocimiento matemático, en consonancia con las tendencias actuales, se considera una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del estudiante. Como parte integral de la vida cotidiana del estudiante, el contexto matemático se entrelaza con su entorno familiar, sus relaciones sociales, su cultura, música, películas y otras influencias. Por lo tanto, integrar el contexto en el proceso educativo es esencial para motivar y mantener vivo el interés del estudiante en las matemáticas.

Laboratorio

Entorno de aprendizaje diseñado para fomentar el pensamiento crítico a través de la investigación y la experimentación en diversos contextos relevantes para el estudiante; este espacio pretende la comprensión y apropiación de objetos matemáticos, partiendo de experiencias concretas, busca cultivar la enseñanza de la ética como parte integral de la pedagogía, instando a los estudiantes a asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje y a evitar la manipulación mediante la reflexión individual y social; fomentando el aprendizaje cooperativo, donde cada estudiante desempeña roles definidos que contribuyen al éxito del grupo y al desarrollo de habilidades sociales y cognitivas.

Metodología

La presente investigación, centrada en el ámbito educativo y específicamente en la educación matemática, establece que su enfoque paradigmático se define desde la perspectiva sociocrítica. Esta perspectiva incluye posturas críticas y de investigación, donde la relación entre el sujeto y el objeto de estudio se enmarca en una epistemología subjetivista y crítica. En este contexto, el conocimiento es visto como un proceso constructivo de comprensión crítica y acción sobre la realidad (Monje, 2011 citado por Bravo, 2024).

De acuerdo con el enfoque, la investigación es de tipo cualitativo, dicho enfoque, aunque es inductivo exige conocer con profundidad el campo de estudio, por lo cual se pretende el acercamiento del investigador con el campo y la muestra para desarrollar observaciones con las cuales se pueda llegar a los objetivos planteados, en otras palabras, permite registrar sus propias observaciones de forma adecuada por medio del descubrimiento de significados que los sujetos ofrecen de sus propias experiencias, confiando en sus expresiones subjetivas, escritas y verbales (Monje, 2011).

Por lo tanto, esta investigación pretende analizar si la población estudiada desarrolla el proceso de enseñanza de la matemática fomentando el pensamiento crítico mediante la aplicabilidad de esta disciplina. Además, busca empoderar a los estudiantes de noveno grado y promover su desarrollo integral como ciudadanos informados y capaces de enfrentar desafíos en su entorno. Asimismo, se enfoca en reforzar un aprendizaje que permita a los estudiantes validar procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para resolver problemas (Bravo, 2024). Por otro lado, la pertenencia a este enfoque nos permite desarrollar preguntas durante o después de la recolección y análisis de datos, lo cual es vital para el diseño y construcción de la unidad didáctica con enfoque de la matemática crítica.

Método de Investigación

Al fundamentarse en el paradigma sociocrítico y optar por un enfoque cualitativo, se establece que el abordaje general de esta investigación será el diseño o método de investigación-acción que al ser un enfoque reflexivo-activo tiene como objetivo generar una transformación, en el contexto específico de esta investigación, se busca transformar la enseñanza de los conceptos matemáticos mediante el enfoque de la matemática crítica. Esto no solo pretende un cambio educativo, sino también social, a través de la mejora continua y permanente de la eficacia de la acción social (Bravo, 2024). Entonces, al pretender resolver problemas cotidianos mediante la investigación -acción, como lo es la enseñanza de la matemática dentro del aula, mediante la elaboración de una unidad didáctica con el enfoque de la matemática crítica, se brinda la información que guíe a la toma de decisiones en el momento de diseñar una guía didáctica para el mejoramiento de la enseñanza, que permita una adecuada apropiación de la matemática por parte del estudiante, en el caso concreto de la investigación del objeto matemático probabilidad simple.

Población y Muestra

En ese sentido, la presente investigación se centra en el análisis de los docentes y estudiantes de noveno grado pertenecientes a la Institución Educativa Las Toldas, ubicada en el municipio de La Argentina Huila, los cuales serán la población objeto de estudio, como lo expresa Monje (2011) son el conjunto de sujetos que comparten características que se estudian y a las cuales se pueden generalizar los hallazgos encontrados en la muestra. Motivo por el cual, la población se elige bajo el criterio del nivel escolar y la temática de los objetos matemáticos relacionados con la probabilidad simple establecidos en los lineamientos curriculares, siguiendo

la perspectiva de Ludewig (s.f) que define esta población objetivo como aquella sobre la cual el investigador busca establecer conclusiones significativas.

En este sentido, es importante señalar que la selección de la muestra se realiza de manera no probabilística, compuesta por los docentes y estudiantes del grado noveno de la sede principal, a lo que Monje (2011) denomina muestreo teórico lo cual permite al estudio que el número de su muestra no tenga un valor significativo sino la reconstrucción de vivencias y sentidos asociados a ciertas instancias en el aula de clase. Esta elección se justifica debido a la dispersión geográfica de la población estudiantil y que en las otras sedes se maneja la metodología de Escuela Nueva. Conforme a Monje (2011) citado por Cruz (2018), la definición de la muestra se vuelve esencial, ya que permite obtener conclusiones similares a las que se obtendrían si se trabajara con la población completa. Además, siguiendo la perspectiva de Ludewig (s.f) citado por Cruz (2018), tener un tamaño de muestra especificado facilita la reducción del volumen de trabajo y acelera el proceso de recolección de datos.

Instrumentos y Técnicas de Investigación

En consecuencia, es necesario definir los instrumentos de investigación a partir del diseño de investigación (investigación-acción) por lo cual, se comenzará por una exploración teórica mediante la técnica de investigación cualitativa *análisis documental* de la matemática crítica mediante una recopilación minuciosa de artículos e investigaciones publicados entre los años 2018 a 2023, junto con el análisis de bibliografía relevante de autores pioneros en educación matemática crítica. El objetivo principal de esta exploración teórica es obtener una visión clara y actualizada del enfoque de la matemática crítica y su aplicación en contextos educativos. Para ello, se recopilarán datos mediante una matriz de análisis de fuentes confiables que guíen la toma de decisiones para estructurar la unidad didáctica.

Seguidamente la bitácora constituye otro de los instrumentos que permitirá recopilar en tiempo real de las observaciones y reflexiones sobre la problemática a abordar, la estructura actual de la metodología de enseñanza de las matemáticas y la apropiación del objeto matemático que se desean transformar, ya que su función es documentar el procedimiento a analizar y las propias reacciones del investigador sobre el proceso, a la vez, resulta ser un instrumento invaluable para la validez y confiabilidad del análisis. Este instrumento corresponde a la técnica de *observación simple, no regulada*, la cual permite observar y registrar información con poca estructura y sin interferencia del investigador.

Además, se utilizará la técnica *grupos focales*, también denominada “Entrevista Exploratoria o Grupal” o “Focus Group”. Mediante este, se focalizará su atención en un grupo de 8 estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas donde se discutirá sobre la enseñanza de las matemáticas, mediante la interacción discursiva y la contrastación de las opiniones de los estudiantes (Monje, 2011). Este instrumento se diseña gracias a una exploración minuciosa de contenidos y referentes que luego de definir las variables de análisis y categorías mediante las cuales se plantean las preguntas a discutir en este instrumento que debe ser implementado mediante un encuentro donde se aplica el guion de la entrevista abierta y estructurada que pretende obtener información de la temática, a partir de la experiencia de los estudiantes para descubrir una estructura de sentido compartida acerca de la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, se dará uso a la técnica entrevista dirigida, la cual es semiestructurada y gira entorno a las variables de análisis y categorías definidas, mediante el instrumento de recolección de datos de entrevista semiestructurada con docentes, se pretende explorar sus perspectivas y percepciones sobre la estratificación de los estudiantes de grado noveno, así como su visión

respecto a las metodologías de enseñanza actuales y las propuestas para la educación matemática crítica; también sobre el diseño de unidades didácticas para la apropiación de los objetos matemáticos.

Buscando más información para la construcción de la unidad didáctica se aplicará el instrumento entrevista semiestructurada a docentes para recolectar evidencia empírica que será contrastada con los resultados obtenidos mediante la entrevista exploratoria o grupal realizada a los estudiantes.

Fases de la Investigación

A continuación, se describen las fases metodológicas de la investigación, que consisten en tres etapas principales. En primer lugar, se encuentra la construcción de los instrumentos cualitativos, la bitácora de campo y la entrevista, mediante una búsqueda documental sólida previa. Luego, sigue la fase de validez y fiabilidad de estos instrumentos de recolección de datos. Finalmente, se lleva a cabo la fase de diseño de la guía didáctica a partir de la triangulación de los datos obtenidos en las fases anteriores.

Primera Fase. Construcción de los Instrumentos

La Bitácora. siguiendo la definición de Hernández (2014) citado por Cruz (2018), la bitácora registra y documenta de manera sistemática el proceso y todas las actividades relacionadas con la autenticación y verificación del estudio, la aplicación de esta bitácora se llevará a cabo en un orden cronológico que corresponde al avance del proyecto.

La construcción del primer instrumento de recolección de datos surge a partir de la necesidad de escribir detalladamente la exploración de documentos y fuentes teóricas relacionadas con la educación matemática crítica, que son relevantes para las unidades de análisis estratificación, matemática crítica y unidad didáctica. Esto implica recopilar información

sobre teorías existentes, expresiones de los docentes que participan en nuestra investigación, así como otros estudios previos que abordan el tema de la educación matemática crítica.

La segunda finalidad de la bitácora es documentar la observación de las clases que se han seleccionado como muestra, a través de esta observación, se pretende obtener una comprensión más profunda de cómo se desarrolla una clase sin el enfoque de la matemática crítica en un contexto real de enseñanza, esto incluye, el registro de prácticas pedagógicas, interacciones en el aula y cualquier evidencia relevante que contribuya a nuestra investigación.

La Entrevista. En la entrevista semiestructurada, según Flick (2004) citado por Cruz (2018), el investigador busca hacer más explícito el conocimiento implícito del entrevistado, por tal motivo, Martínez (2011) citado por Cruz (2018) sugiere que el entrevistador debe tener una actitud general de oyente, dejando hablar libremente al entrevistado. Para el diseño y construcción de la entrevista dirigida a la muestra de la presente investigación (docentes de matemáticas del grado noveno de la institución educativa Las Toldas Sede Principal) se tendrá en cuenta los hallazgos en la exploración de documentos y fuentes teóricas relacionadas con la educación matemática crítica.

Tabla 1*Entrevista docentes*

Variable de análisis	Definición Conceptual	Categorías	Ítem
Unidad Didáctica	Según Rico (1997), es un componente fundamental del currículo que organiza el diseño, desarrollo y evaluación de los contenidos matemáticos. Sirve como eje central del proceso de enseñanza y aprendizaje, proporcionando una estructura conceptual para la reflexión sobre la complejidad de estos procesos. Para el docente, representa una guía para la enseñanza, mientras que, para los estudiantes, busca identificar y resolver problemas, proporcionando bases sólidas y criterios para la construcción del conocimiento matemático.	Contenido	1-6
		Metodología	7-10
		Objetivos	11-12
		Evaluación	13-15
Matemática Crítica	Es un enfoque educativo que explora las implicaciones sociales, culturales y políticas de las matemáticas, promueve una comprensión profunda y contextualizada de los conceptos y se basa en una reflexión crítica sobre el papel de las matemáticas en la sociedad, interviniendo activamente en lo político, social y cultural desde una pedagogía crítica.	Reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad	18-19
		Reflexión crítica de las matemáticas en la toma de decisiones	20-22
Estratificación	Hace referencia a la clasificación y jerarquización de sujetos y poblaciones escolares según su desempeño y acceso a las matemáticas, lo cual afecta la equidad, ya que excluirse de las matemáticas implica excluirse de la sociedad. Las matemáticas tienen un poder político y cultural significativo, y la estratificación se manifiesta en la evaluación y la enseñanza.	Enseñanza	23-27
		Evaluación	28-30

Para el caso de *la entrevista* abierta y estructurada a aplicar mediante la técnica grupo focal, esta se construye luego de explorar los contenidos y de definir las variables de análisis y categorías mediante las cuales se plantean las preguntas mediante las que se recoge la información mediante la aplicación del guion de la entrevista que pretende, con base en la experiencia de los estudiantes, determinar su percepción respecto a la enseñanza de las matemáticas por parte de sus docentes.

Tabla 2*Entrevista a estudiantes*

Variables de análisis	Categorías	Preguntas a Formular
Unidad didáctica	Propósito de unidad didáctica	¿Qué piensan sobre las actividades realizadas por el docente en la clase de matemática?
Matemática crítica	Reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad	¿Para qué cree que sirve la matemática en su vida? ¿Quién quiere compartir si la clase de matemática los tiene en cuenta a todos al momento de participar en las actividades?
Estratificación	Enseñanza	¿Qué sienten cuando son evaluados en el área de matemáticas?
	Evaluación	¿Qué sucede cuando les entregan los resultados del examen de matemáticas?

Segunda Fase. Validez y Fiabilidad

Corral (2009) citado por Cruz (2018) describe la validez como el dominio específico que refleja un instrumento frente al contenido que se pretende medir, de modo que validar los instrumentos permiten que los datos recolectados carezcan de sesgo por parte del investigador dando fiabilidad a dichos resultados. De este modo, tanto como la entrevista a docente como el grupo focal dirigido a los estudiantes emergen como herramientas esenciales al momento de obtener datos con creatividad desde la inmersión en el campo de estudio.

En ese orden de ideas, la validez de los instrumentos anteriormente mencionados se refiere a la capacidad de este para medir de manera precisa y adecuada la construcción de una unidad didáctica, en ese sentido se aplicará una encuesta cerrada tipo Likert a tres docentes de matemáticas con experiencia en contextos rurales. En relación con la fiabilidad de los dos instrumentos, se pretende encontrar una estandarización del proceso de entrevista en donde la clarificación y documentación de las respuestas es fundamental para no perder la información obtenida dentro del campo de investigación.

Tercera Fase. Diseño y Construcción de la Unidad Didáctica (análisis de datos)

La información obtenida de la bitácora y las entrevistas se complementa con el análisis de los datos recopilados mediante la matriz de análisis en la exploración teórica, utilizando el software Atlas.ti. Por consiguiente, la utilización del software Atlas.ti será fundamental para llevar a cabo la triangulación de los conocimientos empíricos recopilados a través de la bitácora y las entrevistas con los docentes. El enfoque de la investigación permitirá llevar a cabo un análisis cualitativo profundo mediante las unidades de análisis estratificación, unidad didáctica y matemática crítica. Mediante el uso de Atlas.ti, se podrán identificar patrones, temas y relaciones dentro de los datos cualitativos recopilados. Esto resultará fundamental para comprender las perspectivas y percepciones de los docentes, así como los desafíos a los que se enfrentan en la enseñanza de la matemática, mediante la triangulación de datos se podrá comparar y contrastar los resultados obtenidos, lo que conlleva a identificar convergencias y discrepancias entre los datos recopilados de las fuentes, lo cual es crucial para validar los resultados y garantizar la confiabilidad de la investigación.

