

Estudio del cinturón de asteroides a través de la ciencia de datos

Jean Carlos Paredes Benavides

William Camilo Mendieta Parra

Asesor

Nidia Danigza Lugo López

Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD

Escuela de ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería ECBTI

Especialización en Ciencia de Datos y Analítica

2024

Dedicatoria

A nuestras familias, por su amor incondicional y apoyo constante. A nuestros amigos, por su motivación en cada paso del camino. Y a nuestros profesores, por guiarnos y compartir su sabiduría, inspirándonos a alcanzar nuestras metas. Este logro es el reflejo de su confianza y esfuerzo.

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a la Universidad Nacional Abierta y a Distancia por brindarnos la oportunidad de formarnos en un entorno académico de excelencia.

Agradecemos a nuestros profesores, cuya dedicación y compromiso nos ha motivado a alcanzar nuestras metas y a desarrollar nuestro potencial.

Finalmente agradecemos a nuestros compañeros de clase por su colaboración y apoyo durante este proceso. Cada intercambio de ideas ha enriquecido nuestra experiencia educativa.

Resumen

El estudio de las órbitas de los cuerpos celestes es fundamental tanto a nivel científico como práctico, ya que permite comprender la dinámica del sistema solar y prever posibles riesgos asociados a objetos cercanos a la Tierra. Este trabajo se centra en el cálculo de los elementos orbitales de un cuerpo del Cinturón de Asteroides, utilizando el método de Gauss y técnicas vectoriales para derivar parámetros clave como el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación, a partir de observaciones astronómicas de ascensión recta (RA) y declinación (Dec).

A partir de estos cálculos, se emplearon librerías como Astropy y Poliastro para la visualización tridimensional de las órbitas, lo que permitió comparar gráficamente los resultados obtenidos con las trayectorias de referencia generadas por el sistema JPL Horizons. Además, se aplicó la prueba de Chi-cuadrado como métrica estadística para evaluar la precisión de los modelos, comparando el ajuste de los resultados obtenidos mediante el método de Gauss y el Método de Vectores.

Los resultados muestran que, si bien el Método de Vectores ofrece un ajuste más preciso a los datos de referencia (con valores de Chi-cuadrado más bajos), el método de Gauss sigue siendo una herramienta crucial debido a su enfoque iterativo y su capacidad para manejar datos observacionales limitados. Este estudio destaca la importancia de contar con modelos precisos para predecir la dinámica de objetos en el Cinturón de Asteroides, ya que interacciones gravitacionales podrían desviar sus trayectorias hacia órbitas cercanas a la Tierra. La integración de conceptos físicos y matemáticos con herramientas de ciencia de datos subraya la relevancia de enfoques interdisciplinarios para mejorar la comprensión y la predicción del movimiento orbital en el espacio.

Palabras clave: Método de Gauss, vectores, Chi-cuadrado, elementos orbitales, cinturón de asteroides.

Abstract

The study of celestial body orbits is essential for both scientific and practical purposes, providing insights into the dynamics of the Solar system and helping to predict potential risks from near-Earth objects. This work focuses on calculating the orbital elements of an asteroid belt object using Gauss's method and vector-based techniques to derive key parameters such as semi-major axis, eccentricity, and inclination from astronomical observations of right ascension (RA) and declination (Dec).

These calculations were complemented with specialized libraries like Astropy and Poliastro to generate 3D visualizations of the orbits, enabling graphical comparisons between the computed trajectories and reference orbits provided by the JPL Horizons system. Additionally, the Chi-squared test was employed as a statistical metric to assess the accuracy of the orbital models, comparing the performance of Gauss's method with the Vector Method.

Results indicate that, while the Vector Method achieves a closer fit to the reference data (as shown by lower Chi-squared values), Gauss's method remains a valuable tool due to its iterative approach and ability to handle limited observational data. This study highlights the importance of precise modeling for predicting the dynamics of asteroid belt objects, as gravitational interactions could alter their trajectories toward near-Earth orbits. Integrating physical and mathematical concepts with data science tools underscores the relevance of interdisciplinary approaches to improving the understanding and prediction of orbital motion in space.

Keywords: Gauss's method, vectors, Chi-squared test, orbital elements, asteroid belt.

Tabla de Contenido

Introducción	12
Justificación	14
Objetivos.....	16
Objetivo General.....	16
Objetivos Específicos.....	16
Planteamiento del Problema	17
Pregunta de Investigación	18
Marco Conceptual.....	19
Cinturón de Asteroides.....	19
Objetos Menores	19
Órbitas Planetarias	20
Objeto 2 Pallas (A802 FA).....	21
Elementos Orbitales.....	22
Fecha Juliana.....	24
Método de Gauss para el Cálculo de Órbitas	25
Datos Iniciales	26
Pasos del Método de Gauss.....	26
Cálculo de los Intervalos de Tiempo.	26
Producto Cruzado de los Vectores de Dirección.....	26
Producto Escalar Triple.	26
Cálculo de las Cantidades Escalares.....	26
Cálculo de los Coeficientes de Posición Escalar	27

Cálculo de la Distancia Escalar Cuadrada de la Segunda Observación.	27
Resolución del Polinomio.....	27
Cálculo de las Distancias de las otras Observaciones.	27
Coordenadas Ecuatoriales.....	28
Ascensión Recta (RA).....	28
Declinación (DEC).....	28
Método de Vectores.....	28
Vectores de Posición y Velocidad en Órbitas	29
Prueba de Chi Cuadrado (χ^2).....	30
Fórmula del Estadístico Chi Cuadrado.....	30
Ventajas de la Prueba de Chi Cuadrado en el Análisis de Órbitas	31
Metodología.....	32
Comprensión del Problema.....	32
Comprensión de los Datos	33
Método basado en Observaciones (Fecha, RA y Dec)	33
Método Basado en Vectores de Posición y Velocidad.....	33
Método Basado en Elementos Orbitales	34
Preparación de los Datos.....	34
Modelado.....	35
Evaluación.....	36
Resultados.....	38
Implementación de la Prueba de Chi-Cuadrado.....	43
Discusión de Resultados	45

Método de Gauss.....	45
Método de Vectores.....	47
Análisis de la Prueba de Chi-Cuadrado	48
Recomendaciones y Mejoras a Futuro	50
Conclusiones.....	53
Referencias.....	55

Lista de Tablas

Tabla 1 <i>Datos de Observación de Pallas (A802 FA)</i>	33
Tabla 2 <i>Datos de Vectores de Posición y Velocidad de Palas (A802 FA)</i>	34
Tabla 3 <i>Elementos Orbitales Método de Vectores y Valores de Referencia - 2 Pallas (A802 FA)</i>	39
Tabla 4 <i>Valores de Chi-cuadrado</i>	44

Lista de Figuras

Figura 1 <i>Objetos Menores</i>	20
Figura 2 <i>Orbitas Planetarias</i>	21
Figura 3 <i>Asteroide Pallas</i>	22
Figura 4 <i>Elementos Orbitales</i>	23
Figura 5 <i>Orbita en 3D - Gauss</i>	40
Figura 6 <i>Orbita Heliocéntrica en 3D - Vectores</i>	41
Figura 7 <i>Comparación de Orbitas en 3D</i>	42

Introducción

El Cinturón de Asteroides es una región del sistema solar que se encuentra ubicada entre las órbitas de Marte y Júpiter, allí es donde se encuentra la mayor concentración de asteroides. Estos objetos son fragmentos rocosos y metálicos que no lograron agruparse para formar un planeta, debido a las fuerzas gravitatorias de Júpiter. El cinturón tiene un ancho que se extiende aproximadamente entre 2.1 y 3.3 unidades astronómicas del SOL, Mujica (2021).

Entender el movimiento de estos objetos celestes mediante la implementación de métodos que permitan calcular con precisión las órbitas, usando datos observacionales es importante no solo para tener una mejor comprensión de su dinámica en el espacio y de las fuerzas que afectan estos cuerpos que orbitan el SOL, sino que puede ser una potencial herramienta que sea capaz de prever riesgos de impactos sobre la Tierra que amenacen la vida como lo señala, Murcia (2022). De esta forma se podrán crear estrategias de mitigación para evitarlas.

De acuerdo con Peng y Bai (2019), los enfoques actuales para la predicción de órbitas utilizan principalmente algunos modelos analíticos basados en la física. La precisión en la predicción de la órbita depende de un buen conocimiento del entorno y de las condiciones iniciales de los objetos en movimiento. En este trabajo se emplearon datos obtenidos del sistema Horizons del Jet Propulsion Laboratory (JPL) de la NASA (NASA, s.f.), los cuales incluyen observaciones con fecha juliana, ascensión recta (RA) y declinación (Dec), así como vectores de posición y velocidad, y elementos orbitales aproximados. A partir de estos datos, se espera realizar un análisis de órbitas utilizando el método de Gauss para mejorar la precisión de la predicción orbital, Saiz (2022).

Para estas simulaciones, se utilizó Python y librerías especializadas como Poliastro, que permite modelar y analizar órbitas en un entorno computacional eficiente. Adicionalmente, se implementó un análisis estadístico utilizando el modelo de chi cuadrado para evaluar la bondad de ajuste de las órbitas simuladas en relación con los datos observacionales. Este enfoque permitió identificar discrepancias y validar la precisión de los modelos generados frente a los métodos tradicionales, (Price-Whelan & Sipőcz, 2018).

El presente trabajo se alinea con la necesidad de combinar herramientas computacionales modernas y fundamentos clásicos de la mecánica celeste para explorar y comprender las dinámicas orbitales de los cuerpos del Cinturón de Asteroides. Se espera que los resultados obtenidos contribuyan al entendimiento de esta región del sistema Solar y a su vez, mejoren las metodologías actuales de modelización orbital.