Posteriormente, con los resultados obtenidos se procede al diseño y construcción de la unidad didáctica, la cual tendrá en cuenta a Rico (1997) citado por Cruz (2018) quien sugiere considerar los errores en la enseñanza del objeto matemático que se hallan en la triangulación mencionada con anterioridad para adoptar los mecanismos esenciales en la articulación del diseño, desarrollo y evaluación del objeto matemático resulta crucial, ya que este se convierte en el eje integrador del proceso de enseñanza.

Cronograma de actividades

Tabla 3

Cronograma de actividades

Actividades	Octubre 2023	Noviembre 2023	Diciembre 2023	Enero 2024	Febrero 2024	Marzo 2024	Abril 2024	Mayo 2024
Diseño de instrumentos de recolección	X	X						
Validez y fiabilidad		X	X					
Implementación de Instrumentos				X	X			
Sistematización de la información recogida en el software ATLAS ti.					X			
Análisis de la información						X		
Interpretación y redacción de resultados.						X		
Diseño de la unidad didáctica						X	X	
Elaboración y presentación del documento final.							X	X

Resultados

Recolección de datos

A partir de la recolección de la información mediante los instrumentos aplicados, fue posible determinar las características de la unidad didáctica a diseñar, cumpliendo con el enfoque de la matemática crítica. esta información es analizada de forma rigurosa con el propósito de responder el problema planteado y dar cumplimiento con los objetivos propuestos en la presente investigación.

Matriz de Análisis Documental

Realizar un estudio teórico del enfoque de la matemática crítica para la construcción de una unidad didáctica, es uno de los objetivos específicos de esta investigación, y este instrumento es el que permite estudiar apropiadamente el enfoque de la matemática crítica para dar paso a la construcción de la unidad, entonces, la información obtenida luego de la aplicación del instrumento donde se analizan tres documentos se representa así, en la Tabla 4 El análisis del documento 1 denominado “Matemática crítica como currículo e sua dimensão na formação docente”, en la Tabla 5 se relaciona el análisis del documentos 2, titulado Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática y por último, en la Tabla 6 se reporta el análisis del documentos 3 con el nombre de Rompimiento de la Neutralidad Política: El Compromiso Crítico de la Educación Matemática con la Democracia.

Tabla 4

Análisis documento 1

Variables de análisis	Categorías	Documento 1
		Matemática crítica como currículo e sua dimensão na formação docente
Matemática crítica	Reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad	<p>La reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad emerge como un componente esencial en el panorama educativo contemporáneo, los cambios curriculares solo pueden alcanzar el éxito si quienes los implementan se comprometen a comprender nuevas propuestas educativas. Este compromiso trasciende la mera adopción de enfoques pedagógicos; requiere una reflexión profunda sobre el rol de las matemáticas en la sociedad y la necesidad de incorporar aspectos culturales en la enseñanza, tal como destacan los autores al enfatizar la importancia de incluir elementos culturales en la instrucción de matemáticas en escuelas indígenas.</p> <p>La investigación, según Skovsmose (2001), se revela como una herramienta fundamental en la formación docente, desencadenando la confrontación entre la teoría y la práctica. Este enfoque, más allá de ser un ejercicio académico, contribuye al desarrollo profesional crítico-reflexivo de los educadores. Al explorar nuevas metodologías y estrategias, los docentes se convierten en agentes activos en la construcción de un enfoque educativo que va más allá de la mera transmisión de conocimientos matemáticos.</p> <p>En este contexto, la reflexión crítica de las matemáticas se convierte en un catalizador para el empoderamiento docente, como destaca Pereira, Jorge y Nogueira citados por Beerbaum et al. (2022) Este empoderamiento no solo se refiere a la adquisición de habilidades técnicas, sino también a la conciencia crítica del impacto social, político y cultural de la enseñanza de las matemáticas. La colaboración entre la universidad y la escuela, como sugieren estos autores, se convierte en un vehículo crucial para este empoderamiento, proporcionando a los futuros educadores una comprensión profunda de su rol en la sociedad y fomentando prácticas educativas que trascienden las limitaciones tradicionales.</p>
	Reflexión crítica de las matemáticas en la toma de decisiones	<p>La reflexión crítica sobre las matemáticas en la toma de decisiones se manifiesta en el texto a través de diversos enfoques en la formación docente y la práctica educativa. Se destaca la necesidad de cuestionar las estructuras sociales y políticas que utilizan las matemáticas, no solo como herramientas técnicas, sino como agentes que pueden perpetuar desigualdades y exclusiones sociales. En la formación de docentes de matemáticas, se plantea la urgencia de superar la enseñanza tradicional y adoptar enfoques que promuevan el pensamiento reflexivo. Pozzobon y Oliveira (2018) citados en Beerbaum et al. (2022) señalan subrayan la importancia de que los profesores comprendan la naturaleza de las proposiciones matemáticas y la responsabilidad de enseñarlas, yendo más allá de la mera transferencia conceptual. Además, se aborda la dimensión cultural en la enseñanza diaria de las matemáticas, específicamente en relación con la subrepresentación femenina en ámbitos exactos. Fernandes y Cardim (2018) citados en Beerbaum et al. (2022) señalan la falta de capacitación de los docentes en dimensiones constitutivas humanas, individuales y sociales, lo que puede llevar a la reproducción de interpretaciones androcéntricas y estructuras sociales prejuiciosas. El texto también resalta la importancia de un currículo crítico y emancipador que aborde las crisis sociales actuales, desafiando estereotipos de género y fomentando la equidad.</p>

	Enseñanza	<p>Pozzobon y Oliveira (2018) enfatizan la necesidad de comprender nuevas propuestas educativas para cambios curriculares exitosos. Destacan la incoherencia en la transferencia conceptual y abogan por romper con enfoques internalistas en la enseñanza de matemáticas.</p> <p>La perspectiva de género, según Fernandes y Cardim (2018) citados en Beerbaum et al. (2022), señalan la subrepresentación femenina en campos exactos, instando a la capacitación docente para superar interpretaciones androcéntricas. La creación de espacios específicos, como Laboratorios de Matemáticas, según Oliveira y Kikuchi (2018), mejora la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje, promoviendo enfoques inclusivos. La investigación se presenta como esencial en la formación docente crítica (Skovsmose, 2001; Teixeira, 2020) citados en Beerbaum et al. (2022) señalan, permitiendo confrontaciones entre teoría y práctica. El docente-investigador se visualiza como agente capaz de transformar la realidad educativa.</p>
Estratificación		<p>La evaluación desempeña un papel integral que va más allá de la simple medición de conocimientos. En primer lugar, se destaca su importancia en la creación de espacios de aprendizaje significativos, fomentando la reflexión y la práctica colaborativa entre estudiantes y docentes. Además, se presenta como un componente esencial para generar confrontaciones constructivas entre la teoría y la práctica docente, promoviendo así la interdisciplinariedad. Además, la evaluación se enfoca en el conocimiento del contenido, especialmente en el ámbito de la formación docente en matemáticas. Gomes (2021) subraya su relevancia al sugerir que la</p>
	Evaluación	<p>evaluación de este conocimiento es crucial para identificar debilidades y dirigir la formación hacia la competencia profesional. De este modo, la evaluación se posiciona como una herramienta clave para elevar la calidad de la formación docente en matemáticas. Finalmente, la evaluación también se aborda en el contexto de las desigualdades de género en la educación matemática. Fernandes y Cardim (2018) citados en Beerbaum et al. (2022), señalan que la falta de capacitación en dimensiones humanas, individuales y sociales puede conducir a prácticas excluyentes. En este sentido, la evaluación emerge como un componente crítico para abordar y rectificar estas desigualdades de género en el ámbito educativo.</p> <hr/>

Tabla 5

Análisis documento 2

Variables de análisis	Categorías	Documentos
		Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática
Matemática crítica	Reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad	Una manera de entender la matemática que se centra en trabajar por la justicia social y combatir la exclusión social implica abrir nuevas oportunidades para los estudiantes y examinar críticamente los usos de las matemáticas en todas sus formas y aplicaciones. Esta perspectiva se preocupa principalmente por criticar las matemáticas en la sociedad, la relación entre la educación matemática y la democracia, la justicia social, la equidad y la inclusión, así como por inventar nuevas posibilidades educativas. No es una postura neutral, sino que responde a intereses ideológicos, políticos, económicos y culturales, los cuales se entrelazan con la visión que cada persona tiene del mundo y su realidad. La educación matemática se presenta, así como una herramienta crítica para comprender la sociedad y cuestionar las estructuras de poder (Valero et al., 2015).
	Reflexión crítica de las matemáticas en la toma de decisiones	Se centra en cómo el conocimiento matemático y el conocimiento de las matemáticas escolares se relacionan con la sociedad y sus procesos políticos, históricos, económicos y sociales (Valero et al., 2015). Este enfoque busca desarrollar una conciencia crítica y una ciudadanía activa que reconozca cómo las matemáticas afectan la vida social, política y económica. Además, empodera a los estudiantes para cuestionar el uso de las matemáticas en la creación de injusticias sociales y trabajar para enfrentarlas.
	Enseñanza	La educación matemática no debe considerarse solo una habilidad para el mercado laboral, ya que se enfoca en la alfabetización matemática, la democracia y la justicia social. Su objetivo es cuestionar el uso de la educación matemática en la generación de diferenciaciones y clasificaciones que llevan a la segregación de estudiantes y personas, lo cual constituye una injusticia y exclusión. Al empoderar a las personas, se les capacita para cuestionar las estructuras de poder y fomentar una crítica social (Valero et al., 2015).
Estratificación	Evaluación	Teniendo en cuenta que la estratificación se refiere a la división y clasificación de los estudiantes en diferentes niveles o estratos, y la evaluación desempeña un papel fundamental en este proceso al determinar el rendimiento y el progreso de los estudiantes. Dentro de las "formas liberales de la justicia social" en la educación matemática, la evaluación emerge como un componente clave en la estratificación de los estudiantes. Su análisis desde esta perspectiva destaca la necesidad de enfoques más equitativos, sensibles a la diversidad, y la importancia de la formación del profesorado y la investigación pedagógica para transformar las prácticas evaluativas y promover una justicia social más amplia en la educación matemática.

Tabla 6
Análisis documento 3

Variables de análisis	Categorías	Documentos
		Rompimiento de la Neutralidad Política: El Compromiso Crítico de la Educación Matemática con la Democracia
Matemática crítica	Reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad	<p>La reflexión sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y en la toma de decisiones debe abordarse desde una perspectiva crítica, reconociendo las desigualdades y exclusiones sociales que pueden ser perpetuadas. Este enfoque crítico se dirige a cuestionar y transformar las estructuras sociales y políticas que emplean las matemáticas para mantener la desigualdad y la exclusión, promoviendo así la equidad e inclusión en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Reflexionar sobre las matemáticas en la sociedad implica entenderlas como una práctica social y cultural, influenciada por los valores, intenciones e intereses de quienes las crean y utilizan. Esta categoría de análisis también comprende ver a las matemáticas como una herramienta esencial para la toma de decisiones en la sociedad, subrayando la necesidad de que los ciudadanos posean competencias matemáticas que les permitan entender la tecnología y aplicarla tanto en el ámbito laboral como en la vida cotidiana (Skovsmose y Valero, 2012).</p> <p>La reflexión crítica sobre el papel de las matemáticas en la toma de decisiones en la sociedad implica una conciencia aguda de las desigualdades y exclusiones sociales que pueden perpetuarse (Skovsmose y Valero, 2012). Desde esta óptica, se cuestiona y busca transformar las estructuras sociales y políticas que emplean las matemáticas para perpetuar tales disparidades, y se aboga por la equidad y la inclusión en la toma de decisiones. Este enfoque también reconoce las matemáticas como una herramienta fundamental en la toma de decisiones, subrayando la importancia de la competencia matemática entre los ciudadanos para comprender su aplicación tanto en el ámbito laboral como en la vida cotidiana. Asimismo, se comprende a las matemáticas como una práctica cultural y social, moldeada por los valores, intenciones e intereses de quienes las emplean y crean (Skovsmose y Valero, 2012).</p>
	Reflexión crítica de las matemáticas en la toma de decisiones	<p>El conocimiento matemático desempeña un papel vital en diversos campos, como la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las finanzas, siendo esencial en la resolución de problemas y la toma de decisiones. Además, se reconoce que la educación en matemáticas puede ser un medio para fortalecer la democracia y la participación ciudadana. A través del razonamiento matemático, los individuos pueden articular argumentos sólidos y precisos en contextos públicos y procesos de decisión. Este enfoque educativo no solo beneficia a una élite, sino que brinda oportunidades a todos los ciudadanos para adquirir habilidades argumentativas necesarias en la esfera política. No obstante, es importante reconocer que la educación matemática también puede contribuir a la exclusión y estratificación social (Skovsmose y Valero, 2012).</p>
Estratificación	Enseñanza	
	Evaluación	<p>La educación matemática crítica busca promover la equidad mediante la creación de entornos de diálogo y reflexión, donde los estudiantes puedan cuestionar y transformar las estructuras sociales y políticas que perpetúan la desigualdad y la exclusión. Asimismo, se fomenta la participación activa de los estudiantes en la definición del contenido y los métodos de enseñanza de las matemáticas, así como en la elaboración de criterios de evaluación justos y equitativos (Skovsmose y Valero, 2012).</p>

Entrevista a docentes

Dentro de las variables de análisis y sus respectivas categorías, en primera instancia se indaga sobre la opinión del conocimiento que tienen los docentes respecto a las unidades didácticas y sobre el conocimiento que requieren al momento de construir una propuesta de unidad didáctica para la apropiación de objetos matemáticos. La información recopilada indica que las unidades didácticas son consideradas esenciales para facilitar la labor pedagógica y mejorar el rendimiento académico y personal de cada estudiante al integrar diferentes áreas y hacer el proceso más significativo. Esta perspectiva refleja la importancia de ver la enseñanza como un espacio de reflexión donde se aborda la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje y se busca responder a la pregunta fundamental: ¿cómo transmitir y construir el conocimiento? Esta respuesta proporciona los criterios para dirigir y gestionar la clase de manera coherente, enfatizando la necesidad de contar con un marco conceptual sólido al trabajar con conceptos matemáticos (Cruz, 2018).