Justificación

Este trabajo se fundamenta en el objetivo de adquirir un mayor entendimiento de la mecánica que dirige el movimiento de los objetos en el espacio, en el que se hace un estudio a profundidad del Cinturón de Asteroides, aplicando los conceptos y leyes físicas que describen el comportamiento de dichos objetos. La astronomía históricamente ha despertado la curiosidad de la humanidad y su comprensión resulta ser fundamental, siendo esta ciencia un foco para el desarrollo del pensamiento crítico, el análisis, la observación y la interpretación de fenómenos, Murcia (2022).

El estudio del Cinturón de Asteroides es importante para comprender la formación y evolución del sistema Solar, así como para investigar la composición y la dinámica de los cuerpos helados que lo componen. También se cree que los objetos en el cinturón pueden ser reliquias de la materia primordial que formó el sistema solar, proporcionando valiosa información sobre su historia temprana.

Además de su importancia para entender el universo, la investigación de los asteroides impacta directamente en la seguridad de nuestro planeta. Aunque normalmente estables, los asteroides en el cinturón pueden ser alterados por interacciones gravitacionales con planetas cercanos, especialmente Júpiter, y desviarse hacia trayectorias que los acercan peligrosamente a la Tierra. Un informe de la NASA (2022) subraya que el seguimiento y análisis de asteroides potencialmente peligrosos es esencial para desarrollar estrategias de mitigación ante posibles impactos. En este contexto, los modelos predictivos basados en la ciencia de datos y el aprendizaje automático mejoran la precisión en la identificación y monitoreo de estos objetos, facilitando la planificación temprana de medidas de prevención y defensa planetaria.

Una vez se tiene el dominio de estos conceptos teóricos sobre los movimientos orbitales y su aplicación en modelos basados en datos enteramente físicos que permiten modelar la predicción del movimiento de cuerpos menores, se plantea encontrar a través de conceptos del análisis de datos, alternativas que permitan tener una mayor precisión en el cálculo y predicción de las orbitas, Diaz (2011).

Este campo científico es ideal para desarrollar herramientas de aprendizaje, que mediante métodos estadísticos aprende a reconocer datos según patrones y que, por los grandes volúmenes de información que se tienen, se vuelve una herramienta óptima para desarrollar estos modelos. Según Smullen y Volk (2020), los astrónomos han ido adoptando metodologías de aprendizaje más variadas y sofisticadas para utilizar todo el espectro de información contenida tanto en las observaciones como en las simulaciones.

En Sabates (2022) se muestran cómo se utilizaron más de 4 millones de fuentes astronómicas, para entrenar un conjunto de modelos, seleccionados con un programa de benchmarking. Esto se realizó para identificar el mejor clasificador básico de fuentes astronómicas para futuras observaciones. Otras propuestas que se muestran con el fin mejorar la precisión en estas predicciones tienen un enfoque de Machine Learning introduciendo procesos Gaussianos, que pueden generar información de incertidumbre sobre su estimación puntual. Según Peng y Bai (2019) los resultados numéricos de un modelo Gaussiano entrenado pueden mejorar eficazmente la precisión de la predicción orbital.

Objetivos

Objetivo General

Evaluar el movimiento orbital de objetos en el Cinturón de Asteroides mediante la integración de conceptos físicos, matemáticos y herramientas de ciencia de datos, con el fin de desarrollar modelos predictivos precisos.

Objetivos Específicos

Identificar las variables físicas y matemáticas que afectan el movimiento orbital de cuerpos menores en el Cinturón de Asteroides, basándose en observaciones astronómicas.

Implementar el método de Gauss y técnicas de análisis vectorial para el cálculo de elementos orbitales.

Validar la precisión de los modelos orbitales mediante análisis estadísticos, empleando la prueba de chi-cuadrado como métrica comparativa.

Planteamiento del Problema

El estudio del movimiento de cuerpos celestes en el Cinturón de Asteroides plantea dos principales problemáticas. El cinturón está en una región del sistema Solar que se encuentra más allá de la órbita de Marte y contiene una gran cantidad de cuerpos helados de tamaño reducido, incluido un planeta enano, Ceres. Este fue clasificado como planeta enano desde 2006 por la Unión Astronómica Internacional, su estudio ha sido clave para entender tanto la formación del sistema Solar como las condiciones que pueden haber llevado al desarrollo de la vida, Mujica (2021).

La primera problemática radica en la limitada comprensión y enseñanza de las leyes físicas que rigen el movimiento de estos objetos celestes. Según Murcia (2022), la enseñanza de las matemáticas utilizadas para demostrar las leyes de Newton y Kepler ha estado históricamente desconectada de su aplicación práctica en la modelización del movimiento de cuerpos. Esta desconexión dificulta la comprensión de la dinámica orbital y limita la capacidad de vincular los modelos teóricos con observaciones reales.

En segundo lugar, los modelos actuales para predecir el movimiento orbital de estos cuerpos, aunque útiles, presentan limitaciones en cuanto a precisión y adaptabilidad. Según Peng y Bai (2021), estos modelos se basan principalmente en enfoques físicos tradicionales que, si bien aportan información valiosa, pueden ser insuficientes para entornos con condiciones variables y dinámicas complejas. Esto se traduce en predicciones que no siempre son lo suficientemente precisas para estudios avanzados o aplicaciones específicas.

En este contexto, el presente trabajo aborda estas problemáticas mediante un enfoque basado en simulaciones y análisis estadístico. Según (Moraño, 2021) se utilizan tres metodologías principales: (1) el método de Gauss para calcular elementos orbitales a partir de

observaciones astronómicas, como el día juliano, ascensión recta y declinación; (2) el cálculo de órbitas utilizando vectores de posición y velocidad proporcionados por observaciones directas; y (3) la comparación de los resultados obtenidos con una órbita ideal predefinida. Estas simulaciones, realizadas en Python con el apoyo de librerías especializadas como Poliastro, son evaluadas estadísticamente mediante el modelo de chi cuadrado para determinar su precisión y confiabilidad, Cano (2021).

Este trabajo tiene como objetivo no solo mejorar la comprensión de la dinámica de los cuerpos celestes en el Cinturón de Asteroides, sino también optimizar las predicciones orbitales mediante un enfoque matemático-estadístico riguroso, contribuyendo al desarrollo de métodos más precisos y eficaces que los modelos actuales basados exclusivamente en la mecánica clásica. Una de las principales aplicaciones de lograr la optimización de los métodos para el cálculo de órbitas, es la detección temprana de posibles impactos de estos asteroides, ya que existen las diferentes variables que puedan ocasionar desvíos de sus órbitas regulares, generando un riesgo de aproximación con la tierra. Murcia (2022).

Pregunta de Investigación

¿Qué características deben tener los métodos y herramientas de modelado orbital para calcular con mayor precisión las órbitas de los cuerpos celestes en el Cinturón de Asteroides evaluando estadísticamente dichas simulaciones en comparación con una órbita ideal?

Marco Conceptual

Cinturón de Asteroides

El Cinturón de Asteroides es un disco circunestelar del sistema Solar que se encuentra entre las órbitas de Marte y Júpiter. Está compuesto por una multitud de objetos celestes que tienen formas irregulares y que se les denomina como asteroides. Esta zona del espacio interestelar también se le define como cinturón principal, para diferenciarlo de otras agrupaciones que existen en el espacio. Candia (2020) afirma que más de la mitad de la masa que contiene este cinturón es contenido en unos pocos objetos de mayor tamaño. Estos son: Ceres, Palas, Vesta, Higia y Juno. Ceres, el más masivo de todos y el único planeta enano del cinturón, tiene un diámetro de 950 km.

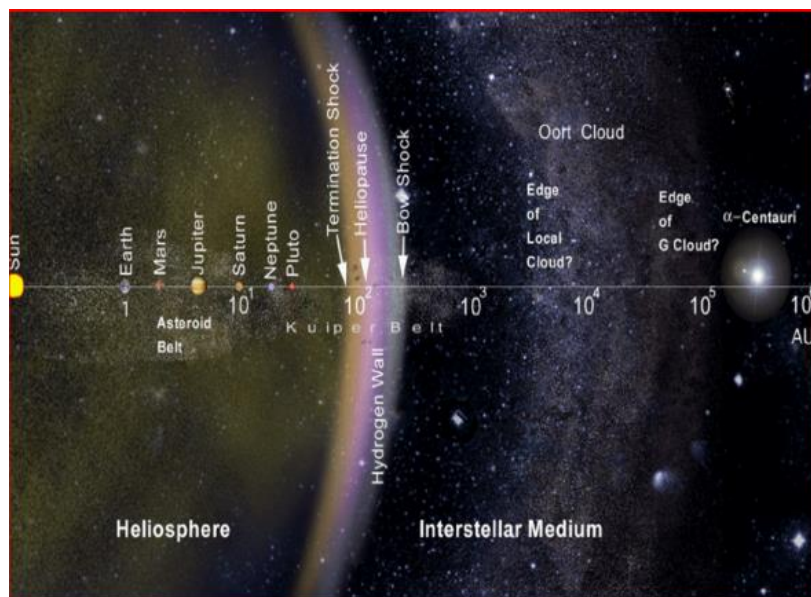
El Cinturón de Asteroides se formó en la nebulosa protosolar junto con el resto del sistema. Los fragmentos de material que se encontraban en esta región del cinturón habrían podido formar un planeta, pero las perturbaciones gravitacionales de Júpiter ocasionaron que estos elementos colisionaran entre sí y no lograran agruparse, lo que ha dado como resultado, los residuos de rocas que se pueden observar en la actualidad, Candia (2020).

Objetos Menores

Se trata de cuerpos celestes que orbitan alrededor del SOL, pero no cumplen con la definición de planetas o planetas enanos. Actualmente, esta categoría incluye todos los asteroides del Sistema Solar excepto Ceres (clasificado como un planeta enano), los Centauros, la mayoría de los objetos transneptunianos y los cometas. Algunos de los cuerpos más grandes del Sistema Solar, como los asteroides Palas, Vesta e Higeia, así como varios de los objetos transneptunianos más grandes, se encuentran principalmente en el cinturón de Kuiper y la nube de Oort., revisar (cuerpos menores, s/f).