Tabla 7

Resultados entrevista a docentes

Variables de análisis	Categorías	Docentes	
		Docente 1	Docente 2
Unidad didáctica	Contenido	Las unidades didácticas son esenciales para desarrollar competencias específicas, considerando los obstáculos ontogenéticos. Reconoce la importancia de adaptarlas a las necesidades de los estudiantes, aunque a veces encuentra que no se ajustan completamente. Al diseñarlas, considera el grado de escolaridad, los criterios de evaluación y los recursos disponibles, priorizando una metodología llamativa y trascendente. La metodología es fundamental y debe partir del análisis del contexto educativo y la estructura matemática. Los errores y dificultades son guías para mejorar la enseñanza. Implementa metodologías como ABP y Flipped Classroom. La relación entre contenidos y metodologías es crucial para una transposición didáctica efectiva.	Las unidades didácticas son herramientas fundamentales para dinamizar las etapas en clase. Al diseñarlas, considera el tiempo, los objetivos, las preguntas orientadoras y la evaluación formativa. Es importante contextualizar los contenidos y romper con la percepción de clases magistrales.
	Metodología	La metodología debe facilitar el aprendizaje significativo y la reflexión crítica. Utilizo métodos como el trabajo grupal con roles y situaciones problema que demuestran la aplicabilidad de las matemáticas en diferentes contextos.	
	Objetivos	Los objetivos deben ser claros en cuanto a las competencias a alcanzar y los criterios de evaluación. El estudio de errores y dificultades proporciona criterios valiosos para establecer objetivos y mejorar la enseñanza. La evaluación debe considerar las competencias adquiridas y centrarse en superar y detectar dificultades.	Los objetivos deben ser claros en cuanto al propósito y la aplicación del aprendizaje. El estudio de errores y dificultades guía la definición de objetivos relevantes y contextualizados.
	Evaluación	Conocer los errores y dificultades facilita la tarea de evaluar y desarrollar evaluaciones justas que reflejan las realidades sociales.	La evaluación debe centrarse en los procesos metacognitivos y evitar la discriminación. Es necesario desarrollar evaluaciones contextualizadas que reflejen las realidades sociales y promuevan la equidad.
	Propósito	El propósito de las unidades didácticas es fortalecer dificultades epistemológicas y promover un mejoramiento emocional y cognitivo en matemáticas. Además, la reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad es esencial para su comprensión y aplicación práctica.	El propósito de las unidades didácticas es construir de manera significativa el aprendizaje y promover la reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad y en la toma de decisiones.
	Reflexión crítica de las matemáticas en la toma de	La matemática como práctica social y cultural implica su comprensión y su relevancia en distintos contextos y usos prácticos. Es importante entender cómo	Las matemáticas como práctica social y cultural implican su comprensión y aplicación en diversos contextos. Es esencial entender su relevancia y
Matemática crítica			

	decisiones	influye en la sociedad y en la vida cotidiana.	promover su utilidad en la sociedad.
	Reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad	La matemática desempeña un papel crucial en el fortalecimiento del pensamiento crítico y en la toma de decisiones. Su aplicación práctica mediante situaciones problema facilita su comprensión y utilidad en la vida diaria.	La matemática fortalece el pensamiento crítico y su aplicación práctica en la toma de decisiones. Es necesario contextualizar su enseñanza mediante situaciones problema que demuestren su aplicabilidad en la vida cotidiana.
Estratificación	Enseñanza	Reconoce la existencia de la estratificación en el contexto educativo y la importancia de desarrollar ambientes de aprendizaje inclusivos que fomenten el autoestima y la participación de los estudiantes.	La enseñanza debe desarrollar ambientes inclusivos que fomenten la participación de todos los estudiantes y eviten la segregación por capacidades intelectuales.
	Evaluación	La evaluación debe ser una herramienta de diagnóstico que contribuya a la justicia social y evite la discriminación, mediante la utilización de situaciones problemáticas contextualizadas.	La evaluación debe ser formativa, y centrarse en los procesos metacognitivos.

Figura 1

Evidencia fotográfica aplicación entrevista docente



Fuente. Autoría Propia

Entrevista a Estudiantes

Mediante este instrumento, aplicado mediante la técnica grupo focal, se identifica la percepción de la enseñanza de los objetos matemáticos en los estudiantes del grado noveno de la institución educativa Las Toldas, de forma tal que contribuye a la construcción de la unidad didáctica ya que esta permite evidenciar entre otros aspectos, como las emociones son un componente fundamental a tener en cuenta en el diseño de una unidad didáctica, como se evidencia en los resultados reportados en la Tabla 8.

Tabla 8*Resultados entrevista a estudiantes*

Variables de análisis	Categorías	Preguntas Para Formular	Respuestas a partir de la discusión
Unidad didáctica	Propósito de unidad didáctica	¿Qué piensan sobre las actividades realizadas por el docente en la clase de matemática?	Pues las actividades son buenas, pero hay un profesor que hace lo posible por hacernos entender, las actividades son llamativas y se inventa muchas formas como clases aplicadas y nos lleva a hacer prácticas para que entendamos, pero el otro docente nos enreda mucho, nos hace actividades que no entendemos, no se sabe explicar, y lo peor es que nos evalúa cosas que no nos ha enseñado.
Matemática crítica	Reflexión crítica de las matemáticas en la sociedad	¿Para qué cree que sirve la matemática en su vida?	Para resolver problemas de la vida diaria. Para decidir qué voy a estudiar o a que me voy a dedicar en mi futuro Para aplicarlo actividades como compra de mercado Para hacer cuentas en la casa Si, cualquiera puede participar Hay ocasiones en que los profesores hacen participar más a los estudiantes que no les va tan bien, para ayudarlos a mejorar en sus notas Pero el que quiera puede participar y hacer preguntas.
Estratificación	Enseñanza	¿Quién quiere compartir si la clase de matemática los tiene en cuenta a todos al momento de participar en las actividades?	Miedo porque la matemática es exacta y si ponemos un número, una letra o un signo mal, pues nos queda mal el ejercicio. Pensamos que vamos a perder y si uno pierde la evaluación, lo más probable es que pierda la materia, también dan ganas de llorar a veces, porque uno piensa en que va a perder.
	Evaluación	¿Qué sucede cuando les entregan los resultados del examen de matemáticas?	Depende del resultado. Si uno pierde, se siente triste, con miedo. Pero si uno pasa, se siente muy feliz porque las evaluaciones tienen mucho porcentaje en la nota final, y pues lo más normal es que a algunos no nos vaya muy bien en matemáticas.

Figura 2

Evidencia fotográfica aplicación entrevista a estudiantes



Fuente. Autoría Propia

Bitácora de Campo

Este instrumento, permite dar cumplimiento al objetivo específico de la investigación que pretende evaluar la pertinencia del enfoque de la matemática crítica para la enseñanza de los objetos matemáticos a los estudiantes del noveno grado por medio de la observación simple, no regulada, donde se obtienen los datos sobre la enseñanza y evaluación de las matemáticas por parte del docente. En la siguiente tabla se reporta la información obtenida.

Tabla 9

Resultados Bitácora

Observación Clases	Momentos (Categorías de Análisis)	Redacción de lo Observado
	Enseñanza	<p>Al inicio de la clase se percibe una ausencia frente a la exploración de conceptos previos de los estudiantes, pues el docente inicia dictando sobre el concepto de proporcionalidad, también se observa la carencia de espacios dispuestos para trabajar crítica y reflexivamente los problemas propuestos, el docente solo genera la socialización de problemas netamente matemáticos y como máximo llega a los hipotéticos, pero no busca que los estudiantes encuentren en sentido y el significado de lo que están aprendiendo. Se evidencia la carencia de objetivos de aprendizaje, es decir que no se especifican propósitos que involucren tanto los contenidos a enseñar como la didáctica para hacerlo.</p> <p>Sin embargo, se trabaja la memorización, pero no se generan experiencias que permitan dar sentido y significado a los diferentes situaciones del contexto. No se observa la aplicación de la competencia comunicativa como componente transversal necesario para la construcción y perfeccionamiento de las competencias matemáticas, pues no realiza diálogos en el aula que estimulen el compartir y validar conocimientos.</p> <p>Los estudiantes solo escriben lo que el docente dicta, sin generar espacios donde los estudiantes mediante la participación escriban sus propias opciones, hipótesis y conclusiones.</p> <p>No se evidencia un proceso colaborativo y libre que aumente la confianza en sí mismos y su autonomía como estudiantes, al sentir temor por exponer ideas que no sean válidas.</p> <p>La carencia de la metacognición impide la habilidad de enseñar a aprender, desaprendiendo lo aprendido con anterioridad, mediante relaciones de aula para que los estudiantes se conviertan en aprendices más independientes, ya que el rol de docente se evidencia más protagónico.</p>
Docente 1	Evaluación	<p>Frente a la evaluación, el docente no deja claro cuáles son los objetivos de aprendizaje, por lo cual los estudiantes no tienen claro que es lo que deben haber aprendido al finalizar el tema</p> <p>Al no incluir espacios que motiven a los estudiantes a exponer que han aprendido, el docente no tiene claro que saben del tema, quien ha comprendido el tema, por qué aún no han comprendido el tema, cómo generar espacios de aprendizaje, qué debe explicar a mayor profundidad, cuáles con las causas que impiden que hayan aprendido el tema, cuáles son las consecuencias de no tener conceptos previos claros, como se relaciona el tema con la vida cotidiana, qué conclusiones pueden hacer frente al tema, que opinan frente al tema, están de acuerdo frente a algunos problemas hipotéticos. Otro de los aspectos observados, respecto a la evaluación, es que esta se realiza con poca frecuencia durante el desarrollo de la clase, con la presencia de algunos espacios de participación, donde los estudiantes intervienen haciendo aportes, pero se observa la exaltación de quienes responden apropiadamente a cuestiones realizadas por el docente y un rechazo a quienes no lo hacen, o a quienes lo hacen erróneamente.</p> <p>Con respecto a la evaluación sumativa, se evidencia una desilusión por parte del docente respecto a los resultados obtenidos y da a conocer entre sus estudiantes las notas de todos, esto deja ver como los estudiantes que han obtenido menores resultados se sientan diferenciados y tengan expresiones de desilusión y preocupación en su rostro.</p>

	<p>Comienza un discurso alrededor de la pregunta ¿qué vamos a aprender?, evidenciando el pensamiento aleatorio mediante los conceptos relacionados con una de las ramas de la matemática.</p>
Enseñanza	<p>Favorece el proceso de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos por medio de la construcción de conocimientos previos.</p> <p>Ejecuta procedimientos mecánicos y rutinarios que favorecen a la modelación, toma como eje central la resolución de problemas aplicados a la vida real, sin embargo, no llega a la aplicación y a la investigación, es decir, el docente no hace que los estudiantes asuman el reto de crear desde lo ya aprendido.</p>
Docente 2	<p>Desarrolla las clases por medio de diferentes momentos que le permiten evidenciar y analizar los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos relacionados con el tema.</p> <p>Genera antes de una evaluación, espacios de confianza por medio de la risa, de forma constante evalúa a sus estudiantes por medio de preguntas y actividades explicativas donde se explica la aplicabilidad de contenido en la vida cotidiana.</p>
Evaluación	<p>Evalúa el grado de aprendizaje por medio de actividades y talleres, genera preguntas para indagar sobre el entendimiento y la comprensión de conceptos matemáticos.</p> <p>Hace pausas activas, indagando a los estudiantes que deben haber aprendido los propios compañeros.</p> <p>Ya obtenidos los resultados de la evaluación (evaluación sumativa), se observa que el docente diferencia a los estudiantes de acuerdo con el resultado obtenido, clasificándolos de tal forma que les recalca a quienes obtuvieron mejor nota o mayor participación, diferenciándolos de quienes tuvieron un desempeño menor. Aunque incentiva a los estudiantes a continuar mejorando y participando, sí los clasifica y genera esa diferencia que los estudiantes sienten, al saber que les ha ido mal.</p> <hr/>

Análisis

Entrevistas a Docentes

Se considera las respuestas de la entrevista a dos docentes, donde se identifican perspectivas en relación con el diseño de unidades didácticas y la enseñanza de las matemáticas. Es así como las respuestas dadas a través de una conversación fluida permiten identificar varias dimensiones críticas con las cuales se abordan las complejidades y desafíos inherentes al proceso de enseñanza de las matemáticas. De igual modo, los docentes convergen en que las unidades didácticas son una herramienta indispensable en el desarrollo de competencias específicas, no obstante, divergen en aspectos metodológicos que se resaltan en la variabilidad de las experiencias y enfoques pedagógicos y didácticos dentro del rol docente.

Consideremos ahora, los obstáculos tanto en la carencia de recursos tecnológicos en contextos rurales como en la necesidad de abordar errores y dificultades específicas del área de matemáticas. Se destaca la complejidad de los ambientes de aprendizaje, donde una entrevista al docente 2 expone los desafíos de contextualizar los objetos matemáticos de acuerdo con la realidad de los estudiantes, al contrario del docente lo que enfatiza en la falta de recursos y herramientas tecnológicas en el aula.

De manera semejante, la metodología juega un papel importante al resaltarse en ambas entrevistas, mostrando la necesidad de que sea atractiva y motivadora, al mismo tiempo debe responder no solamente al qué se enseña estrictamente en el área de matemáticas sino al cómo se enseña, entonces, lograr articular una adecuada transposición didáctica. Ahora procederemos, con las dimensiones del contexto educativo y la estructura matemática en el marco de las necesidades y desafíos del aprendizaje de los estudiantes, si bien, el docente 2 tiende por un enfoque con el cual los contenidos no sean una simple transmisión unilateral, es decir, de

docente a estudiante, debido a que lo considera como una dimensión esencial para comprender las necesidades y desafíos específicos de los estudiantes; El docente 1 también aboga por un enfoque que vaya más allá de la simple transmisión de contenidos, reconociendo la influencia del entorno en el proceso de aprendizaje.

De manera semejante, los docentes resaltan que la evaluación tiene como papel superar y detectar dificultades, así como revelar la importancia de conocerlos de forma específica para cada objeto matemático. Conforme a la flexibilidad de la evaluación, ambas entrevistas destacan la necesidad de abordar las diversas formas en que los estudiantes enfrentan y superan los diferentes obstáculos. Para comprender mejor, la percepción de la matemática como una práctica social y cultural aparece una intercepción en las entrevistas al destacar su relevancia en distintos contextos y la necesidad de fomentar el pensamiento crítico. Finalmente, se evidencia la estratificación como una problemática a abordar al igual que la discriminación en el contexto educativo, subrayando la importancia de crear ambientes de aprendizaje inclusivos y dinámicamente atractivos para los estudiantes.

Entrevista a Estudiantes Mediante Técnica de Grupos Focales

Para el caso de la entrevista con estudiantes, es de resaltar como proporcionan una manera diferente de ver las percepciones y experiencias de los estudiantes en la clase de matemáticas. Dichos resultados resaltan una variedad de sentimientos y opiniones, además revela una serie de vivencias y apreciaciones de los estudiantes en relación con las prácticas de enseñanza y evaluación de sus docentes de matemáticas. Es preciso mencionar, que estos testimonios proporcionan una base sólida para reflexionar sobre las prácticas educativas, destacando la necesidad de enfoques pedagógicos y didácticos claros, en ese orden, la interacción directa con los estudiantes arrojó que un aspecto clave a tener en cuenta para la

construcción de una unidad didáctica consiste en incluir prácticas que consideren la dimensión emocional dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para el caso de las actividades realizadas por los docentes, se evidencia una disconformidad de los estudiantes, lo que implica una variabilidad en la metodología de la enseñanza de los objetos matemáticos, donde se obtiene como resultado que el docente 2 es elogiado por su esfuerzo y creatividad para hacer que las actividades sean comprensibles y atractivas, al contrario del docente 1, pues los estudiantes expresan que genera confusión al momento de abordar el aprendizaje de los objetos matemáticos y frente a la evaluación manifiestan que no se relacionan con los temas estudiados en clase, concluyendo que el contraste entre sus dos docentes ha demostrado que la enseñanza de las matemáticas se facilita a través de actividades claras y relevantes para los estudiantes.

Para comprender mejor lo anterior, los estudiantes resaltan la conexión que establecen entre el contenido de los objetos matemáticos y su aplicabilidad en la vida cotidiana, es decir, la utilidad de las matemáticas dentro de su contexto, resaltando que las matemáticas son una herramienta para resolver problemas diarios, tomar decisiones sobre su futuro y emplearla en cálculos prácticos; es probable que, tengan una comprensión práctica de la relevancia de las matemáticas en sus vidas.

De manera semejante, los estudiantes revelan que frente a la participación en clase, los docentes intentan estandarizar el nivel de todos, sin importar si tienen dificultades académicas, cognitivas o simplemente temor, el docente 2 siempre está dispuesto a brindar el apoyo necesario, sin embargo, es de anotar que la percepción de que algunos estudiantes son más propensos a participar resalta la importancia de fomentar un ambiente inclusivo que motive a

todos los estudiantes a participar activamente en las discusiones tanto de recordar, comprender, aplicar y analizar el conocimiento, para que se facilite el evaluar y crear.

Dado esto último, la evaluación de los conocimientos de las matemáticas escolares implícitamente conlleva a sentimientos que impactan emocionalmente a los evaluados, ya sea de forma negativa como positiva, debido a que los estudiantes evidencian sensaciones de temor a equivocarse, ansiedad por la exactitud de las respuestas y la preocupación por la nota final, lo cual incide en los estudiantes durante todo el proceso evaluativo, considerando no solo abordar los contenidos académicos sino también el bienestar emocional de los estudiantes al recrear ambientes de aprendizajes seguros.

Matriz de Análisis de Contenido

Los tres documentos analizados convergen en la importancia de la reflexión crítica sobre la enseñanza de las matemáticas y su impacto en la sociedad; de esta forma, el documento de *Matemática Crítica Como Currículo E Sua Dimensão Na Formação Docente* destaca que los cambios curriculares solo serán efectivos si quienes los implementan (los docentes) comprenden y se comprometen con nuevas propuestas educativas, es de anotar que esta comprensión va más allá de la adopción de enfoques pedagógicos y requiere una reflexión profunda sobre el papel de las matemáticas en la sociedad. La reflexión crítica de las matemáticas se presenta como un catalizador para el empoderamiento docente que va más allá de adquirir habilidades técnicas y se refiere a la conciencia crítica del impacto social, político y cultural de la enseñanza de las matemáticas.

En el artículo denominado “lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática”, se profundiza la necesidad de superar la enseñanza tradicional de las matemáticas y adoptar enfoques que promuevan el

pensamiento reflexivo, donde enfatiza la importancia de que los profesores comprendan la naturaleza de las proposiciones matemáticas y vayan más allá de la simple transferencia conceptual. La dimensión cultural en la enseñanza diaria de las matemáticas también se aborda, especialmente en relación con la subrepresentación femenina en ámbitos exactos. Además, se destaca la necesidad de capacitación de los docentes en dimensiones humanas, individuales y sociales, lo que podría conducir a la reproducción de interpretaciones androcéntricas y estructuras sociales con prejuicios.

Para finalizar, el documento llamado “Rompimiento de la Neutralidad Política: El Compromiso Crítico de la Educación Matemática con la Democracia” refuerza la idea de la reflexión crítica sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y en la toma de decisiones, a partir de la interacción compleja entre la educación matemática y la democracia que nos conduce a explorar diversas dimensiones, es así como se destaca la capacidad de las matemáticas para potenciar habilidades como el pensamiento crítico y racional fundamentales para participación y el empoderamiento de los individuos para comprender y cuestionar el mundo que los rodea, lo que promueve así una ciudadanía activa y comprometida. Es importante comprender las matemáticas como una práctica social y cultural, influenciada por valores e intereses, que es fundamental en la resolución de problemas y la toma de decisiones, pero se advierte sobre su potencial uso como herramienta de exclusión y estratificación social, pues la falta de acceso equitativo a la educación matemática de calidad puede perpetuar desigualdades sociales, que obstaculizan la participación plena en la vida democrática.

En el marco legal y político, se reconoce la importancia de la educación matemática en la promoción de los ideales democráticos, para el caso de Colombia, la Ley General de Educación establece la necesidad de fortalecer capacidades críticas y analíticas a través de la educación

matemática para avanzar en el desarrollo científico, tecnológico y democrático de la sociedad, sin embargo, la brecha entre la retórica política y la realidad educativa puede ser significativa, y es fundamental abordar las barreras estructurales que obstaculizan la realización de estos ideales en la práctica.

La implementación de la educación matemática conlleva a desafíos adicionales, pues las prácticas educativas reflejan y reproducen relaciones de poder existentes, lo que puede llevar a situaciones donde la enseñanza de las matemáticas refuerza dinámicas de exclusión y marginalización en lugar de fomentar la participación democrática. Entonces, la relación entre la educación matemática y la democracia pone de manifiesto la necesidad de adoptar un enfoque crítico y reflexivo en la enseñanza y aplicación de las matemáticas, teniendo en cuenta que si bien existe un potencial inherente para el fortalecimiento de la democracia a través de la educación matemática, este potencial solo se realizará plenamente si se abordan las inequidades existentes y se fomenta una comprensión profunda de cómo las matemáticas interactúan con el poder y la política en la sociedad.

Bitácora de Campo

Por medio de la inmersión en el campo de estudio dentro de la observación de clases a dos docentes del área de matemáticas en contextos rurales, se realizó un análisis a las prácticas que se registraron en la bitácora con el objetivo de observar la pertinencia del enfoque de la matemática crítica dentro de estos contextos. Los resultados arrojaron que ambos docentes reconocen la importancia de establecer conexiones con los conocimientos previos de los estudiantes al mismo tiempo que promueven la aplicación de conceptos matemáticos en situaciones de la vida real, lo que va alineado a los principios de la matemática crítica. Sin embargo, se encuentra una carencia de espacios que promuevan un papel protagónico en la

participación activa del estudiantado en la construcción de los conocimientos promovidos por una reflexión crítica, especialmente en las clases del docente 1.

En cuanto al docente 2, se evidencia un mayor acercamiento con los principios de la Matemática Crítica, a pesar de que aún existen áreas por mejorar, tal es el caso de la promoción de la participación de los estudiantes entorno a una reflexión crítica sobre las causas sociales y culturales de las matemáticas, de igual manera, la aplicación de una evaluación formativa. Lo expuesto hasta el momento, sugiere una comprensión más profunda y contextualizada de los conceptos matemáticos, dado que se encuentran en contextos vulnerables como lo es el rural donde se necesita contribuir a la transformación de la realidad social. En ese orden de ideas, la unidad didáctica debe tener en cuenta la promoción de la reflexión crítica y la participación estudiantil para la construcción del conocimiento.

Llegando a este punto, se evidencia en las prácticas de ambos docentes que la evaluación contribuye a la estratificación de los estudiantes en relación al desempeño académico en el área de matemáticas, lo cual puede tener profundas implicaciones en términos de equidad y participación en la sociedad, debido a que la exclusión o marginación dentro del ambiente de aprendizaje de las matemáticas conlleva a que también pueden ser excluidos en la participación plena en la sociedad, lo que evidencia la necesidad de incluir dentro de la unidad didáctica un enfoque que promueva la equidad y la inclusión en el aprendizaje de la matemática que tenga un impacto en el desarrollo ciudadano del estudiante.

Discusión

Durante la realización del estudio, se pretendió garantizar la solidez de los resultados por medio de una variedad de técnicas e instrumentos de recolección de datos entre los que tenemos las entrevistas a docentes, observación directa no regulada en el campo de acción, grupos focales con estudiantes y análisis de documentos, lo cual permitió una triangulación de datos que condujo al diseño de una unidad didáctica utilizando el enfoque de la matemática crítica para la apropiación de objetos matemáticos a estudiantes de noveno grado en la Institución Educativa Las Toldas, este último, trazado como el objetivo general de la investigación .

Por lo tanto, es necesario discutir algunos aspectos de gran importancia relacionados con la educación matemática y específicamente de la educación matemática crítica, las estrategias metodológicas y la metacognición, relacionados con los desafíos experimentales utilizados en el diseño de unidades didácticas para el área de matemáticas. En primer lugar, el diseño de una unidad didáctica implica reconocer que las matemáticas son una práctica social y cultural relevante en diferentes contextos. Entonces, reflexionar críticamente sobre el papel de las matemáticas en la sociedad, converge hacia los principios de la educación matemática crítica lo que coincide con la necesidad de implementar cambios curriculares que implican una verdadera reflexión que reconozca la necesidad de integrar aspectos culturales en la enseñanza, como subrayan Carvalho, Oliveira y Monteiro (2019). Los conocimientos empíricos recopilados destacan la urgencia de una reflexión crítica que impulse un cambio genuino en la enseñanza de las matemáticas, con miras a una transformación significativa en su práctica. Este punto de vista es respaldado por Skovsmose y Valero (2012), quienes abogan por una mirada crítica y consciente sobre el papel de las matemáticas en la sociedad y en la toma de decisiones, reconociendo las desigualdades y exclusiones sociales que pueden persistir (Bravo, 2024). Por lo

cual, se tiende hacia una conexión intrínseca entre las matemáticas y la vida cotidiana, resaltando su utilidad en la resolución de problemas y la toma de decisiones. En ese orden, se sugiere un vínculo con el enfoque de la matemática crítica que las entiende como una práctica social y cultural, dando protagonismo a la toma de decisiones en la sociedad.

Además, como la recolección de datos se hizo sobre una población vulnerable como es la rural, permitió observar claramente que la metodología debe adoptar enfoques centrados en los estudiantes que propicien el pensamiento crítico y la aplicabilidad del aprendizaje de las matemáticas en diversas situaciones.

En ese orden, se coincide con Quintero (2011) quien expone la importancia de seleccionar estrategias metodológicas contextualizadas. Estos antecedentes, dan cuenta de la importancia de hallazgos como el que si los docentes emplean combinaciones de acciones planificadas facilitan el aprendizaje de los estudiantes, lo cual es respaldado por Torres y Girón (2009) quienes señalan la influencia de las estrategias de enseñanza. Entonces, las unidades didácticas tienen un papel fundamental al momento de adaptar los contenidos y objetos matemáticos a las necesidades específicas de los estudiantes, lo cual, se alinea con lo propuesto por Rico (1997) y Gómez (2001) quienes hablan de la importancia de las unidades didácticas como organizadores del currículo y herramienta articuladora del diseño, desarrollo y evaluación de los contenidos matemáticos.

De manera que, para el diseño de una unidad didáctica el docente debe tener en cuenta el fomentar la reflexión crítica de los estudiantes sobre sus procesos de aprendizaje, lo cual coincide con la relevancia que tiene la metacognición para el proceso de enseñar a aprender dentro de la adquisición de conocimientos, según lo planteado por Miranda et al. (2005). Es probable que, dichas estrategias y sus manifestaciones hasta el momento discutidas requieran de

un enfoque específico en la enseñanza de la matemática crítica en contextos rurales en los que se envuelven los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas, no solo son centrales para el diseño de una unidad didáctica donde se enseñe objetos matemáticos, sino que también se debe identificar oportunidades para incorporar perspectivas en las prácticas pedagógicas.

De donde resulta, un cambio hacia el crecimiento y mejora continua de la educación matemática, en consecuencia, un enfoque desde la matemática crítica para el diseño de las unidades didácticas que interactúe con una evaluación equitativa y formativa que tenga en cuenta los temores que sienten los estudiantes a cometer errores para promover un concepto de justicia social más amplio, de manera que, comprenda las necesidades y desafíos específicos de los estudiantes, así como la influencia del entorno en el proceso de aprendizaje, devela una oportunidad para incorporar a los desafíos de la enseñanza de las matemáticas un espacio para el crecimiento y mejora continua en este campo.

Además de lo anterior, la inmersión en el campo revela la importancia de integrar dimensiones emocionales en el proceso de enseñanza y evaluación. La experiencia de los estudiantes resalta el impacto emocional de las evaluaciones, lo que subraya la necesidad de que los docentes adopten un enfoque que vaya más allá de la mera transmisión de conocimientos. Esto implica considerar el bienestar emocional de los estudiantes al diseñar las unidades didácticas, ajustando las estrategias didácticas y las evaluaciones en consecuencia. Asimismo, se hace necesario crear ambientes inclusivos en el aula de matemáticas para desvincular la estratificación y discriminación en el contexto educativo (Bravo, 2024).

Conclusiones

En esta etapa final del estudio de investigación, se revela como se define el diseño de la unidad didáctica utilizando el enfoque de la matemática crítica para enseñar objetos matemáticos a estudiantes de noveno grado en la Institución Educativa Las Toldas. Los objetivos específicos incluyeron realizar un estudio teórico del enfoque de la matemática crítica, evaluar su pertinencia para la apropiación de los objetos matemáticos y construir efectivamente la unidad didáctica.

En ese sentido, los resultados que se encontraron a partir de la utilización de diversas técnicas de recolección de datos, como entrevistas, observación directa y grupos focales, evidenciaron la importancia de la educación matemática crítica, reconociendo las matemáticas como una práctica social y cultural. De igual modo, se destaca que para el momento del diseño de una unidad didáctica se debe tener en cuenta las estrategias metodológicas centradas en los estudiantes y la metacognición.

Dicho lo anterior, los hallazgos respaldan los objetivos establecidos al lograr el diseño efectivo de la unidad didáctica y al demostrar la pertinencia del enfoque de la matemática crítica en la enseñanza, permite al docente mejorar su quehacer pedagógico por medio de secuencias sistemáticas en el que pueda desarrollarse como guía, facilitador y acompañante del proceso de aprendizaje, donde promueva la autonomía, pensamiento crítico y creatividad por medio de actividades prácticas.

De igual modo, se logró responder a las preguntas de investigación al identificar la necesidad de un cambio en la educación matemática hacia un enfoque más crítico y reflexivo que atienda los contextos rurales que exigen formas de abordaje de la enseñanza de las matemáticas más consientes de la diversidad de los estudiantes para no caer en su estratificación.

En ese orde, conviene subrayar la relevancia de la educación matemática crítica y su aplicación práctica en el diseño de unidades didácticas al momento de brindar oportunidades para mejorar la educación matemática, promoviendo la justicia social y teniendo en cuenta las necesidades específicas de los estudiantes para que lo conceptual adquiera sentido dentro de la realidad tanto del estudiante como al interior del aula. De ahí que, la importancia de considerar el bienestar emocional de los estudiantes en el proceso de enseñanza y evaluación.

Finalmente, este estudio representa un avance significativo en el campo de la educación matemática al ofrecer una perspectiva crítica y reflexiva sobre la enseñanza de las matemáticas. Proporciona una base sólida para futuras investigaciones y destaca la importancia de adoptar un enfoque más inclusivo y centrado en el estudiante en la educación matemática.