Figura 1

Objetos Menores



Nota. Tomado de Diaz (2011).

Órbitas Planetarias

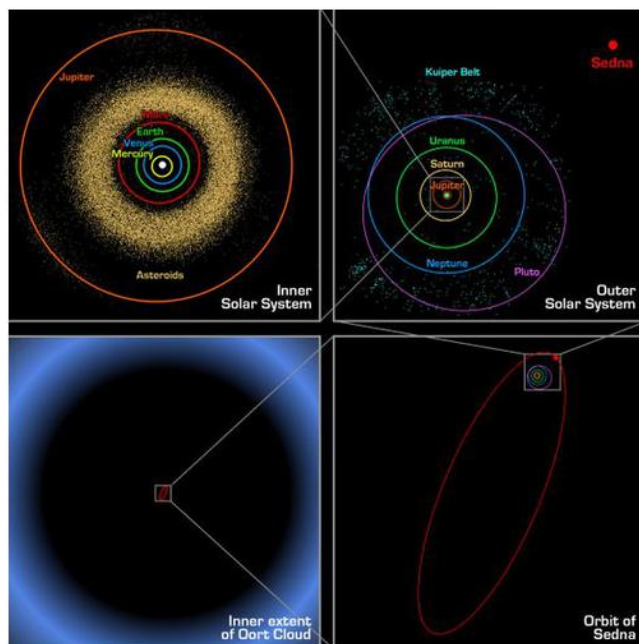
Como lo menciona Kepler en su obra *Astronomía Nova* (1609), Kepler descubrió que las órbitas planetarias no son perfectamente circulares, sino que tienen una ligera forma elíptica, con el SOL ubicado en uno de los focos de la elipse. Durante su estudio del sistema Solar, Kepler descubrió una conexión esencial entre el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa alrededor del SOL (su período orbital) y la distancia que lo separa del SOL. Esta relación posibilitaba a los astrónomos, incluso sin utilizar telescopios modernos, calcular las distancias a otros planetas dentro del sistema Solar, si se conocía su período orbital.

La siguiente figura ilustra las proporciones de tamaño relativo entre las órbitas de los planetas, así como el Cinturones de Asteroides y Cinturón de Kuiper. A medida que nos alejamos del SOL, aumenta la distancia entre las órbitas de un planeta y el siguiente.

Se ilustran las relaciones de tamaño entre las órbitas de los planetas en el sistema Solar. En la esquina superior izquierda se sitúan el sistema Solar interior y el Cinturón de Asteroides, mientras que en la esquina superior derecha se exhiben los planetas exteriores y el Cinturón de Kuiper.

Figura 2

Orbitas Planetarias



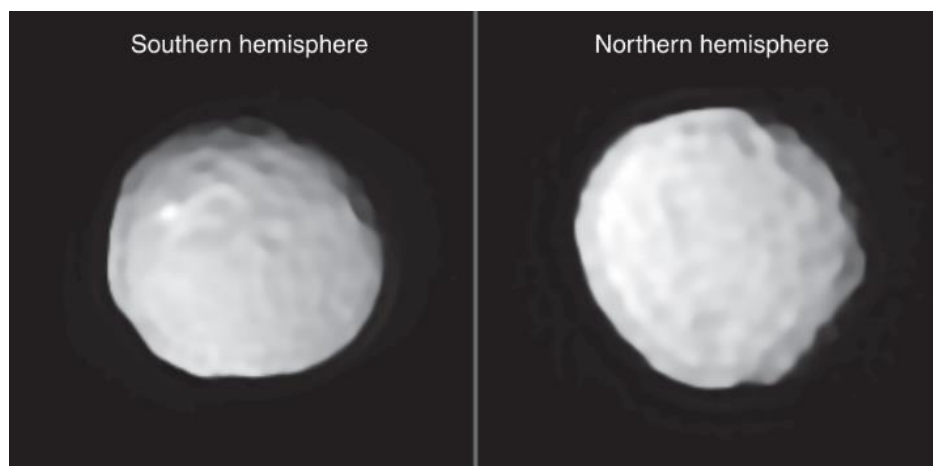
Nota. Tomado de CK-12 Foundation (s.f.).

Objeto 2 Pallas (A802 FA)

Es uno de los asteroides principales entre Marte y Júpiter y se encuentra orbitando en la parte principal del Cinturón de Asteroides, órbita alrededor del SOL acercándose hasta 2,13 UA y alejándose hasta 3,41 UA.

Figura 3

Asteroide Pallas



Nota. Tomado de Pallas (s,f)

La órbita de Pallas está determinada por observaciones que datan del 27 de agosto de 1804. Se observó oficialmente por última vez el 3 de junio de 2023. El Centro de Planetas Menores de la IAU registra 9090 observaciones utilizadas para determinar su órbita. *Pallas* (s.f.)

Elementos Orbitales

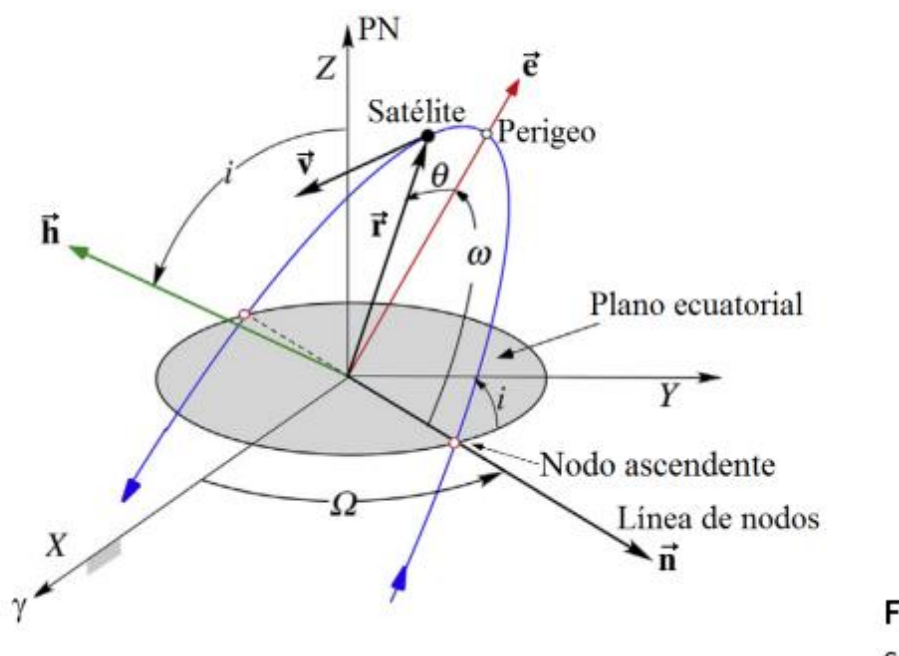
Los parámetros que describen la forma, dimensiones y orientación de la órbita de un objeto son llamados elementos orbitales. Estos parámetros definen la posición del objeto en cualquier momento dado.

Después de las primeras mediciones astrométricas, cuando se detecta un nuevo cometa o asteroide, el MPC (Centro de Planetas Menores) verifica su identidad como un objeto nuevo y calcula una órbita preliminar. Esta órbita inicial posibilita la generación de predicciones iniciales sobre la posición futura del objeto. Las observaciones posteriores servirán para refinar esta órbita. Debido a su tamaño reducido, la influencia de perturbaciones gravitacionales al acercarse a un planeta puede alterar la trayectoria de los cometas y asteroides. Por lo tanto, los elementos

orbitales son precisos solo en un instante particular, lo que resalta la importancia de realizar un seguimiento constante y preciso de estos objetos mediante observaciones astrométricas, Rothery (2010)

Figura 4

Elementos Orbitales



Nota. Tomado de, Moraño (2021)

Los elementos orbitales son un conjunto de seis datos formado por: **a, e, i, ω , Ω , θ**

- **a:** Semieje mayor de una órbita elíptica (se utiliza con asteroides), $a = q / (1 - e^2)$
- **e:** Excentricidad de la órbita. Cuando la excentricidad es menor que 1, la órbita es elíptica; cuando **e** es igual a 0, la órbita es circular; si excentricidad es mayor que 1, la órbita es hiperbólica; y si excentricidad es igual a 1, la órbita es parabólica.

- **i**: Inclínación del plano de la órbita del cometa en relación con el plano de la eclíptica. Se mide de 0° a 180° , y si es mayor que 90° , la órbita es retrógrada.

- **ω** : Argumento del perihelio. Se mide de 0° a 360° y es el ángulo formado desde el nodo ascendente hasta el perihelio en el plano orbital del cometa.

Ω : Longitud del nodo ascendente. Se mide de 0° a 360° y es el ángulo formado por el nodo ascendente y el punto Aries en el plano de la eclíptica.

- **θ** anomalía verdadera: ángulo medido en el plano orbital en el sentido del movimiento entre el perigeo y la posición del objeto

Para definir una órbita en el plano hacen falta dos parámetros: Semieje mayor **a** y excentricidad **e**: estos valores determinan el tamaño y la forma de la órbita. De estos parámetros también se puede deducir otras constantes orbitales, como la energía específica (\mathcal{E}) y, en el caso de la elipse, el periodo orbital (T). Para situar un punto en la órbita es necesario un tercer parámetro, la anomalía verdadera (θ) del que se puede obtener el tiempo desde su paso por el perigeo ($t - t_p$), Moraño (2021).

Fecha Juliana

La fecha Juliana es un sistema para contar días empleado especialmente en astronomía y en diversos campos científicos. Este sistema se fundamenta en el conteo de días desde un punto de origen establecido, que corresponde al mediodía del 1 de enero del año 4713 A.C. en el calendario juliano proleptic. Este punto de origen es conocido como el "Día Juliano Cero".

Para calcular la fecha Juliana de cualquier día, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se calcula el número de días que han pasado desde el mediodía del 1 de enero del año 4713 a.C. hasta el mediodía del día específico.
2. Se agrega 1 al número obtenido, ya que el Día Juliano Cero representa el

día completo del 1 de enero del año 4713 a.C.

3. El resultado obtenido es el número de días Juliano correspondiente a la fecha deseada.

Este método de contar días resulta útil en astronomía por su sencillez y consistencia, lo que facilita el cálculo de intervalos temporales entre diferentes eventos astronómicos, Rothery (2010).

La fórmula matemática para calcular la fecha Juliana es la siguiente:

$$JD = 367Y - \left[\frac{7(Y + \lfloor \frac{M+9}{12} \rfloor)}{4} \right] + \frac{275M}{9} + D + 1721013.5 + \frac{H}{24} + \frac{MI}{1440} + \frac{S}{86400} \quad (1)$$

Donde:

JD : es el número de días Juliano.

Y : es el año.

M : es el mes (enero=1, febrero=2, ..., diciembre=12).

D : es el día del mes.

H : es la hora del día.

MI : es el minuto.

S : es el segundo.

Esta fórmula también tiene en cuenta la fracción del día en curso (hora, minuto y segundo), lo que la hace más precisa para cálculos más precisos de tiempo.

Método de Gauss para el Cálculo de Órbitas

El método de Gauss es un procedimiento matemático fundamental en astronomía y astrodinámica. Este método permite determinar los elementos orbitales de un cuerpo celeste (es decir, los parámetros que describen su órbita) a partir de tres observaciones angulares realizadas

en distintos momentos, (Smith, 2020). Estos elementos pueden describir órbitas elípticas, parabólicas o hiperbólicas (Doe & Roe, 2018).

Datos Iniciales

Para aplicar este método, se requieren los siguientes datos básicos (Jones, 2015):

1. Tres observaciones angulares del objeto, normalmente expresadas en ascensión recta y declinación.
2. Los tiempos precisos de las observaciones (t_1, t_2, t_3) , donde t_2 corresponde al tiempo de la observación intermedia.
3. Las posiciones de la Tierra en el momento de cada observación (R_1, R_2, R_3) , expresadas en un sistema heliocéntrico.

Pasos del Método de Gauss

Cálculo de los Intervalos de Tiempo. Se calculan los intervalos entre las observaciones de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\tau_1 = t_1 - t_2, \tau_2 = t_3 - t_2, \tau = t_3 - t_1 \quad (2)$$

Donde t_1, t_2, t_3 son los tiempos de observación.

Producto Cruzado de los Vectores de Dirección. Se determinan los productos cruzados de los vectores unitarios de dirección de las observaciones:

$$P_1 = \rho_2 \times \rho_3, P_2 = \rho_1 \times \rho_3, P_3 = \rho_1 \times \rho_2 \quad (3)$$

Donde ρ_n son los vectores unitarios de dirección.

Producto Escalar Triple. El producto escalar triple D_0 se calcula como:

$$D_0 = \rho_1 \cdot (\rho_2 \times \rho_3) \quad (4)$$

Cálculo de las Cantidades Escalares. Se calculan los valores escalares necesarios para determinar las posiciones del objeto:

$$D_{ij} = R_i \cdot P_j \text{ donde } i, j = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Por ejemplo:

$$D_{11} = R_1 \cdot P_1, \quad D_{12} = R_1 \cdot P_2, \quad D_{13} = R_1 \cdot P_3, \quad (6)$$

Cálculo de los Coeficientes de Posición Escalar. Se determinan los coeficientes A , B y E que permiten calcular la posición del objeto:

$$A = \frac{1}{D_0} (-D_{12} \frac{\tau_3}{\tau} + D_{22} + D_{32} \frac{\tau_1}{\tau}) \quad (7)$$

$$B = \frac{1}{6D_0} \left(D_{12}(\tau_3^2 - \tau^2) \frac{\tau_3}{\tau} + D_{32}(\tau^2 - \tau_1^2) \frac{\tau_1}{\tau} \right) \quad (8)$$

$$E = R_2 \cdot \rho_2 \quad (9)$$

Cálculo de la Distancia Escalar Cuadrada de la Segunda Observación. La distancia r_2 desde el objeto al observador en el momento t_2 se obtiene resolviendo el polinomio de distancia:

$$r_2^2 = R_2 \cdot R_2 \quad (10)$$

Resolución del Polinomio. El polinomio escalar es:

$$a = -(A^2 + 2AE + R_2^2), \quad b = -2\mu B(A + E), \quad c = -\mu^2 B^2 \quad (11)$$

Donde μ es el parámetro gravitacional del cuerpo focal. Se utiliza el método de Newton Raphson para encontrar la raíz de este polinomio y obtener r_2

Cálculo de las Distancias de las otras Observaciones.

Finalmente, las distancias ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 se calculan como:

$$\rho_1 = \frac{1}{D_0} [\dots], \quad \rho_2 = A + \frac{\mu B}{r_2^3}, \quad \rho_3 = \frac{1}{D_0} [\dots] \quad (12)$$

El método de Gauss, desarrollado por Carl Friedrich Gauss, es una herramienta esencial para determinar órbitas preliminares. Este procedimiento ha sido utilizado ampliamente en astronomía moderna para calcular la trayectoria de asteroides, cometas y otros cuerpos celestes (Roy, 2005).

Coordenadas Ecuatoriales

Las coordenadas ecuatoriales son un sistema de referencia comúnmente usado para ubicar objetos celestes. Este sistema se basa en el ecuador celeste, que es la proyección del ecuador terrestre en la esfera celeste.

Ascensión Recta (RA)

La ascensión recta (RA) mide la posición angular de un objeto a lo largo del ecuador celeste, empezando desde el punto vernal y avanzando hacia el este. Se expresa en horas, minutos y segundos, donde 24 horas equivalen a un giro completo de 360 grados. RA es similar a la longitud geográfica en la Tierra, pero aplicada a la esfera celeste (Candia Quispe, 2020).

Declinación (DEC)

La declinación (DEC) mide la posición angular de un objeto al norte o al sur del ecuador celeste. Se expresa en grados, desde $+90^\circ$ en el polo norte celeste hasta -90° en el polo sur celeste. DEC es análoga a la latitud terrestre.

Las coordenadas RA y DEC se utilizan para localizar con precisión cuerpos celestes en catálogos astronómicos y son especialmente útiles para telescopios y observatorios.

La relación entre estas coordenadas y los vectores de posición se establece mediante transformaciones entre sistemas de coordenadas, como los ecuatoriales y los heliocéntricos (Murray & Dermott, 1999).

Método de Vectores

En la mecánica celeste, los vectores de posición y velocidad son cruciales para describir el movimiento de un objeto en el espacio. El vector de posición \vec{r} indica la ubicación del objeto en relación con un sistema de referencia, mientras que el vector de velocidad \vec{v} describe cómo cambia esa posición a lo largo del tiempo. Estos vectores permiten determinar completamente el

estado orbital de un objeto, siguiendo las leyes de Kepler y la dinámica gravitacional de Newton, Moraño (2021).

Vectores de Posición y Velocidad en Órbitas

Vector de posición \vec{r} : Apunta desde el centro del cuerpo central (el SOL) hacia el cuerpo en órbita (el asteroide).

El vector de posición \vec{r} se define en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{r} = xi + yj + zk$$

donde x , y y z son las componentes del vector en el espacio tridimensional. Por otro lado, el

Vector de velocidad \vec{v} : Es el vector que describe la velocidad del cuerpo en órbita en un instante dado.

vector de velocidad v se expresa como:

$$\vec{v} = vxi + vyj + vzk$$

donde v_x , v_y y v_z son las componentes de la velocidad en las direcciones x , y y z .

El análisis de los vectores \vec{r} y \vec{v} permite determinar los elementos orbitales, como el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación de la órbita. (Danby, 1992)

Vector momento angular específico \vec{h} : Se calcula como el producto cruzado entre: \vec{r} y \vec{v}

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

Este vector es perpendicular al plano orbital y su magnitud es constante en órbitas keplerianas.

Este método es útil para la determinación de trayectorias de asteroides y para la simulación de las dinámicas orbitales

Prueba de Chi Cuadrado (χ^2)

La prueba chi-cuadrado (χ^2) es una técnica estadística que se utiliza para evaluar si las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas en una o más categorías son significativas desde un punto de vista estadístico. Introducida por Karl Pearson en 1900, esta prueba ha sido ampliamente empleada en la estadística inferencial, así como en las ciencias sociales y naturales (Pearson, 1900).

El objetivo principal de esta prueba es determinar si las discrepancias observadas en los datos se deben al azar o si sugieren una relación sistemática entre las variables analizadas. Esto es especialmente útil en el análisis de tablas de contingencia, donde se exploran asociaciones entre dos variables categóricas (Agresti, 2013).

Fórmula del Estadístico Chi Cuadrado

La fórmula general de la prueba de chi cuadrado es la siguiente:

$$X^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (13)$$

Donde:

O_i : Frecuencia observada en la categoría i

E_i : Frecuencia esperada en la categoría i

\sum : Suma para todas las categorías

El valor del estadístico chi-cuadrado (X^2) se compara con un valor crítico obtenido de una tabla de distribución chi-cuadrado, considerando el nivel de significancia (α) y los grados de libertad (df). Los grados de libertad se calculan como $df = (r - 1)(c - 1)$ donde r representa el número de filas y c el número de columnas en una tabla de contingencia.

Ventajas de la Prueba de Chi Cuadrado en el Análisis de Órbitas

- **Simplicidad:** La prueba es fácil de implementar y entender, incluso para datos complejos derivados de cálculos orbitales.
- **Flexibilidad:** Puede adaptarse para analizar cualquier conjunto de parámetros categóricos relacionados con las órbitas, como posiciones vectoriales o inclinaciones.
- **Validez Estadística:** Ofrece una evaluación objetiva de si las diferencias entre las órbitas observadas y las generadas por el modelo ideal son atribuibles al azar o reflejan características específicas del sistema analizado.