Referencias Bibliográficas

- Alcina, A. & Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva: propuestas para una educación matemática accesible* (Vol. 110). Narcea Ediciones.
- Ars Nova (2020, 29 de enero) *Michel Foucault acerca de la enseñanza* [video] Youtube
<https://www.youtube.com/watch?v=D Ae0wpX2xQc>
- Bravo, K. (2024). Avances proyecto de investigación denominado *La matemática crítica como enfoque para la enseñanza de objetos matemáticos a estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas de La Argentina Huila*. Documento entregado en el curso Seminario de Investigación UNAD.
- Beerbaum, A. V., Bueno, F. F. C., Da Silva, E. B., Boff, E. T. D. O., & Bianchi, V. (2022). *Matemática Crítica Como Currículo E Sua Dimensão Na Formação Docente. Salão do Conhecimento, 8(8)*.
- Cárdenas Sierra, Y. R., & Muñoz Restrepo, D. A. (2014). Educación matemática crítica y análisis didáctico: una propuesta de construcción de saberes matemáticos en contextos de conflicto social en la Institución (Master's thesis, Universidad de Medellín).
- Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza*. Barcelona: Martínez Roca.
- Cruz, A., (2018). *La Teoría De Juegos Para Fortalecer La Competencia Matemática Resolución De Problemas En Los Estudiantes De Noveno Grado De La Institución Educativa Gallego Sede El Carmen Del Municipio De La Plata Huila*
- Freire, P. (1972). *Pedagogía del oprimido*. Argentina: Siglo XXI Argentina Editores, S. A.
- García-Oliveros, G., (2022). Posibilidades de la diversidad: una perspectiva crítica en educación matemática a través del enfoque desigualdad social. *Revista Colombiana de Educación, (86)*, 305-320. <https://doi.org/10.17227/rce.num86-12077>

- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- González Palma, J. A. (2019). La articulación entre matemática crítica y el concepto de función matemática. Una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de función lineal a estudiantes de grado noveno.
- Guerrero, O. (2008). Educación matemática crítica: Influencias teóricas y aportes. *Evaluación e investigación*, 1(3), 63-78.
- Hernández-Sampieri, R. & Mendoza, C (2018). Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta, Ciudad de México, México: Editorial Mc Graw Hill Education, Año de edición: 2018, ISBN: 978-1-4562-6096-5, 714 p.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: Magisterio. Mineducación <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html>
- MEN. (2007). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (primera ed.). Bogotá, Colombia: Ministerio de educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Miranda, A., Acosta, G., Tárraga, R., Fernández, M., & Rosel, J. (2005). *Nuevas Tendencias en la Evaluación de las Dificultades de Aprendizajes de las Matemáticas. El Papel de la Metacognición*. *NEUROL*(40), 97-102. Recuperado el 21 de 10 de 2018, de https://www.researchgate.net/publication/245025031_Nuevas_tendencias_en_la_evaluacion_de_las_dificultades_de_aprendizaje_de_las_matematicas_El_papel_de_la_metacognicion
- Monje, C. (2011). Metodología de la investigación cualitativa y cuantitativa. Guía didáctica. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la->

investigacion.pdf

- Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Elementos y evaluación.
<https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/54320/Alfar-%20Cap.%201-%20Curr%C3%ADculo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria.
- Rico, L. (1997). El problema de la unidaes didacticas . En L. Rico, Los Organizadores del Currículo de Matemáticas (págs. 32-57). Madrid, España: Universidad de Granada.
- Rico, L. (2000). Universidad, investigación y didáctica de la matemática en España. *Números*, 409-412.
- Sánchez, B. J., & Torres, J. (2009). Educación Matemática crítica: un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los ambientes de aprendizaje.
- Sánchez, B. J., & Torres, J. (2017). La responsabilidad del currículo de matemáticas en la formación de ciudadanos que cuestionan la estructura social de clases. Una mirada desde perspectivas sociopolíticas. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 299-322.
- Skovsmose, O. (1997). Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas. *Revista EMA*, 2(3), pp. 191-216
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente.
- Skovsmose, O., Valero, P. (2001). Breaking Political Neutrality. The Critical Engagement of Mathematics Education with Democracy. In B. Atweh; H. Forgasz & B. Nebres (Eds.), *Socio-cultural aspects of mathematics education: An international research perspective* (pp. 37-56) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associate
- Skovsmose, O., & Borba, M. (2004). *Research methodology and critical mathematics education*.

In *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 207-226). Boston, MA: Springer US.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2012). *Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia.*

<https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/23f4c336-6a11-493f-bf32-c8285fd8dcde/content>

Triana Teherán, E. (2022). *La educación matemática crítica para el desarrollo del pensamiento estadístico.*

<https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/45954/2022edilbertotriana.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

UNAD, (2024). *Líneas de investigación de la ECEDU*

<https://academia.unad.edu.co/investigacion-y-productividad-ecedu/lineas-de-investigacion>

Valero, P. (2000). *Reforma, democracia y educación matemática en la escuela secundaria.* In J.F. Matos & E. Fernandes (Eds.), *Investigação em educação matemática – perspectivas e problemas* (pp. 71-78). Funchal, Portugal: Associação de Professores de Matemática de Portugal.

Valero, P., Andrade-Molina, M., & Montecino, A. (2015). *Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática.* *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(3), 7-20.

Apéndices

Apéndice A

Formato consentimiento informado estudiantes

AUTORIZACIÓN DE USO DE DERECHOS DE IMAGEN SOBRE FOTOGRAFÍAS Y PRODUCCIONES AUDIOVISUALES (VIDEOS) Y DE PROPIEDAD INTELECTUAL OTORGADO A KATERINE BRAVO LONDOÑO (INVESTIGADORA) PARA EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN DENOMINADO “LA MATEMÁTICA CRÍTICA COMO ENFOQUE PARA LA APROPIACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS A ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS TOLDAS DE LA ARGENTINA HUILA.”

Yo, _____, con documento de identidad No. _____ de _____ mediante el presente formato autorizo a Katerine Bravo Londoño (Investigadora) para que haga el uso y tratamiento de los derechos de imagen de mi hijo/a para incluirlos sobre fotografías y producciones audiovisuales (videos); así como de los Derechos de Autor; los Derechos Conexos y en general todos aquellos derechos de propiedad intelectual que tengan que ver con el derecho de imagen. Esta autorización se registrará por las normas legales aplicables y en particular por las siguientes:

- Este video/foto podrá ser utilizado con fines educativos e informativos en diferentes escenarios y plataformas de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD)
- Este video/foto es sin ánimo de lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos. La investigadora y la Universidad quedan exentas de cualquier responsabilidad que se pueda derivar de la presente actividad con la firma de la autorización.
- La presente autorización no tiene ámbito geográfico determinado, por lo que las imágenes en las que aparezca podrán ser utilizadas en el territorio del mundo, así mismo, tampoco tiene ningún límite de tiempo para su concesión, ni para explotación de las imágenes, o parte de estas, por lo que mi autorización se considera concedida por un plazo de tiempo ilimitado.

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, Katerine Bravo Londoño (Investigadora) solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del menor de edad: _____, identificado(a) con Tarjeta de Identidad número _____ para que aparezca ante la cámara, en una videograbación o captura de imágenes fotográficas.

Firma del padre/madre de familia o acudiente
Cédula de ciudadanía _____

Fuente. Autoría Propia

Apéndice B

Formato consentimiento informado docentes

AUTORIZACIÓN DE USO DE DERECHOS DE IMAGEN SOBRE FOTOGRAFÍAS Y PRODUCCIONES AUDIOVISUALES (VIDEOS) Y DE PROPIEDAD INTELECTUAL OTORGADO A KATERINE BRAVO LONDOÑO PARA EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN DENOMINADO “LA MATEMÁTICA CRÍTICA COMO ENFOQUE PARA LA APROPIACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS A ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS TOLDAS DE LA ARGENTINA HUILA”

Yo, _____, con documento de identidad No. _____ de _____ en mi calidad de persona natural, autorizo mediante el presente formato autorizo a Katerine Bravo Londoño (Investigadora) para que haga el uso y tratamiento de mis derechos de imagen para incluirlos sobre fotografías y producciones audiovisuales (videos); así como de los Derechos de Autor; los Derechos Conexos y en general todos aquellos derechos de propiedad intelectual que tengan que ver con el derecho de imagen. Esta autorización se regirá por las normas legales aplicables y en particular por las siguientes:

- Este video/foto podrá ser utilizado con fines educativos e informativos en diferentes escenarios y plataformas de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD)
- Este video/foto es sin ánimo de lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos. La investigadora y la Universidad quedan exentos de cualquier responsabilidad que se pueda derivar de la presente actividad con la firma de la autorización.
- La presente autorización no tiene ámbito geográfico determinado, por lo que las imágenes en las que aparezca podrán ser utilizadas en el territorio del mundo, así mismo, tampoco tiene ningún límite de tiempo para su concesión, ni para explotación de las imágenes, o parte de estas, por lo que mi autorización se considera concedida por un plazo de tiempo ilimitado.

Firma

Cédula de ciudadanía _____

Fuente. Autoría Propia

Apéndice C*Unidad didáctica*

**Toma de Decisiones:
Entendiendo la Probabilidad
Desde la Ficción de la
Certeza**

UNIDAD DIDÁCTICA

KATERINE BRAVO LONDOÑO
kbravol@unadvirtual.edu.co
+57 3177167090

Contenido

Introducción.....	3
Metodología.....	5
Roles de los Estudiantes	7
Objetivo de Aprendizaje.....	7
Número de Clases.....	7
Forma de Evaluar.....	8
Estándares Básicos de Competencias	8
Pensamiento Aleatorio	8
Momento 1. Recordemos Juntos	9
<i>Identificación de los aprendizajes y experiencias previas relacionadas con la probabilidad.....</i>	10
<i>Socialización de los contenidos</i>	12
Momento 2. Comprendiendo la Probabilidad	13
<i>Experimentos aleatorios</i>	14
<i>Espacio Muestral.....</i>	14
<i>Tipos de sucesos o eventos</i>	15
<i>Probabilidad.....</i>	15
<i>Cálculo de probabilidad (Regla de Laplace).....</i>	16
<i>Propiedades de la probabilidad</i>	19
<i>Técnicas de conteo.....</i>	19
<i>Principio de multiplicación.....</i>	20
<i>Permutación</i>	21
<i>Combinación</i>	22
Momento 3. Aplico y Analizo la Probabilidad en mi Entorno	24
Momento 4. Evaluar para Comprobar.....	34
Momento 5. Crear desde lo Aprendido	39
Referencias	44



Introducción

La presente Unidad Didáctica denominada “Toma de Decisiones: Entendiendo la Probabilidad desde la Ficción de la Certeza”, es producto de una rigurosa investigación que condujo a la construcción de este recurso fundamentado en el enfoque de la matemática crítica y con una metodología basada en un enfoque pedagógico claro y estructurado, fomentando una reflexión crítica sobre el rol de las matemáticas en la sociedad, por tanto, se configura como una guía exhaustiva para el docente de matemáticas, pretendiendo facilitar la apropiación del objeto matemático probabilidad por parte de los estudiantes del grado Noveno.

Este recurso aborda la problemática de la estratificación desde la enseñanza y la evaluación, integrando de manera equilibrada los contenidos curriculares y el bienestar emocional del estudiante, donde a través de conexiones entre los conocimientos previos y la aplicación práctica de los conocimientos adquiridos en situaciones de la vida diaria, se promueve la solución de problemas y la toma de decisiones informadas. Este proceso, a su vez, contribuye a la transformación de la realidad social del contexto en el que se desenvuelven los estudiantes.

La metodología de la Unidad Didáctica denominada “Toma de Decisiones: Entendiendo la Probabilidad desde la Ficción de la Certeza”, comprende tres fases que son Inicio, Desarrollo y Cierre, las cuales contienen cinco momentos sistematizados a partir de la taxonomía de Bloom, explicando al docente de la asignatura de estadística cómo guiar al estudiante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, para que aprendan a aprender dentro del espacio democrático de este modo adquieran nuevas habilidades y conocimientos; éste método de aprendizaje tiene una jerarquía que se divide en los niveles cognoscitivos que son recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear, los cuales se implementan a través de momentos, en este sentido, se permitirá llevar a cabo un proceso evolutivo, en el que los estudiantes emplean diferentes herramientas para aprender, mejorando la comprensión, análisis y razonamiento, las cuales se verán aplicadas en la participación de la sociedad.



mediante la toma de decisiones, convirtiéndolos en ciudadanos con competencias democráticas.

En ese orden de ideas, se toman como eje fundamental que desarrolla el pensamiento crítico, el espacio democrático propuesto por Cruz (2018), de esta forma, todos los espacios democráticos, se realizan con el fin de que los estudiantes puedan llegar a la respuesta por medio de interrogantes que surgen a raíz de las situaciones problema, se puede aplicar de forma individual y grupal, y permiten que los estudiantes analicen la situación y que apliquen los conocimientos para posteriormente encontrar la respuesta. Estos espacios democráticos deben también ser socializados entre el docente y todos los estudiantes quienes asumirán un rol (Líder, Minutero, Secretario, Modulador y Revisor) para el trabajo en colaborativo y de esta forma lograr desarrollar el pensamiento crítico por medio de la toma de decisiones.



Metodología

Toma de Decisiones: Entendiendo la Probabilidad desde la Ficción de la Certeza, tiene como metodología para el desarrollo de esta Unidad Didáctica privilegiar el pensamiento divergente a través de las diversas respuestas para la misma situación problema, promoviendo la creatividad dentro de procesos sensibles a las lagunas de conocimiento, llevando al estudiante a buscar e identificar soluciones, hacer especulaciones o formular hipótesis, aprobar o compararlas o modificarlas si es necesario y a comunicar sus resultados.

En ese orden, enseñar a aprender cómo atender las necesidades de indagación y convivencia, evidenciado su razón de ser, por medio de las diferentes fases. Dado lo anterior, la primera Fase de la unidad (Inicio) está comprendida por el momento 1 “Recordemos Juntos” especialmente destinado a rescatar e identificar los aprendizajes y experiencias previas relacionadas con el tema, tópico o aprendizaje que se espera lograr en la clase, además es necesario dar a conocer el sentido e importancia del aprendizaje propuesto, la relación con otros aprendizajes ya sea de la misma asignatura o de otras.

El momento 2 “Comprendiendo la Probabilidad” mediante el cual se comprende por medio de situaciones de la vida real el concepto de la probabilidad, identificando la incertidumbre como fuente de información para la toma de decisiones en diferentes contextos, la Unidad Didáctica implementa los Laboratorios para aislar la conflictividad normal de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje.

La segunda Fase (Desarrollo) y su momento 3 “Aplico y Analizo la Probabilidad en mi Entorno” aborda diversos temas que permitan comprender y manejar conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades y su aplicación práctica en la toma de decisiones, es un apartado que guía los estudiantes en el desarrollo de habilidades críticas para interpretar y resolver problemas utilizando técnicas específicas de conteo y para entender la importancia de la incertidumbre en diversos contextos.



Finalmente, la tercera Fase (Cierre) comprende el momento 4 “Evaluar para Comprobar” es un espacio que permitirá comprobar el aprendizaje adquirido de los estudiantes mediante una evaluación que indaga cómo la incertidumbre impacta la toma de decisiones en la vida real y la efectividad de soluciones a problemas. Razón por la cual, el docente deberá adoptar un papel más afectivo, donde ayude al estudiante a resolver los conflictos inevitables que por la ley natural se producirán a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica. Mientras el docente, motive intrínsecamente a sus estudiantes y los anime a desarrollar de manera genuinamente responsable, sin los elementos destructivos que introducen los sentimientos de culpabilidad o la inseguridad en sí mismos. Entonces, la evaluación deberá ser percibida por los estudiantes como el proceso natural de aprender a estudiar, mediante la interpretación de las expectativas por medio de ambientes de aprendizajes seguros con los cuales se desarrollen sus propias aspiraciones.