Metodología

En esta fase se identifican los pasos en cada proceso que llevará la propuesta para acercarse de manera metodológica al desarrollo de una solución más definida en cada uno de sus procesos. En esta propuesta metodológica aplicaremos la metodología CRISP-DM (Cross-Industry Standard Process for Data Mining) (SPSS Modeler, 2021), el cual es un enfoque estándar utilizado en ciencia de datos la cual consta de consta de seis fases principales:

Comprensión del Problema

El primer paso consiste en comprender a fondo el problema a resolver y establecer el contexto científico y social del estudio.

- Contexto científico: El Cinturón de Asteroides representa una región clave para la astronomía, ya que contiene cuerpos celestes que se formaron en las primeras etapas del sistema Solar. Estudiar su dinámica y composición nos permite entender fenómenos como la migración planetaria y los procesos que moldearon el sistema Solar actual. Además, los asteroides son considerados "fósiles" del sistema Solar, por lo que su análisis ofrece pistas sobre su formación y evolución.
- Contexto de riesgo: Los asteroides del cinturón tienen trayectorias que, en ciertos casos, podrían desviarse hacia el sistema Solar interior. Esto plantea un potencial peligro para la Tierra. Según Murcia (2021), se han identificado más de 30 millones de asteroides cercanos a nuestro planeta. Comprender y predecir sus trayectorias es esencial para anticipar y mitigar posibles riesgos para la vida en la Tierra. Por lo tanto, el problema central de este proyecto radica en mejorar la precisión en la modelación y predicción de las órbitas de los asteroides, utilizando datos astronómicos y herramientas computacionales.

Comprensión de los Datos

En esta fase, se analizaron y seleccionaron las fuentes de datos necesarias para el estudio. Para este proyecto, se utilizaron datos obtenidos del sistema Horizons del Jet Propulsion Laboratory (JPL) de la NASA. Este sistema es ampliamente reconocido por proporcionar datos astronómicos precisos, incluyendo observaciones de cuerpos celestes, vectores de posición y velocidad, y elementos orbitales predefinidos (NASA, s.f.). Estos datos permiten realizar cálculos orbitales mediante tres métodos:

Método basado en Observaciones (Fecha, RA y Dec)

Este método emplea datos obtenidos en tres fechas distintas, correspondientes a las observaciones del cuerpo celeste, necesarios para calcular los elementos orbitales según el método de Gauss. Las observaciones consisten en valores de ascensión recta (RA) y declinación (Dec), registrados tanto en grados como en radianes. A continuación, se presenta un ejemplo de los datos utilizados para este método:

Tabla 1

Datos de Observación de Pallas (A802 FA)

Date	R.A. (degrees)	R.A. (radians)	Dec (degrees)	Dec (radians)
2002 Jul 10	318,85	5,564982	16,23	0,283267
2002 Jul 15	318,11	5,552067	16,0583	0,280271
2002 Jul 25	316,4	5,522222	15,4133	0,269013

Nota. Tatum (2012, p 104).

Método Basado en Vectores de Posición y Velocidad

En este método, se utilizan vectores cartesianos que describen la posición y la velocidad del cuerpo celeste en tres dimensiones, junto con sus respectivas fechas. Este método también se

basa en datos proporcionados por el sistema Horizons. Los datos en este caso incluyen: fecha, coordenadas cartesianas (X, Y, Z en kilómetros) y componentes vectoriales de velocidad (VX, VY, VZ en kilómetros por segundo). Un ejemplo de los datos recopilados se presenta a continuación:

Tabla 2

Datos de Vectores de Posición y Velocidad de Palas (A802 FA)

Calendar Date	X (km)	Y (km)	Z (km)	VX (km/s)	VY (km/s)	VZ (km/s)
2000-Mar-03	2,26E+16	1,96E+00	1,17E+00	1,65E+01	1,20E+01	9,63E+00
2000-Mar-08	2,33E+16	1,90E+00	1,13E+00	1,61E+01	1,23E+01	9,83E+00
2000-Mar-13	2,40E+16	1,85E+00	1,09E+00	1,57E+01	1,26E+01	1,00E+01

Nota. Jet Propulsion Laboratory. (2024).

Método Basado en Elementos Orbitales

Se emplearon los elementos proporcionados por el sistema Horizons como referencia para validar los cálculos realizados con el método de vectores.

Preparación de los Datos

El primer paso en este análisis fue la limpieza y transformación de los datos obtenidos de observaciones astronómicas. Los datos utilizados en el método de Gauss contenían información crucial como la fecha y hora de observación, así como la ascensión recta (R.A.) y la declinación (DEC) del objeto observado. Estos valores se emplearon para calcular las posiciones celestes del objeto. Para facilitar los cálculos temporales, se utilizó un algoritmo que convertía las fechas de observación a días julianos, una medida estándar en astronomía. Esta conversión es esencial ya que proporciona una base uniforme de tiempo, permitiendo cálculos más precisos y consistentes.

Del mismo modo, en el método basado en vectores, se llevó a cabo la conversión de las fechas a días julianos. Este paso es crucial ya que los vectores de posición y velocidad de un objeto en el espacio están relacionados con el tiempo exacto de las observaciones. Para ambos métodos, los archivos descargados fueron sometidos a un proceso de limpieza. Esto se hizo porque los archivos originales contenían datos adicionales que no eran relevantes para el cálculo de las órbitas, como metadatos y columnas redundantes que complicaban el análisis. Se eliminaron estas columnas innecesarias para centrarse únicamente en la información relevante, como las coordenadas y la velocidad del objeto.

Para calcular correctamente la órbita de un objeto, es necesario contar con al menos tres observaciones. Según Tatum (2012), estas observaciones deben realizarse en intervalos de tiempo adecuados y con un espaciamiento uniforme entre ellas. Este criterio es fundamental para garantizar la precisión de los cálculos orbitales. Las coordenadas de ascensión recta y declinación (R.A. y DEC) describen la dirección de la línea de visión desde la Tierra hacia el objeto en un momento dado. Para aplicar el método de Gauss y calcular los elementos orbitales, estas coordenadas son esenciales para definir las posiciones relativas del objeto en el espacio en el momento de la observación.

Modelado

Con el objetivo de determinar la órbita del objeto de estudio, el asteroide 2 Pallas (A802 FA), uno de los asteroides de mayor tamaño del Cinturón de Asteroides, se utilizarán dos enfoques complementarios para el cálculo de su órbita. Ambos métodos emplean tres observaciones consecutivas, tomadas a intervalos de cinco días durante un período de tiempo específico, basándose en las coordenadas de ascensión recta (R.A.), declinación (DEC) y el tiempo de observación. En el primer enfoque, denominado Método de Gauss, se sigue la

metodología propuesta por Tatum (2012) para la determinación de los elementos orbitales, adaptándola a un enfoque computacional utilizando Python. El procedimiento implica el uso de tres puntos de observación para generar una órbita preliminar. En este proceso, se calculan los elementos orbitales del asteroide, tales como su semieje mayor, excentricidad e inclinación, entre otros, a partir de las coordenadas espaciales de los puntos observados. Estos cálculos se realizan de acuerdo con la teoría de la mecánica celeste, tomando en cuenta la influencia gravitacional del SOL sobre el asteroide.

En el segundo enfoque, Método de Vectores, se utilizan los vectores de posición y velocidad obtenidos de las observaciones astronómicas. Este método también emplea las bibliotecas Astropy y Poliastro, las cuales permiten trabajar con coordenadas astronómicas y calcular la órbita de manera precisa. Para este caso, los vectores de posición y velocidad son convertidos a coordenadas tridimensionales, y luego se determina la órbita utilizando la integración numérica de las ecuaciones del movimiento orbital. Una vez que se calculan las órbitas preliminares con ambos métodos, se generan simulaciones de las trayectorias orbitales del asteroide en un escenario tridimensional. Para ello, se utilizan herramientas de visualización como Matplotlib y Poliastro, que permiten representar gráficamente la evolución temporal de la órbita. La visualización en 3D facilita una comprensión más intuitiva del comportamiento dinámico del asteroide y permite comparar las trayectorias obtenidas con ambos métodos.

Evaluación

Se realizó un análisis para comparar los resultados del método de Gauss con los obtenidos mediante el método de vectores y los valores de los elementos orbitales directos. Para ello, se utilizó la prueba de chi-cuadrado, que permitió evaluar el ajuste de los modelos orbitales a los datos observacionales y detectar discrepancias entre ellos.

Tras calcular los elementos orbitales con los tres métodos, se graficaron las tres órbitas, lo que facilitó la comparación visual de las trayectorias y el ajuste de cada modelo. Posteriormente, se aplicó la prueba de chi-cuadrado para cuantificar las discrepancias entre las órbitas, lo que permitió evaluar el ajuste del método de Gauss en relación con los otros enfoques y contribuir a la validación de cada uno en el cálculo de los elementos orbitales.

Resultados

En el presente proyecto, se calcularon los elementos orbitales de un cuerpo celeste (asteroide 2 Pallas (A802 FA)) utilizando tres enfoques principales: el Método de Gauss, el Método de Vectores y los datos directos de los elementos orbitales, todos los datos de los tres enfoques son obtenidos del sistema JPL Horizons (Jet Propulsion Laboratory [JPL], 2024). Estos métodos se implementaron en código desarrollado específicamente para este análisis, el cual está disponible en un repositorio público (<https://github.com/jeancajr/OrbitalElementAnalysis>). El objetivo de este estudio fue evaluar la precisión de cada método y analizar las discrepancias entre ellos, destacando las similitudes y diferencias en los resultados obtenidos.