El momento 5 “Crear desde lo Aprendido” los estudiantes darán un paso para crear desde lo aprendido mediante la formulación de problemas relevantes, del diseño de estrategias para calcular probabilidades y la adaptación de sus conocimientos a situaciones del ámbito familiar, escolar y/o comunitario, para demostrar cómo la probabilidad puede guiar decisiones informadas en distintos escenarios.



Roles de los Estudiantes

Para el trabajo en equipo de las diferentes actividades, cada estudiante debe asumir uno de los siguientes roles: Líder, Minutero, Secretario, Modulador o Revisor, los cuales están diseñados para garantizar un aprendizaje cooperativo mediante la colaboración efectiva que conlleven al éxito en las actividades y laboratorios de la Unidad Didáctica de probabilidad.

Líder: encargado de organizar el equipo y explicar ideas, opiniones o procedimientos expuestos por cada miembro del grupo.

Minutero: Realiza el cronograma de trabajo y controla el tiempo para cumplir con las actividades a desarrollar.

Secretario: Registra las opiniones y discrimina las decisiones para el buen funcionamiento del trabajo y redacta el informe final del equipo.

Modulador: Motiva a los compañeros a participar, asegurando que todos los integrantes del equipo realicen una intervención que contribuya efectivamente al trabajo.

Revisor: es el encargado de solicitar las asesorías con el docente, revisa los avances y pendientes del producto por entregar para adecuarlos con los criterios solicitados.

Objetivo de Aprendizaje

Movilizar el pensamiento crítico a través de la teoría de probabilidades, mediante la aplicación de procedimientos para la resolución de problemas presentes en casos de la vida real.

Número de Clases

La unidad didáctica está compuesta por 10 clases, repartidas en 5 momentos, cada clase con una duración de 60 minutos.



Forma de Evaluar

En cada uno de los momentos de la unidad didáctica se realiza una evaluación por parte del docente, quien identifica debilidades y fortalezas de los estudiantes, de forma que implementa acciones de mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Finalmente, se realiza una evaluación acumulativa de la unidad didáctica en el momento 4, por medio de una investigación a partir de la comparación de la probabilidad aplicada en los diferentes contextos científicos, tecnológicos, agrícolas, entre otros, donde también se evidencie la aplicabilidad de la incertidumbre en la toma de decisiones mediante diferentes contextos de la vida real, y se justifique la probabilidad de un evento a partir del espacio muestral y el subconjunto correspondiente.

Estándares Básicos de Competencias

Pensamiento Aleatorio

- φ Aplicación de nociones fundamentales de probabilidad como el conjunto de posibles resultados, los sucesos, la independencia, entre otros.
- φ Cálculo de la probabilidad de sucesos simples mediante diferentes métodos como listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo.
- φ Comparar resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
- φ Contrastar los resultados obtenidos de experimentos al azar con las predicciones realizadas por un modelo matemático probabilístico.



INICIO

Recordar Comprender



Momento 1. Recordemos Juntos

Clases



Duración



¡Para Comenzar!

Es un momento especialmente destinado a rescatar e identificar los aprendizajes y experiencias previas relacionadas con el tema, tópico o aprendizaje que se espera lograr en esta clase. Es necesario, igualmente, dar a conocer el sentido e importancia del aprendizaje propuesto, la relación con otros aprendizajes ya sea de la misma asignatura o de otras.



Objetivos de Aprendizaje

- Describir de acuerdo con su contexto, situaciones de la vida real en las que se aplique el concepto de probabilidad.
- Reconocer la ocurrencia de un evento, mediante el análisis de situaciones problema contextualizadas.



- Expresar en el lenguaje matemático los acontecimientos de la vida real, identificando los casos favorables y el número de casos posibles.
- Identificar la importancia de la incertidumbre para el análisis de un suceso que conlleve a obtener la opción más favorable para dar solución a un problema de la vida real.
- Explicar los conceptos de probabilidad y su importancia para el desarrollo de diferentes campos del saber en los que es necesario el procesamiento de la información.

¡Para Entrar en Materia!

Hablaremos sobre lo conocido a cerca de la probabilidad y su relación con situaciones de la vida real

Identificación de los aprendizajes y experiencias previas relacionadas con la probabilidad

A continuación, el docente deberá identificar los conocimientos previos con el objetivo de definir por medio de situaciones de la vida real el concepto de la probabilidad, identificando la incertidumbre como fuente de información para la toma de decisiones en diferentes contextos, su desarrollo se llevará a cabo con preguntas orientadoras que harán parte de la evaluación diagnóstica de los conocimientos previos sobre probabilidad.

1. ¿Puede la matemática ayudar a predecir si algún fenómeno se va a producir? El docente procede a registrar en el tablero todas las respuestas, luego procederá a orientarlos a cerca de que no es posible asegurar que algo vaya a suceder, salvo los casos obvios, para lo cual les plantea la pregunta a los estudiantes.



2. ¿cuáles pueden ser los casos obvios? Dichos casos serían, por ejemplo, que al soltar una pelota desde un edificio la probabilidad es que coja hacia abajo o cada vez que la tierra gira en su eje oscurezca o aclarezca.

Posteriormente, el docente indica a los estudiantes que existen herramientas con las cuales es posible cuantificar la esperanza que un resultado se produzca y no es magia como pensaban anteriormente cuando algo salido de lo normal se presentaba ante sus ojos. Entonces, el docente comienza con una narrativa que evidencie experiencias previas donde se aplica el objeto matemático de probabilidad, una propuesta es:

Nuestros padres en el campo tienen una sorprendente precisión cuando dicen que habrá o no lluvia en la tarde:

3. ¿Qué razonamiento están haciendo?

La respuesta está en un razonamiento probabilístico, debido a que el campesino le ha prestado atención al cielo, porque las condiciones del clima inciden en las cosechas, de modo que es notable que cuando el cielo adquiere unas características particulares la mayoría de las veces llueve, a través de los años los campesinos perfeccionaron una regularidad que los lleva a una importante conclusión, al ver en el cielo esas nubes con tonalidades oscuras y al percibir la humedad, la mayoría de las veces llueve.

4. ¿En matemáticas cómo se le denomina a lo que el campesino percibe antes de llover?

La anterior pregunta busca que los estudiantes manejen un vocabulario apropiado para poder comunicar matemáticamente que los datos como para este caso específico la humedad y la tonalidad de las nubes, son fundamentales para el análisis y así determinar un posible suceso.

5. ¿Qué tipos de datos existen?

Se espera obtener que los datos que existen son cuantitativos y cualitativos. Y dado lo anterior

6. ¿Qué tipo de datos son?

La respuesta ideal es que son cualitativos porque son características que toma el cielo generalmente antes de llover.

Ahora, si los campesinos tuvieran un cuaderno y anotaran cada vez que se presentan estas condiciones y registrarán si llueve o no

7. ¿Dónde podrían organizar esta información?

La respuesta está en la tabla de frecuencia.



8. ¿Qué resulta después de analizar la tabla?

Se espera que respondan que son las conclusiones, entonces, podría llegar a una conclusión más cuantitativa como 9 de cada 10 veces llueve, esto nos da a entender que sin importar que la variable a analizar sea cualitativa o cuantitativa, el análisis puede darse cuantitativamente y por consiguiente las conclusiones involucran datos cuantitativos.

Socialización de los contenidos

El docente expone jerárquicamente los temas que se desarrollarán en el transcurso de la implementación de la unidad didáctica.

Temas:

1. Experimentos aleatorios.
2. Espacio muestral.
3. Tipos de sucesos o eventos.
4. Probabilidad.
 - 4.1 Cálculo de probabilidades (Regla de Laplace).
 - 4.2 Propiedades de la probabilidad.
5. Técnicas de conteo.
 - 5.1 Principio de multiplicación.
 - 5.2 Permutación
 - 5.3 Combinación



Momento 2. Comprendiendo la Probabilidad

Clases



Duración



¡Para Comenzar!

La probabilidad se trata de avanzar en el conocimiento a partir de la observación y análisis de la realidad, pero de forma objetiva y con un plus adicional que solo las matemáticas nos pueden regalar y es su rigurosidad. Razón por la cual, la unidad didáctica se plantea en este momento como objetivo definir por medio de situaciones de la vida real el concepto de la probabilidad, identificando la incertidumbre como fuente de información para la toma de decisiones en diferentes contextos.



Objetivos de Aprendizaje

- Interpretar enunciados expuestos en las situaciones problemas para determinar las características de un evento aleatorio.
- Comprender las situaciones problemas, identificando los datos necesarios para obtener un espacio muestral.
- Diferenciar los tipos de eventos o sucesos en un experimento aleatorio.
- Relacionar los conceptos de evento probabilístico y espacio muestral identificando los casos posibles con los casos favorables.



¡Entremos en Materia!

Para comprender los conceptos inherentes al objeto matemático de probabilidad, es necesario ejemplificar con casos de la vida real, para esto, el docente retoma la narrativa anterior (Momento 1) para indagar sobre la concepción que tienen los estudiantes frente al experimento aleatorio mediante una lluvia de ideas, para lo cual, plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo se define la situación de predecir si va a llover o no?

Seguidamente se construye el concepto de experimento aleatorio.

Experimentos aleatorios

Ensayo en el cual es imposible predecir el resultado que se obtendrá.

Para la construcción del concepto de espacio muestral, el docente indica que el espacio muestral, es un conjunto compuesto por todos los posibles resultados que se pueden obtener de un experimento aleatorio; de acuerdo con el experimento aleatorio ¿Cuál es el espacio muestral?

Espacio Muestral

Se considera como el conjunto universal del experimento aleatorio, es decir, el conjunto de todos los posibles resultados dentro del experimento. Se simboliza con la letra S.

Cada uno de los elementos que componen el espacio muestral, dan origen a subconjuntos que definen un evento o suceso y se denota con la letra E, en ocasiones, un evento es todo el espacio muestral. Para ejemplificar, ¿determine cuál o cuáles son los eventos del experimento aleatorio?

Resulta que estos eventos se clasifican así:



Tipos de sucesos o eventos

- Seguro, cuando los elementos del evento son los mismos del espacio muestral.
- Imposible, si el evento es un conjunto vacío, es decir, que nunca se realiza.
- Unitario o simple, en el caso de que el evento es un subconjunto unitario.

Lo anterior, se convierte en la base fundamental que nos conduce hacia la comprensión del concepto de probabilidad.

Probabilidad

Es una rama de las matemáticas en la que el azar juega un papel indispensable, razón por la cual es asociada frecuentemente con los juegos de azar. Actualmente, dentro de sus aplicaciones se encuentra la física cuántica, la programación de inteligencias artificiales, la predicción del clima y desastres naturales, los precios de los alimentos, la medicina, entre otros.

De acuerdo con la teoría de probabilidades, para calcular la probabilidad es necesario tener en cuenta la toma de decisiones, así como en la vida real, es decir, es conveniente conocer las condiciones específicas para evaluar el experimento aleatorio. En la vida real, antes de tomar cualquier decisión primero se debe analizar todo lo que conlleva después de decidir entre una y otra opción.

Dado lo anterior, podemos concluir que la necesidad del ser humano por anticiparse a ciertos acontecimientos conlleva a valorar la incertidumbre como una fuente de información a la hora de la toma de decisiones, por ejemplo, si ahora el labriego nota que en los últimos días ha estado lloviendo, es probable que siga sucediendo, la ocurrencia de un evento se puede considerar como una medida de incertidumbre, debido a que a mayor probabilidad de ocurrencia se



tiene mayor confianza en el posible resultado, entonces, esto repercute en las acciones y dinámicas de trabajo en la finca ¿Cómo cuáles?

Cálculo de probabilidad (Regla de Laplace)

Ahora, que nos hemos introducido en el concepto de probabilidad desde un lenguaje común, es preciso llevarlo hacia un lenguaje matemático que permita su cálculo, para lo que tenemos la regla de Laplace, la cual nos muestra que dado un experimento aleatorio en que todos los resultados posibles son igualmente probables (equiprobabilidad) se obtiene el cociente entre el número de casos favorables sobre el número de casos posibles, dando como resultados la probabilidad del suceso. Entonces, sea A la probabilidad de un suceso cualquiera se denota así:

$$P(A) = \frac{\#(E)}{\#(S)}$$

Donde $\#(E)$ es el número de casos favorables y $\#(S)$ es el número de casos posibles, es decir, $\#(S)$ es el espacio muestral, el cual es el conjunto de todos los posibles resultados en que puede terminar el experimento aleatorio.



Desde este momento, y a lo largo de la Unidad Didáctica se integrarán diferentes Situaciones Problema, para las cuales es necesario emplear la herramienta del espacio democrático, donde los estudiantes deben asumir los roles descritos al inicio de la unidad.



Ahora el docente debe evaluar hasta el momento si está claro el concepto de probabilidad, para lo cual se propone:



La Institución Educativa (I.E) La Toldas se prepara para los juegos

“supérate con el deporte” en la modalidad atletismo, para ello, el docente Oscar Andrade está conformando un grupo de atletas que representará la institución en la fase municipal. para esto, se debe decidir entre 3 de 5 de los mejores atletas, Yaderi (Y), Karla (K), Thiago (T), Nicolás (N) y Andrés (A) ¿Cuál es la probabilidad de que Thiago y Karla pertenezcan al grupo seleccionado por el profesor?



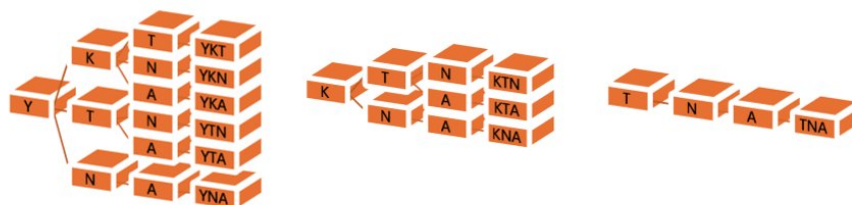
1. ¿De qué se trata el problema? De formar el grupo de atletas que van a representar la I.E. Las Toldas
2. ¿Qué pide el problema? Calcular la probabilidad de que Thiago y Karla pertenezcan al grupo
3. ¿Cómo determino los posibles grupos de los que haga parte Karla y Thiago? Por medio del diagrama de árbol.
4. ¿Qué debo tener en cuenta para encontrar la probabilidad? El número de casos favorables de acuerdo con el evento (#E) y el número de casos posibles (#S).



5. ¿Qué debo utilizar para realizar el cálculo? La fórmula establecida por la regla de Laplace
6. ¿Cuál es la probabilidad de que Thiago y Karla pertenezcan al grupo seleccionado por el profesor? La probabilidad de que Thiago y Karla pertenezcan al grupo es $3/10$ o del 30%.
7. ¿Qué han aprendido hasta el momento?
8. ¿Cuáles son las dificultades que han detectado?
9. ¿Cómo solucionaríamos esas dificultades?

Este espacio democrático nos permite establecer un orden para resolver una situación problema, así:

Solución. Lo primero que vamos a hacer, es hallar los posibles grupos que se pueden formar con los 5 estudiantes, para ello utilizaremos un diagrama de árbol.



Posteriormente, se determina el evento.

B = escoger a Thiago y a Karla en el equipo seleccionado

$B = \{YKT, KTN, KTA\}$

Seguidamente encontramos el espacio muestral, es decir, el número de casos posibles, el cual es 10 y el número de casos favorables que es 3.