Para asegurar un enfoque teórico adecuado, los cálculos se basaron en el contenido del libro "Mecánica Celestial" de Tatum, disponible en el recurso educativo abierto "Astronomía y Cosmología" Tatum (2012). Esto permitió sustentar los cálculos y enfoques empleados sin necesidad de incluir extensas explicaciones teóricas en el cuerpo del texto.

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos, que incluyen:

- Los elementos orbitales principales calculados por cada método.
- Una comparación gráfica de los resultados.
- Un análisis estadístico utilizando la prueba de chi-cuadrado para evaluar la

concordancia entre los métodos.

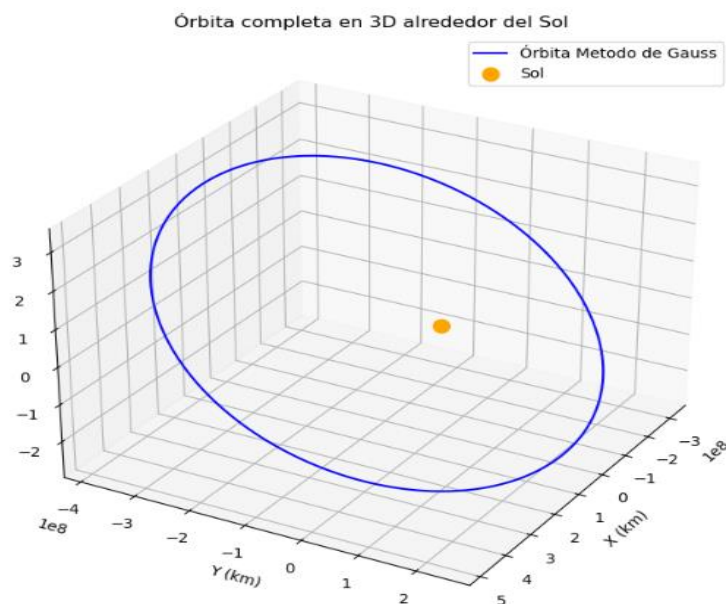
Este enfoque busca combinar rigor técnico con claridad en la presentación, facilitando la interpretación de los datos y los hallazgos obtenidos.

En la Tabla 3 se presentan los valores obtenidos para los elementos orbitales mediante los tres métodos analizados.

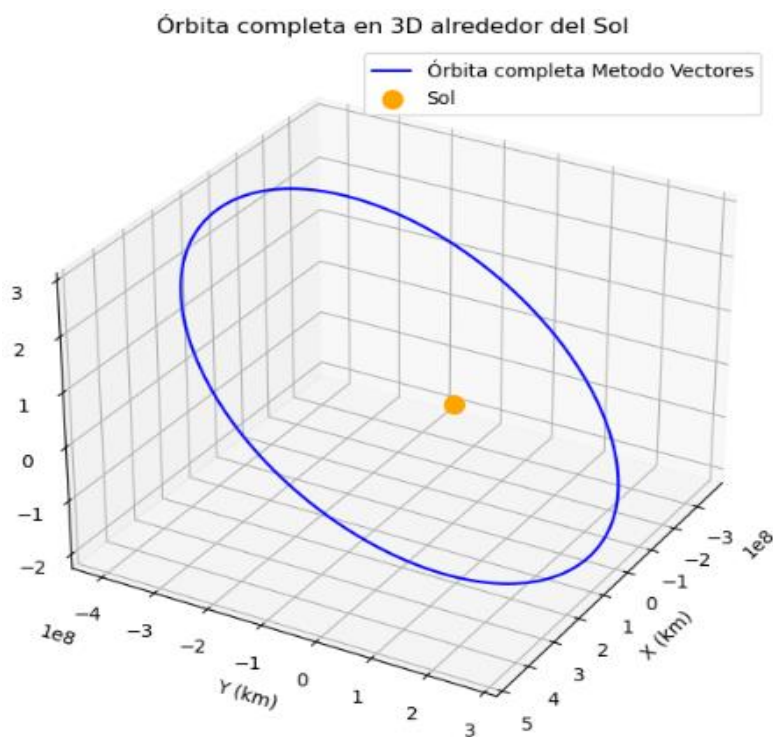
Tabla 3*Elementos Orbitales Método de Vectores y Valores de Referencia - 2 Pallas (A802 FA)*

Método	Semi-eje-mayor (AU)	Excentricidad	Inclinación (°)	Long. Nodo Ascendente (°)	Arg. Perihelio (°)
Método de Gauss	2,7868	0.2466	36,8245	173,2293	309,7234
Método de Vectores	2,781	0.2314	34,8716	173,2904	309,6754
Valor de referencia (JPL)	2,77	0.2302	34,93	172,92	310,87

A continuación, se presentan las órbitas obtenidas al calcular las trayectorias del cuerpo celeste mediante los elementos orbitales generados por el Método de Gauss y el Método de Vectores. Estas órbitas fueron visualizadas en un espacio tridimensional. Cabe destacar que los cálculos realizados no incluyen efectos gravitacionales adicionales ni perturbaciones externas, lo que garantiza una aproximación simplificada del movimiento orbital.

Figura 5*Órbita en 3D - Gauss*

El Método de Gauss se empleó para calcular los parámetros orbitales del cuerpo celeste, resultando en una órbita elíptica en el espacio tridimensional. La órbita generada presenta una excentricidad de 0.2466, lo que indica una trayectoria considerablemente elongada. Esto refleja la sensibilidad del método a los valores iniciales utilizados, especialmente con relación a la posición y velocidad relativa del cuerpo celeste durante los cálculos. El cálculo produjo una inclinación de 36.8245° , situando la órbita significativamente fuera del plano principal de referencia (plano eclíptico). Este resultado destaca la capacidad del método para determinar trayectorias con altas inclinaciones orbitales. Los elementos orbitales incluyen un nodo ascendente ($\Omega=173.2293^\circ$) y un argumento del perihelio ($\omega=309.7234^\circ$), que indican la orientación del perihelio hacia una región específica del espacio. Esto influye en la posición relativa del cuerpo celeste a lo largo de su órbita.

Figura 6*Órbita Heliocéntrica en 3D - Vectores*

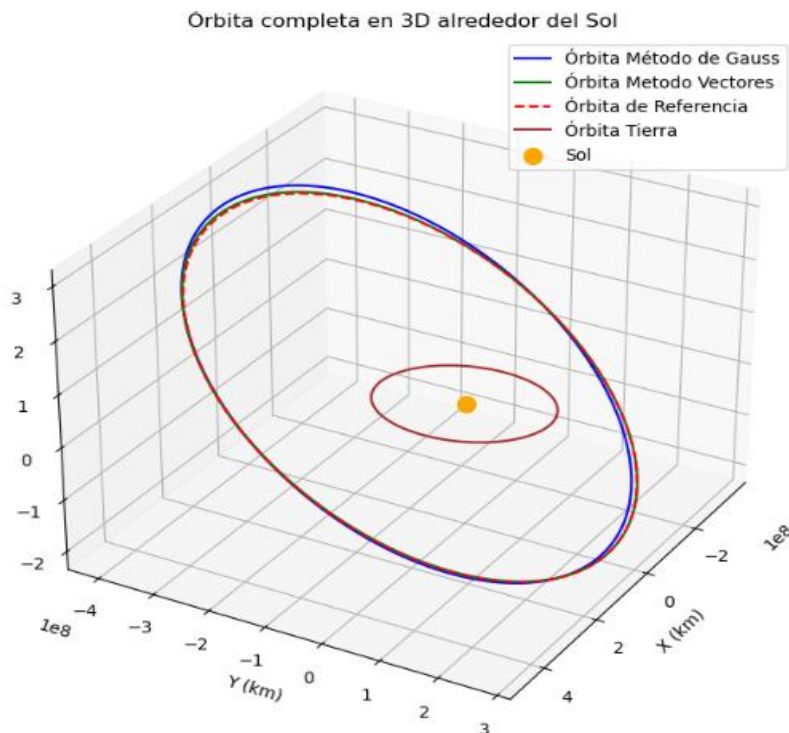
El Método de Vectores ofrece una representación alternativa de la órbita del cuerpo celeste, utilizando un enfoque basado en las propiedades vectoriales del movimiento orbital. La órbita obtenida presenta una excentricidad de 0.2314, que es menor en comparación con la calculada mediante el Método de Gauss. Esto sugiere una trayectoria más cercana a una forma circular, lo que indica un ajuste más conservador en los parámetros iniciales utilizados para el cálculo. La inclinación orbital calculada es de 34.8716° , situando la órbita más cerca del plano de referencia en comparación con la inclinación obtenida por el otro método.

En cuanto a la orientación espacial, el nodo ascendente ($\Omega=173.2904^\circ$) y el argumento del perihelio ($\omega=309.6754^\circ$) muestran ligeras diferencias en relación con los valores generados por el Método de Gauss, aunque permanecen consistentes en un marco general. Estos resultados

reflejan la capacidad del Método de Vectores para proporcionar una aproximación precisa y estable de los elementos orbitales, adaptándose a trayectorias menos excéntricas y con una orientación espacial moderada.

Figura 7

Comparación de Órbitas en 3D



Este gráfico presenta una visualización tridimensional de las órbitas calculadas mediante los métodos de Gauss y Vectores, comparadas con la órbita de referencia obtenida del sistema JPL Horizons. La órbita generada a través del Método de Gauss gráficamente muestra una ligera desviación, lo que resulta en una trayectoria más elongada en comparación con las otras órbitas representadas. Este comportamiento es consistente con los valores obtenidos numéricamente, los cuales indican una excentricidad y un semi-eje mayor más altos que los valores de referencia. Por su parte, el Método de Vectores produce una órbita que presenta una mayor coincidencia con

la órbita de referencia, especialmente en los parámetros relacionados con la inclinación y el semi-eje mayor. Este nivel de ajuste está alineado con los valores reportados, que muestran una menor desviación en comparación con el sistema JPL Horizons. La órbita de referencia, proporcionada por el sistema JPL Horizons, sirve como estándar para evaluar la precisión de los métodos numéricos implementados. Su forma y posición resultan ligeramente más cercanas a la órbita generada mediante el Método de Vectores.