Finalmente aplicamos la regla de Laplace

$$P(E) = \frac{3}{10} = 0,3 \cdot 100\% = 30\%$$



Lo que nos permite concluir que la probabilidad de que Thiago y Karla pertenezcan al grupo de atletas es del 30%

Para continuar, con la comprensión de los conceptos, es preciso reconocer que la probabilidad tiene propiedades, entonces:

Propiedades de la probabilidad

La probabilidad se define dentro de la desigualdad que va $0 \leq P(A) \leq 1$, lo que significa lo ya mencionado con anterioridad, es decir, que la probabilidad de ocurrencia es el cociente entre el número de elementos del evento y el número de elementos del espacio muestral, además, como $\#(E) \leq \#(S)$ y ambos valores son mayores o iguales que cero, entonces, la probabilidad de ocurrencia de un evento siempre será un número entre 0 y 1.

De lo anterior, se puede concluir que la probabilidad de un evento vacío es cero, es decir, $P(\phi) = 0$, luego, si el evento E coincide con el espacio muestral S su probabilidad es 1, lo que se denota $P(S) = 1$, posteriormente, tenemos que:

- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Recuerdan que en la situación problema 1, para responder a la pregunta del espacio democrático *¿Cómo determino los posibles grupos de los que haga parte Karla y Thiago?* Se necesitó utilizar el diagrama de árbol, pero ¿qué pasa si necesitamos calcular un espacio muestral demasiado grande? Para eso debemos conocer las técnicas de conteo.

Técnicas de conteo

Debido a que en algunos experimentos aleatorios no es fácil determinar el número de elementos del espacio muestral y de los eventos, por esta razón, es indispensable recurrir a las técnicas de conteo, debido que en una primera instancia no es necesario conocer todo el espacio muestral para calcular la



probabilidad de un evento, sino que tan solo con el número de elementos que hay en el espacio muestral es suficiente.



Por medio de los Laboratorios, el docente enseña desde la abstracción de lo vivido en el entorno del estudiante, buscando una reflexión desde la conciencia, mediante la ética y la responsabilidad individual y social dentro del aprendizaje cooperativo y los roles del estudiante.

Principio de multiplicación

Llevamos al aula de clase tres monedas y definimos que el experimento aleatorio es lanzar al aire una sola vez las tres monedas al mismo tiempo, y se pide a los estudiantes registrar en una tabla de frecuencia las respuestas diferentes de cada vez que se lanzan al aire en una muestra de cien lanzamientos.

Se les pregunta a los estudiantes ¿cuántos posibles resultados pueden obtener al lanzar las tres monedas?



Entonces, si en un experimento se toma una muestra n en la cual hay tanto orden como repetición, y el tamaño de la población es N , entonces, $N(S)$ es la cantidad del elementos del espacio muestral que queremos encontrar:

$$N(S) = N^n$$

Para dar solución a la pregunta planteada, se tiene que $N = 2$ y $n = 3$, así, $N^n = 2^3 = 8$



Permutación

Las estudiantes del grado noveno llevan 4 vestidos diferentes al salón, para una velada de modelaje que organizaron en la I.E. Las Toldas. Ellos eligen 3 compañeras para modelar, quienes deben ser vestidas con los 4 vestidos. Los estudiantes deben responder ¿de cuantas maneras distintas pueden hacerlo?

Para este caso es preciso identificar la población y la muestras así:

Población: 4 vestidos, luego $N = 4$

Muestra: 3 estudiantes, luego $n = 3$



Para este caso no es posible hacerlo mediante el principio de la multiplicación, puesto que hay orden, es decir que es diferente poner el vestido 1 en la estudiantes 2 que en la estudiante 3. Además, no es posible que haya repetición, pues el mismo vestido no se le puede poner a dos estudiantes.

Entonces es necesario que se determinen las formas de vestir las estudiantes

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Total
4	\times	3	\times
		2	$=$
			24

Esto quiere decir que hay 24 opciones diferentes de poner los 4 vestidos a las 3 estudiantes.

Lo anterior, nos deja ver que en un experimento aleatorio con población N y muestra n , en donde la muestra tiene orden, pero no repetición, el número de



elementos del espacio muestral se determina a partir de la permutación de n en N , lo cual está dado por

$$P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Donde $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \dots \times 2 \times 1$ y $0! = 1$

Así, para aplicarlo al laboratorio 2, tenemos que:

$$P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!}$$

$$P_3^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = \frac{24}{1} = 24$$

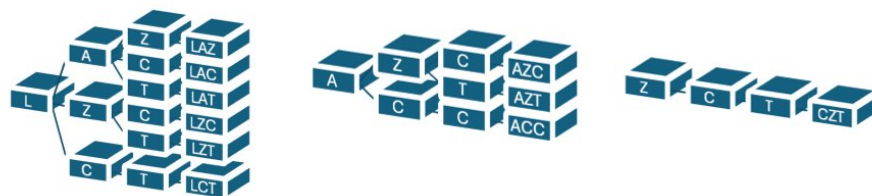
Combinación

Los estudiantes del grado noveno, en su proyecto de emprendimiento pretende realizar una huerta para el cultivo de productos orgánicos, para iniciar, van a sembrar hortalizas diferentes en tres surcos, para saber cuál será las más vendida para su emprendimiento; el SENA, les dota 5 semillas distintas de hortalizas (Lechuga, Acelga, Zanahoria, Cilantro y Tomate).

Si seleccionan de forma aleatoria la semilla ¿de cuántas formas diferentes se puede asignar las 5 semillas en los tres surcos?

En ese sentido, es necesario que los estudiantes combinen las distintas posibilidades que tienen para sembrar las semillas en los 3 surcos, lo cual se puede expresar mediante el diagrama de árbol, así:





Lo anterior nos permite determinar que el agricultor tiene 10 opciones de sembrar las cinco semillas en los tres surcos.

Entonces, para los casos en los que el experimento aleatorio con una población N y una muestra n sin orden ni repetición, se dice que el número de elementos del espacio muestral es la combinatoria de n en N , que matemáticamente se da de la siguiente manera:

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Es así como en el laboratorio 3, se tiene que $N = 5$ y $n = 3$

Si reemplazamos en la fórmula, tenemos que:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$




DESARROLLO
**Aplicar
Analizar**

Momento 3. Aplico y Analizo la Probabilidad en mi Entorno

Clases
5
Duración
60'

¡Para Comenzar!

Este momento está diseñado para guiar a los estudiantes en el desarrollo de habilidades críticas para interpretar y resolver problemas utilizando técnicas específicas de conteo, así como para entender la importancia de la incertidumbre en diversos contextos, por tanto, se abordarán diversos temas que permitan comprender y manejar conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades y su aplicación práctica en la toma de decisiones.



Objetivos de Aprendizaje

- Interpretar enunciados expuestos en las situaciones problemas para determinar las técnicas de conteo.
- Aplicar técnicas de permutación y combinación para resolver problemas aplicados a la probabilidad.



- Demostrar la importancia de la incertidumbre como fuente de información para la toma de decisiones en diferentes contextos.
- Establecer cuándo un evento tiene orden o no para implementar la técnica de conteo acorde entre permutación o combinación.
- Analizar diferentes técnicas para hallar el espacio muestral en un experimento aleatorio determinando la probabilidad de ocurrencia de un suceso.
- Identificar cuándo y cómo utilizar estrategias a partir del cálculo de probabilidad para la toma de decisiones en su entorno.

¡Entremos en Materia!

Con el fin de desarrollar el pensamiento crítico, se hará un primer acercamiento desde la metacognición, que permita evidenciar por medio de una situación problema que la incertidumbre es la fuente de información para la toma de decisiones, por encima de los prejuicios y valores subjetivos en general.



Un representante de una empresa de viajes llega a la I.E. Las Toldas y escoge al estudiante que ocupa el primer puesto en rendimiento académico, entonces, le entrega 3 tarjetas de las cuales solo una tiene los

tiquetes para un viaje con todo pago a San Andrés y le pide que escoja una de las tres, al momento que el joven escoge una tarjeta, el representante elimina otra de las tarjetas que no contiene el premio, quedando dos opciones la que el estudiante escogió y otra tarjeta, a lo que procede a darle la oportunidad de cambiar o mantenerse en la elección previa. Si usted fuera el estudiante ¿cambiaría de tarjeta o se mantendría en la ya elegida?



El docente indicará previamente a sus estudiantes que la decisión que tomen la deberán registrar en su cuaderno, luego, orientará a los estudiantes por medio de un espacio democrático a analizar de forma individual, el porqué de la toma de su decisión, dando respuesta a cada interrogante.



Espacio democrático II

1. ¿Qué decisión tomaría?
2. Si cambia o se mantiene ¿Qué lo lleva a tomar esta decisión?
3. ¿Involucra sentimientos en la decisión?
4. ¿Realizo algún razonamiento matemático para la toma de decisión?
5. ¿Cree que hay una ventaja al cambiar la opción elegida inicialmente?

Este espacio democrático permitirá conocer las diferentes decisiones que toman los estudiantes, se analiza de que depende la decisión y si hay o no sentimientos involucrados en esta decisión, o si se involucra la probabilidad.

Posteriormente, para analizar la toma de decisiones desde la incertidumbre se realizará un laboratorio para registrar en una tabla de frecuencia los resultados de ganar o perder a partir de la decisión cambiar o mantenerse, es decir, desde el cambio de variable que se presenta en el segundo experimento aleatorio.

La Ficción de la certeza

Los estudiantes realizan 100 tarjetas rotuladas con la letra A, otras 100 con la letra B y 100 más con la letra C, con las cuales se arman 100 grupos de tres tarjetas (A, B, y C). El docente marcará aleatoriamente una de las tres tarjetas con una calcomanía que traiga escrito “San Andrés” para indicar que gana el viaje.

Posteriormente, se eligen al azar dos estudiantes quienes harán el rol de participantes, uno siempre cambiará y el otro se mantendrá en su decisión



Este ejercicio práctico, nos permitirá corroborar la paradoja de Monty Hall, la cual nace a partir de la demostración de que la probabilidad de ganar es mayor cuando se cambia la decisión inicial, a pesar de que la mayoría de las personas decidan quedarse en su decisión inicial, ya sea por incidencia psicológica, intuición, confianza, sentimientos, entre otros factores.



Situación Problema III

En clase de geometría el docente Aureliano Buendía lleva dentro de una bolsa unas fichas de color azul y amarillo del mismo tamaño, cada ficha lleva dibujado un sólido platónico (Icosaedro u Octaedro) y los clasifica entre par o impar. Maily quiere analizar detenidamente qué hay en la bolsa, para lo que utiliza la siguiente tabla

Color	Categoría	Sólido platónico	
		Icosaedro	Octaedro
Azul	Par	12	11
	Impar	8	15
Amarillo	Par	16	20
	Impar	10	8

Mario le pregunta al profesor ¿Qué pasa si elijo dos fichas al azar? A lo que Camila le responde que primero se debería saber ¿cuáles son las fichas que tienen la misma probabilidad?

Juan le dice a Camila que una ficha azul con un Icosaedro y una ficha amarilla con un Octaedro, pero Francisco opina que una ficha azul con un Octaedro y una ficha amarilla con un Icosaedro, Carlos dice que ninguno de los compañeros ha tenido en cuenta las categorías y dice que las fichas que tienen la misma probabilidad son una ficha azul de categoría par con un Octaedro y una amarilla con categoría impar con un Icosaedro, a lo que Omaira dice que está equivocado porque él vio la tabla de Maily y en ella observó que la ficha que tiene la misma



probabilidad es en una ficha azul de categoría impar con un Icosaedro y una ficha amarilla de categoría par con un Octaedro.

¿Cuál de los cuatro compañeros tiene la razón?



Espacio democrático III

Para este espacio democrático el docente debe observar la capacidad de los estudiantes para determinar eventos simples que presentan la misma probabilidad a partir de la representación tabular de la información de la tabla de doble entrada

1. ¿Cómo se determina la totalidad de fichas azules que tienen Octaedro?
2. ¿Cómo se determina la totalidad de fichas amarillas que tienen Icosaedro?
3. ¿Cuál es la totalidad de fichas azules que tienen Icosaedro?
4. ¿Cuál es la totalidad de fichas amarillas que tienen Icosaedro?
5. ¿Qué relación tiene la cantidad de fichas azules que tienen Octaedro con las amarillas?
6. ¿Qué relación tiene la cantidad de fichas azules que tienen Icosaedro con las amarillas?
7. ¿Qué relación tiene la cantidad de fichas amarillas que tienen Octaedro con las azules?
8. ¿Qué relación tiene la cantidad de fichas amarillas que tienen Icosaedro con las azules?
9. ¿Se debe tener en cuenta la categoría para saber qué fichas tiene la misma probabilidad?



Para la cosecha de café en mayo, a la finca Thianka acuden seis de los mejores recolectores del grano y beneficiado. Los recolectores fueron Branquey, Daniel, Camilo, Alejandro, Miguel y Jeison.

Si el equipo de recolectores está formado por parejas, ¿cuál es la probabilidad de la pareja elegida sea Miguel y Jeison? ¿cuál es la probabilidad de que Camilo sea elegido?



Espacio democrático IV

1. ¿Cómo encontrar el número de elementos del espacio muestral?
2. ¿Importa el orden en la elección de los recolectores?
3. ¿Hay repetición en la elección de los recolectores?
4. ¿Cuál es la población en este experimento aleatorio?
5. ¿Cuál es la muestra en este experimento aleatorio?
6. ¿Qué técnica de conteo debo utilizar?



Situación Problema V

Los estudiantes del grado Noveno Karla y Andrés juegan a lanzar un dado al aire y quien saque el número seis gana, de lo contrario pierde. Mientras juegan, algunos de sus

compañeros opinan lo siguiente:

- Thiago afirma que hay más posibilidades de que Karla gane a que obtenga un número par al lanzar el dado.
- Nicolás dice que hay más posibilidad de que Karla pierda a que gane.
- Samuel argumenta que hay menos posibilidades de que Karla pierda a que obtenga un número impar al lanzar el dado.
- Leandra opina que hay menos posibilidades de que Karla pierda a que gane.

¿Quién de los compañeros opinó acertadamente?





Espacio democrático V

- ¿Cuál es la probabilidad de que Karla gane?
- ¿Qué concepto matemático aplicas para calcular la probabilidad?
- ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?
- ¿Quién de los compañeros tiene la razón?
- ¿Qué concepto matemático aplicas para calcular la probabilidad?



Situación Problema VI

El director del grado Noveno quiere distribuir hombres y mujeres en las cinco filas que se encuentran en el salón con el objetivo de que los hombres no fomenten indisciplina en las clases, para eso propone que 5 hombres y 4 mujeres se sienten en una fila de 9 sillas. ¿Cuál es la probabilidad de que las mujeres ocupen los lugares pares?



Espacio democrático VI

1. ¿Cuál es la población en este experimento aleatorio?
2. ¿Cuál es la muestra en este experimento aleatorio?
3. ¿Hay repetición en la elección de los estudiantes?
4. ¿Importa el orden en la elección de los estudiantes?
5. ¿Qué técnica de conteo debo utilizar?