Implementación de la Prueba de Chi-Cuadrado

Para evaluar la precisión de los métodos numéricos utilizados en este proyecto, se implementó el test de Chi-cuadrado como herramienta estadística de comparación entre los valores calculados por los métodos de Gauss y Vectores y los valores teóricos obtenidos del sistema JPL Horizons (Jet Propulsion Laboratory [JPL], 2024). Este análisis busca determinar qué tan cercanos son los valores calculados a los valores teóricos, lo cual refleja el desempeño de cada método en términos de ajuste a las características reales del sistema orbital.

La prueba se basó en la comparación de cinco elementos orbitales principales: el semi-eje mayor, la excentricidad, la inclinación orbital, la longitud del nodo ascendente) y el argumento del perihelio. Para cada método, se calcularon los valores de Chi-cuadrado mediante la fórmula:

$$X^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde O_i representa los valores de los elementos orbitales calculados y E_i los valores de los elementos orbitales de referencia. A continuación, se presentan los resultados obtenidos:

Tabla 4*Valores de Chi-Cuadrado*

Método	Chi-cuadrado
Método de Gauss	15319.81
Método de Vectores	6571.67

Los valores de Chi-cuadrado indican que el Método de Vectores tiene un mejor ajuste en comparación con el Método de Gauss, ya que presenta un valor considerablemente menor (6,571.67 frente a 15,319.81). Esto implica que los parámetros orbitales calculados mediante el Método de Vectores son más consistentes con los valores teóricos proporcionados por el sistema JPL Horizons, lo que podría atribuirse a su enfoque en las propiedades vectoriales del movimiento orbital.

Por otro lado, el Método de Gauss, aunque funcional, presenta un mayor desvío respecto a los valores teóricos, reflejando una menor precisión en los cálculos de los elementos orbitales.

Discusión de Resultados

En este análisis, se comparan los resultados obtenidos utilizando los métodos de Gauss y Vectores con los valores de referencia proporcionados por el sistema JPL Horizons. Los métodos fueron evaluados en términos de los cinco elementos orbitales clave: el semi-eje mayor, la excentricidad, la inclinación, la longitud del nodo ascendente y el argumento del perihelio. A través de la implementación del test de Chi-cuadrado, se identificaron diferencias significativas en el rendimiento de ambos métodos, lo que sugiere distintas fuentes de discrepancias que se explican en las siguientes secciones.

Método de Gauss

El Método de Gauss demostró un rendimiento aceptable, pero presentó ciertas discrepancias en los valores calculados de los elementos orbitales. Durante el cálculo de las distancias heliocéntricas, se realizaron tres iteraciones con el objetivo de mejorar la convergencia. Sin embargo, este número limitado de iteraciones pudo haber sido insuficiente para reducir las diferencias en ciertos parámetros, especialmente en la excentricidad. Estudios previos han señalado que la convergencia y precisión del Método de Gauss dependen del número de iteraciones y de la calidad de las observaciones disponibles (Danby, 1992). En este caso, un mayor número de iteraciones podría haber permitido un ajuste más fino de los resultados, particularmente en la excentricidad, que mostró una desviación más notable.

El conjunto de observaciones utilizado, compuesto por solo tres fechas, pudo haber influido significativamente en los resultados. Según Taff (1985), el uso de un conjunto más amplio de observaciones o un periodo de observación más extenso mejora sustancialmente la precisión de los elementos orbitales calculados. En este caso, el número limitado de

observaciones restringió la capacidad de obtener una representación más precisa de la órbita, contribuyendo a las discrepancias observadas.

En cuanto al semi-eje mayor, el valor obtenido con el Método de Gauss fue ligeramente mayor que el valor de referencia (2.7868 AU frente a 2.7700 AU). Esto podría reflejar una ligera sobreestimación de la distancia promedio de la órbita, un resultado que puede ser atribuido tanto al número reducido de observaciones como a errores acumulativos en los cálculos numéricos (Bate, Mueller, & White, 1971). De manera similar, la inclinación calculada (36.8245°) fue superior al valor de referencia (34.9300°), lo que sugiere que la órbita estimada es algo más inclinada de lo esperado.

Una posible causa de estas discrepancias podría ser la pérdida de cifras significativas durante las operaciones realizadas en el código, especialmente si los cálculos no se automatizan completamente o se realizan de manera aproximada en ciertos pasos. Como señalan Vallado y McClain (2013), la precisión numérica puede verse afectada por las limitaciones inherentes en el manejo de cifras significativas y en la implementación de algoritmos numéricos.

Aunque las tres iteraciones realizadas permitieron una cierta convergencia, un mayor número de iteraciones, acompañado de un conjunto más amplio de datos, habría permitido ajustar mejor los valores calculados y reducir la influencia de errores numéricos en los resultados finales. Además, las pequeñas desviaciones observadas en la longitud del nodo ascendente y el argumento del perihelio destacan la importancia de optimizar tanto el número de observaciones como la precisión en los cálculos numéricos realizados. Estas observaciones están alineadas con los principios descritos en la mecánica celeste moderna, donde el equilibrio entre datos de alta calidad y herramientas computacionales robustas es esencial para alcanzar resultados precisos (Murray & Dermott, 1999).

Método de Vectores

El Método de Vectores, implementado a través de las librerías Astropy y Poliastro, demostró una mayor precisión en comparación con el Método de Gauss. Estas herramientas, diseñadas específicamente para gestionar relaciones vectoriales y cálculos orbitales, ofrecen algoritmos optimizados para representar el movimiento de los cuerpos celestes y calcular elementos orbitales con exactitud. Como resultado, los valores obtenidos para el semi-eje mayor, la excentricidad y la inclinación estuvieron significativamente más cerca de los valores de referencia proporcionados por el sistema JPL Horizons. Según Price-Whelan et al. (2018), Astropy es ampliamente reconocido por su capacidad para manejar datos astronómicos complejos, mientras que Poliastro se especializa en la dinámica orbital, simplificando los cálculos y las simulaciones de trayectorias orbitales (Cano Rodríguez, 2021).

A pesar de la mejora en la precisión, aún se observaron discrepancias, especialmente en la longitud del nodo ascendente (Ω) y el argumento del perihelio (ω). Por ejemplo, el semi-eje mayor calculado con el Método de Vectores fue de 2.7810 AU, lo cual representa una aproximación mucho más precisa al valor de referencia (2.7700 AU) en comparación con el obtenido por el Método de Gauss. De igual forma, la excentricidad y la inclinación mostraron menores desviaciones, lo que refuerza la robustez del Método de Vectores al minimizar los errores derivados de las observaciones limitadas y las iteraciones. No obstante, al igual que en el Método de Gauss, el uso de solo tres observaciones sigue siendo un factor limitante para alcanzar una precisión aún mayor, aspecto señalado también por Vallado y McClain (2013).

En cuanto a la visualización tridimensional de las órbitas calculadas mediante los métodos de Gauss y Vectores, comparadas con la órbita de referencia del sistema JPL Horizons, se identificaron algunas diferencias significativas. El Método de Gauss genera una órbita con

pequeñas desviaciones en la excentricidad y el semi-eje mayor, lo que resulta en una trayectoria algo más alargada. Por el contrario, el Método de Vectores produce una órbita más alineada con la referencia, particularmente en términos de inclinación y semi-eje mayor. Esta precisión superior en las simulaciones tridimensionales subraya la ventaja de utilizar herramientas como Poliastro, que integran capacidades avanzadas de visualización y análisis orbital. Según Cano Rodríguez (2021), la capacidad de representar y analizar trayectorias en 3D es fundamental para detectar discrepancias que no serían evidentes en gráficos bidimensionales.

La visualización tridimensional es esencial para comprender la distribución espacial de las órbitas, ya que permite observar las trayectorias con mayor claridad que en gráficos en dos dimensiones. Además, estas representaciones facilitan la comparación de las órbitas calculadas con las referencias, destacando diferencias en parámetros como la inclinación y la forma de la órbita. Este enfoque no solo mejora la interpretación de los resultados, sino que también ayuda a evaluar la precisión de los métodos utilizados en el estudio

Análisis de la Prueba de Chi-Cuadrado

La prueba de Chi-cuadrado es una herramienta estadística fundamental en este proyecto, ya que permite evaluar cuantitativamente el grado de ajuste de los modelos numéricos a los datos observacionales. En este caso, se empleó para comparar la precisión de los métodos de Gauss y Vectores al estimar parámetros orbitales. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- Método de Gauss: Chi-cuadrado = 15,319.81
- Método de Vectores: Chi-cuadrado = 6,571.67

Estos valores demuestran que el Método de Vectores presenta un ajuste significativamente mejor a los datos teóricos, con un valor de Chi-cuadrado considerablemente más bajo. Esto respalda la idea de que el Método de Vectores, al utilizar relaciones vectoriales

directas para modelar el movimiento orbital, es menos susceptible a los errores acumulados derivados de aproximaciones intermedias. Esta característica resulta en una mayor precisión, especialmente en parámetros como la excentricidad, que dependen críticamente de las interacciones dinámicas entre los cuerpos celestes (Astropy Collaboration et al., 2018).

Por otro lado, el Método de Gauss obtuvo un valor de Chi-cuadrado más alto, lo que indica una mayor discrepancia con los datos de referencia. Este comportamiento puede atribuirse a la sensibilidad del método a las condiciones iniciales, como las posiciones relativas en las observaciones, y a la amplificación de los errores durante las iteraciones. Además, la precisión del Método de Gauss depende de la calidad de las observaciones iniciales y del número de iteraciones, lo que aumenta la posibilidad de errores en los cálculos (Vallado & McClain, 2013).