Situación Problema VII

El grado Noveno quiere hacer un compartir entre sus compañeros, entonces, se propone hacer una hamburguesa, Mónica propone llevar pan centeno, con orégano y con ajonjolí; carne de res y pollo; quesos de doble crema, campesino y mozzarella. Mateo quiere saber ¿Cuál es la



probabilidad de que le salga una hamburguesa con pan centeno, carne de res y queso doble crema?



Espacio democrático VII

1. ¿Cuál es la población en este experimento aleatorio?
2. ¿Cuál es la muestra en este experimento aleatorio?
3. ¿Hay repetición en la elección de los ingredientes?
4. ¿Importa el orden en la elección de los ingredientes?
5. ¿Qué técnica de conteo debo utilizar?



Situación Problema VIII

El grado Noveno quiere hacer la despedida viajando al parque natural del Amazonas, Sofía averigua por medio de una agencia de turismo que para viajar al parque hay tres tramos, por aire, por tierra y por agua. En avión, hay dos opciones de vuelo, en la

mañana y en la tarde, de forma terrestre se puede hacer por autobús, Aerovan o Automóvil, finalmente, ofrece por agua dos opciones, en lancha sin motor o con motor.

¿Cuál es la probabilidad de que los estudiantes elijan el paquete de viaje al parque que tenga el tramo del vuelo en la mañana, luego en automóvil y finalmente, en lancha sin motor?



Espacio democrático VIII

1. ¿Cuál es la población en este experimento aleatorio?
2. ¿Cuál es la muestra en este experimento aleatorio?



3. ¿Hay repetición en la elección de los tramos?
4. ¿Importa el orden en la elección de los tramos?
5. ¿Qué técnica de conteo debo utilizar?



Para las siguientes situaciones problema el docente les dirá a sus estudiantes que tomen el diseño del espacio democrático para encontrar una serie de pasos que les permita desagregar y generar un camino con el cual encuentren la respuesta de cada evento aleatorio.



Situación Problema IX

Continuando con la travesía del grado Noveno, ahora enfrentan el dilema de subirse a una lancha sin motor el grupo de dos decenas de amigos, debido a que el capitán les informa que el cupo por lancha es de 18 pasajeros, y para equilibrar el peso de la lancha y no hundirse deben subir 8 hombres y 10 mujeres, el capitán solo tiene 8 cupos en la lancha, por lo tanto, puede elegir 8 estudiantes de la excursión de Noveno y eso significa que se van a separar.

- ¿Cuántas maneras hay de elegir a los 8?
- ¿Cuál es la probabilidad de que los elegidos sean solo hombres?
- ¿Cuál es la probabilidad de que los elegidos sean 3 hombres y 5 mujeres?



Una vez en la lancha de motor se encuentran dieciocho personas entre estudiantes y otros turistas y todos intercambian saludos de mano. ¿Cuántos saludos intercambiaron en total los pasajeros?



Una vez llegan al parque los reciben con un juego, en donde le piden a un estudiante de la excursión que forme un número de dos cifras con cuatro tarjetas que tienen respectivamente los números 2,4, 6 y 8, con el objetivo de asignar los números de las habitaciones.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante forme un número par?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante forme un número impar?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante forme un número con el dígito 8 en el valor posicional de las decenas?



CIERRE



Evaluar
Crear

Momento 4. Evaluar para Comprobar

Clases



Duración



¡Para Comenzar!

Además, animaremos a los estudiantes a identificar situaciones cotidianas donde la probabilidad sea relevante, promoviendo así su aplicación práctica en sus vidas. Es momento de saber cómo se aprende a aprender, es por eso que el estudiante deberá responder siete preguntas que le permitirán aclarar e identificar las falencias que se deben superar antes de aplicar la probabilidad en los diferentes contextos científicos, tecnológicos, agrícolas, entre otros, con la finalidad de evidenciar la aplicabilidad de la incertidumbre en la toma de decisiones mediante diferentes contextos de la vida real, entonces, justificar la probabilidad de un evento a partir del espacio muestral y el subconjunto correspondiente.

¡Resuelve las siguientes preguntas!

- a. ¿Podrían dar un ejemplo donde se aplique la probabilidad?
- b. ¿En qué criterios se basan para fundamentar esa respuestas?
- c. ¿Cuáles serían las consecuencias de llevar eso a la vida real?
- d. ¿Qué han aprendido hasta el momento?



- e. ¿Cuáles son las dificultades que han detectado?
- f. ¿Cómo solucionaríamos esas dificultades?
- g. ¿En qué otras situaciones de la vida real pueden aplicar lo aprendido?



Objetivos de Aprendizaje

- Justificar la probabilidad de un evento a partir del espacio muestral y el subconjunto correspondiente de un evento.
- Evaluar la aplicabilidad de la incertidumbre en la toma de decisiones por medio de diferentes contextos de la vida real.
- Comparar la aplicabilidad de la probabilidad en los diferentes contextos científicos, tecnológicos, agrícolas, entre otros.
- Evaluar soluciones a problemas en donde se aplique la probabilidad, juzgando su efectividad y predicción mediante las técnicas de conteo.
- Considerar la aplicabilidad de la probabilidad en contexto de la vida real de los estudiantes.

¡Entremos en Materia!

Activa tus conocimientos: Resuelve las siguientes Situaciones Problema

Activa tus conocimientos, es una sección dentro de la evaluación que busca disminuir el miedo y la frustración que se genera en el estudiante al momento de enfrentarse a ella. Se pretende concebir una evaluación desde lo político, es decir, como comprensión y búsqueda del bien común entre pares, esclareciendo el propósito social de las matemáticas escolares.





La I.E. Las Toldas con el objetivo de brindar oportunidades a sus estudiantes para continuar con sus estudios crea un convenio con la Universidad Sur colombiana donde se brindan tres becas. Este año, Thiago, Mayerly, Yaderi y Juan fueron seleccionados para otorgarles la beca en la facultad de ingeniería.

- ¿Cuántos grupo distintos es posible formar para seleccionar los tres estudiantes?
- Escribe todo el espacio muestral.
- ¿Cuál es la probabilidad que tiene Thiago para estudiar una ingeniería becado?



El director del grado Noveno decide hacer un juego para fomentar la unión entre compañeros, donde se requiere acomodar en una fila de 11 sillas 5 mujeres y 6 hombres, las estudiantes deben ocupar los lugares pares y los 6 estudiantes los impares. ¿Cuántas formas diferentes hay para acomodar a los 11 estudiantes?

Los estudiantes del grado Noveno deciden celebrar una fiesta por el final de su etapa escolar en secundaria, para recolectar los fondos deciden rifar un TV, una nevera y un bafle entre 80 padres de familia. ¿De cuantas maneras distintas pueden repartirse los tres electrodomésticos si solo se puede ganar un premio por persona?





Para la semifinal de fútbol femenino, las estudiantes del grado Noveno van a los octavos de final. Si para definir los cuatro equipos que pasarán a la final, las estudiantes deberán enfrentarse a los 7 equipos solo una vez. ¿Cuántas formas hay para organizar los partidos de la semifinal?

Los estudiantes del grado Noveno quieren reunirse el día del grado, por lo que han planeado una cena de despedida en un restaurante que tiene mesas en forma circular donde caben 7 comensales por mesa. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 7 estudiantes en una mesa?



Rompiendo con la estratificación



Objetivo: Determinar si un tipo de dieta específica afecta el aumento de peso en ganado vacuno mediante una asignación aleatoria de los animales en dos grupos experimentales.

Paso 1. Dependiendo de sus habilidades los estudiantes asignan su rol para desarrollar el laboratorio.

Paso 2. El Líder deberá responder a las preguntas:

- ¿Por qué es importante que la separación del ganado en dos grupos sea completamente aleatoria?
- ¿Qué problemas podrían surgir si no lo es?



Paso 3. El Modulador deberá fomentar la discusión entre los miembros del equipo, asegurando que todos participen en relación a las respuestas del paso anterior.

Paso 4. La explicación del contexto se realizará por medio de una investigación documental, con la cual se aclare:

- c. ¿Qué es un experimento científico?
- d. ¿Qué sucede si hay sesgos en la investigación?

Paso 5. El Líder hace las siguientes preguntas a su grupo:

- e. ¿Cómo se podría asegurar que la separación del ganado ocurra aleatoriamente para conformar dos grupos?
- f. ¿Qué métodos se les ocurre?

Paso 6. El Revisor debe evaluar las respuestas del paso anterior y determinar cuál es la acertada para el desarrollo adecuado del laboratorio y propone el instrumento para su ejecución.

Paso 7. El Líder deberá explorar con su grupo la implementación de lo propuesto por el Revisor en el paso anterior por medio de la pregunta, mientras el Minutero deberá controlar el tiempo durante la discusión para asegurar su enfoque:

- g. ¿cómo asegurar de que cada animal tenga la misma probabilidad de ser asignado a cualquiera de los dos grupos?
- h. ¿Qué materiales y recursos necesitamos para realizar esta separación aleatoria?
- i. ¿Cómo llevar a cabo el proceso de separación aleatoria del ganado paso a paso?

Paso 8. Una vez se haya separado el ganado en dos grupo, el Líder realiza las preguntas y el Revisor compara las características iniciales del ganado en ambos grupos para verificar la equivalencia:



- j. ¿Cómo verificar que la separación fue realmente aleatoria?
- k. ¿Qué acciones tomar si a pesar de usar un método aleatorio, los dos grupos no son equivalentes en alguna característica clave?

Paso 9. Finalmente, para la reflexión y discusión se deben responder a las preguntas:

- l. ¿Qué se aprendió sobre la importancia del uso de métodos aleatorios en la asignación de sujetos a grupos en un experimento?
- m. ¿Cómo aplicar los principios de asignación aleatoria en otros tipos de experimentos o situaciones donde se pretende comparar grupos?

Momento 5. Crear desde lo Aprendido



¡Para Comenzar!

Los estudiantes aprenderán a formular problemas relevantes, diseñar estrategias para calcular probabilidades y adaptar estos conocimientos a situaciones del ámbito familiar, escolar y/o comunitario, para demostrar cómo la probabilidad puede guiar decisiones informadas en distintos escenarios.





Objetivos de Aprendizaje

- Proponer problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
- Diseñar estrategias que permitan encontrar el número de posibles resultados de un experimento aleatorio para la toma de decisiones a partir del cálculo de la probabilidad del evento.
- Adaptar conocimientos probabilísticos en contextos familiares, laborales, escolares o comunitarios identificando su aplicación en situaciones reales y cotidianas.
- Experimentar mediante casos del contexto rural las decisiones que se deben tomar a partir de la recolección y el análisis de datos.

¡Entremos en Materia!

Si has llegado hasta este apartado, es porque ya comprendiste que la probabilidad genera mucho interés en diferentes ámbitos como el de la medicina, donde evaluar la probabilidad a partir de la toma de decisiones como la de lanzar una campaña de vacunación masiva, hasta el control de calidad en un cultivo o industria, donde en ocasiones se debe decidir sobre la calidad de un gran conjunto de frutas o piezas basándose sólo en la inspección de unas pocas unidades (muestra).

En ese orden de ideas, se debe implementar lo visto hasta el momento en situaciones del contexto como la organización de un campeonato deportivo, la lista de música en una izada de bandera, el menú en la cena de despedida del grado Noveno, la creación de un horario de estudio para las pruebas SABER, la selección del consejo estudiantil, organización de la feria matemática, entre otras (elección del estudiante).





Para la realización de la fase final, los estudiantes deberán responder a la pregunta ¿Cómo se pueden crear equipos de manera eficiente y equitativa para la actividad final, considerando las habilidades, fortalezas y roles de cada miembro para asegurar un trabajo colaborativo y exitoso? donde cada uno debe asumir una tarea específica como Líder, Minutero, Secretario, Modulador o Revisor

¡Comienza el Reto!



¿Cuáles son mis habilidades? y ¿Desde qué rol puedo contribuir a mi grupo de trabajo?

Los estudiantes deberán responder a las primeras preguntas por medio de la distribución de habilidades, de tal manera que cada estudiante diseña una ficha con las mismas dimensiones donde describa sus habilidades y fortalezas. Seguidamente, se explica cada rol disponible y las responsabilidad que conlleva cada uno, de esta manera se socializa cuál se adapta mejor a las habilidades descritas en el paso anterior.



¿Dónde está el cálculo de combinaciones?

El Revisor hace un breve recuento del concepto de combinación y permutación, ahora, los estudiantes dan respuesta a:

1. ¿cuántas combinaciones diferentes de equipos de 5 miembros se pueden formar con el número total de estudiantes en clase?



2. ¿cómo nos ayuda este cálculo a entender la diversidad de equipos que podemos formar?



¿Cómo formar un equipo de trabajo?

Para la creación del equipo de trabajo, los estudiantes usan las combinaciones encontradas en la etapa anterior para formar el grupo de trabajo respondiendo a las preguntas

1. ¿Qué criterios se deben usar para elegir a los miembros del equipo?
2. ¿Cómo se complementan las habilidades de cada uno?

Para la asignación de roles, dentro de cada equipo, se basarán en las habilidades y preferencias discutidas anteriormente, para lo cual, las siguientes preguntas ayudarán:

1. ¿Cómo se asignaron los roles en tu equipo?
2. ¿Cómo contribuye esto a un trabajo colaborativo?



¿Para dónde vamos?

Ahora los estudiantes deberán seleccionar o definir una actividad para trabajar en grupo y entregar los resultados.

¿Qué se aprendió sobre la importancia de asignar roles y utilizar habilidades específicas en un equipo?

¿Cómo están utilizando las habilidades y roles asignados para resolver el problema matemático?



¡Para Finalizar!

Selecciona la Actividad (opcional)

1 Identifica y elige una situación familiar o escolar, planteo una pregunta de investigación, donde sea posible adaptar los conocimientos probabilísticos y diseñe un laboratorio para responder, haciendo uso de lo visto en el transcurso de la unidad.

2 A partir de la fuente de información que prefiera, proponga un problema y seleccione información relevante que provenga de la fuente, luego implemente lo aprendido y utilice el espacio democrático como herramienta fundamental para solucionar la situación.



Referencias

Cruz, A. 2018. *Unidad Didáctica: Enseñanza de la Probabilidad por Medio de la Resolución de Problemas*.

Grima, P. 2010. La certeza absoluta y otras ficciones. Los secretos de la estadística

Federación Nacional de cafeteros. (2015). *Matemáticas Grado 9º Escuela y Café*

https://issuu.com/ingeniointeractivo/docs/ec_mat_libro_grado_9_sin_lineas_color

Ministerio de Educación Nacional. (2006) *Estándares Básicos de Competencias*

en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.
https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN (2010). *Matemáticas Postprimaria Noveno*.
https://contenidos.mineducacion.gov.co/ntg/men/archivos/Referentes_Calidad/Modelos_Flexibles/Postprimaria/Guias%20del%20estudiante/Matematicas/MT_Grado9.pdf

Montealegre Cárdenas, M. (2006). *Enfoque Sistemático de las Matemáticas Escolares*. Bogotá: Guadalupe Ltda.

Restrepo, J. (2006). *Educación en el atraso social*. Planeta Colombiana.

Salcedo, R. (2018). *Unidad didáctica para la enseñanza de probabilidad mediada por un ova, orientada a un colegio rural del municipio de Paipa*.

<https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/handle/001/2330/TGT-974.pdf;jsessionid=6D9DB19C14438DA9FCC8A81342E052E1?sequence=1>