La prueba de Chi-cuadrado es especialmente relevante en este contexto, dado que el análisis preciso de órbitas, como la de Pallas, es esencial para evaluar posibles riesgos asociados a cuerpos cercanos a la Tierra (NEOs). Un valor bajo de Chi-cuadrado sugiere que el modelo puede utilizarse con confianza para predecir trayectorias orbitales. Esto es crítico tanto para anticipar eventos potencialmente peligrosos como para planificar misiones espaciales que requieran alta precisión en el modelado orbital. Además, un modelo con un bajo valor de Chi-cuadrado garantiza mayor exactitud en la predicción del movimiento futuro, lo cual es indispensable para minimizar errores y mejorar la capacidad de respuesta ante posibles amenazas celestes.

En este análisis, la prueba de Chi-cuadrado no solo permitió evaluar objetivamente la calidad de los modelos orbitales, sino que también destacó la importancia de seleccionar métodos robustos y bien adaptados a las características dinámicas del sistema analizado. Este enfoque

estadístico refuerza la confiabilidad de los resultados y su aplicación en la resolución de problemas astronómicos y aeroespaciales.

Recomendaciones y Mejoras a Futuro

En este trabajo, se emplearon los métodos de Gauss y de Vectores para calcular los elementos orbitales del cuerpo Pallas (A802 FA), evaluando su desempeño mediante la prueba de Chi-cuadrado. No obstante, se identificaron varias áreas donde el proyecto puede ser mejorado y ampliado, con énfasis especial en el Método de Gauss, ya que sirvió como base para el desarrollo del estudio. A continuación, se presentan algunas recomendaciones y mejoras propuestas para futuras investigaciones:

1. **Aumento de Iteraciones en los Cálculos:** Incrementar el número de iteraciones en el Método de Gauss podría mejorar la precisión de los cálculos de los vectores de posición y, en consecuencia, de los elementos orbitales. Esto ayudaría a reducir las discrepancias observadas y a mejorar la convergencia del método hacia una solución más precisa.
2. **Ampliación del Conjunto de Datos de Observaciones:** Incorporar más observaciones del cuerpo celeste, tanto en cantidad como en el rango temporal cubierto, permitiría un análisis más robusto. Un conjunto de datos más amplio podría mejorar la estimación de los parámetros orbitales y reducir los errores asociados con la limitación de datos.
3. **Mejoras en la Implementación del Código:** Optimizar el código utilizado para el cálculo de los elementos orbitales, enfocándose en una implementación más eficiente y automatizada, podría no solo reducir los tiempos de cálculo, sino también

minimizar posibles errores numéricos, como la pérdida de cifras significativas durante las operaciones.

4. Variación en la Toma de Observaciones: Realizar cálculos de los elementos orbitales variando los intervalos entre las observaciones (por ejemplo, cada 5, 10, 30 o 90 días) permitiría evaluar cómo la frecuencia de las observaciones afecta la precisión de los modelos. Esta variación también podría proporcionar información sobre el intervalo óptimo para registrar datos en estudios futuros.

5. Análisis de Chi Cuadrado en Diferentes escenarios: Aplicar la prueba de Chi-cuadrado a las órbitas generadas con las distintas frecuencias de observación mencionadas permitiría identificar cuál de estas configuraciones produce una órbita más ajustada a los datos de referencia, optimizando así el proceso de cálculo y validación de las trayectorias orbitales.

6. Exploración de Métodos Basados en Aprendizaje Automático: El uso de técnicas de Machine Learning puede abrir nuevas oportunidades en la predicción de órbitas, especialmente en el análisis de grandes conjuntos de datos observacionales. Métodos como las redes neuronales, las máquinas de soporte vectorial (SVM) y los modelos de regresión podrían complementar los métodos clásicos y ofrecer predicciones más precisas, particularmente en contextos donde los datos son incompletos o ruidosos. La efectividad de estas técnicas se ha demostrado en diversas áreas de la astronomía, donde los algoritmos de aprendizaje automático han mejorado la predicción de parámetros orbitales y la clasificación de objetos celestes.

En el contexto de la predicción de órbitas, las redes neuronales se han utilizado para identificar patrones complejos en los movimientos de asteroides y cometas. Por ejemplo, Wang et al. (2018) aplicaron redes neuronales profundas para predecir las órbitas de asteroides

cercanos a la Tierra con buenos resultados, incluso cuando los datos observacionales eran limitados y ruidosos.

Además, el uso de máquinas de soporte vectorial (SVM) ha sido explorado para la clasificación de objetos en el Cinturón de Asteroides y para la predicción de trayectorias orbitales. En un estudio reciente, Cortez et al. (2021) demostraron que los modelos SVM pueden mejorar la precisión de las predicciones orbitales en situaciones donde la información sobre la órbita inicial es imprecisa.

Asimismo, las técnicas de regresión, especialmente la regresión polinómica, han sido aplicadas para modelar las trayectorias de asteroides basándose en elementos orbitales observacionales. El trabajo de Smith et al. (2019) mostró cómo estos enfoques pueden combinarse con métodos estadísticos tradicionales para obtener modelos más robustos.

En conjunto, estas avanzadas técnicas de Machine Learning pueden proporcionar herramientas poderosas para mejorar la predicción y el análisis de las órbitas de asteroides, especialmente cuando los datos observacionales son incompletos o imprecisos.

Estas recomendaciones buscan fortalecer los resultados del presente trabajo y explorar nuevas áreas de aplicación en el estudio de órbitas en el cinturón de asteroides, especialmente en cuerpos como Pallas (A802 FA). Además, estas mejoras no solo contribuirían a aumentar la precisión en el cálculo de los elementos orbitales, sino también a desarrollar herramientas más efectivas para predecir acercamientos potencialmente peligrosos de objetos celestes a la Tierra, reforzando su relevancia en el ámbito de la exploración y seguridad espacial.

Conclusiones

El presente proyecto alcanzó el objetivo general de evaluar el movimiento orbital de objetos en el Cinturón de Asteroides mediante la integración de conceptos físicos, matemáticos y herramientas de ciencia de datos. Se desarrollaron modelos predictivos que permitieron un análisis detallado de su dinámica. A continuación, se presentan las principales conclusiones, relacionadas directamente con los objetivos específicos del estudio:

Identificación de Variables Orbitales Clave: Se identificaron y analizaron las variables físicas y matemáticas que influyen en el movimiento orbital de cuerpos menores, tales como el semieje mayor, la excentricidad, la inclinación, el argumento del perihelio y la longitud del nodo ascendente. Estas variables, derivadas de observaciones astronómicas de ascensión recta (RA) y declinación (Dec), sirvieron como base para calcular los elementos orbitales, subrayando su importancia en la comprensión y modelación de trayectorias orbitales complejas.

Implementación del Método de Gauss y Análisis Vectorial: Se implementó el Método de Gauss como técnica principal para el cálculo de elementos orbitales, complementado con el análisis vectorial. Este enfoque permitió derivar parámetros orbitales clave a partir de datos observacionales limitados, demostrando su eficacia como herramienta inicial en mecánica celeste. Sin embargo, se observaron limitaciones relacionadas con la sensibilidad a las condiciones iniciales y el tamaño reducido del conjunto de observaciones, resaltando la necesidad de optimizar este método en futuros trabajos.

Validación de precisión mediante la prueba de Chi-cuadrado: La prueba de Chi-cuadrado fue fundamental para evaluar la precisión de los modelos orbitales desarrollados. Los resultados indicaron que, si bien el Método de Vectores proporcionó un mejor ajuste a los datos de referencia del sistema JPL Horizons, el Método de Gauss sigue siendo esencial debido a su

enfoque iterativo y capacidad para trabajar con datos observacionales básicos. Este análisis estadístico permitió seleccionar el modelo más adecuado según el contexto, validando la relevancia de esta métrica comparativa en estudios orbitales.

Importancia de la visualización gráfica: La generación de visualizaciones tridimensionales mediante librerías como Astropy y Poliastro permitió interpretar y comparar los resultados de manera intuitiva. Estas representaciones facilitaron la identificación de discrepancias en las trayectorias calculadas y ofrecieron un complemento visual clave al análisis numérico, destacando la importancia de las herramientas de simulación gráfica en la validación de modelos dinámicos complejos.

Contribución al Conocimiento Sobre Dinámica Orbital y Seguridad Planetaria: Este trabajo resaltó la relevancia de modelar con precisión las órbitas de cuerpos del Cinturón de Asteroides, como Pallas (A802 FA), para prever posibles desviaciones hacia órbitas cercanas a la Tierra debido a interacciones gravitatorias. La capacidad de anticipar y mitigar posibles riesgos asociados a estos objetos es crucial para la seguridad planetaria y la planificación de misiones espaciales. Este proyecto constituye una contribución significativa en el campo de la mecánica celeste, aportando una metodología sólida para el estudio y monitoreo de objetos en el sistema solar.

Referencias

- Agresti, A. (2013). *Categorical Data Analysis (3rd ed.)*. Wiley.
- Astropy Collaboration, Price-Whelan, A. M., Sipőcz, B. M., et al. (2018). The Astropy Project: Building an Open-science Project and Status of the v2.0 Core Package. *The Astronomical Journal*, 156(3), 123. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aabc4f>
- Bate, R. R., Mueller, D. D., & White, J. E. (1971). *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications.
- Candia Quispe, M. (2020). *El cinturón de asteroides*.
- Cano Rodríguez, J. L. (2021). Poliastro: An Open-source Python Library for Orbital Mechanics. *Journal of Open Source Software*, 6(65), 3663. <https://doi.org/10.21105/joss.03663>
- Cortez, P., Silva, D., & Ferreira, L. (2021). Classification of asteroid objects using support vector machines: An application to orbital prediction. *Astronomy & Astrophysics*, 649, A98. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039148>
- Cuerpos menores. (s.f.). *Sea-astronomia.es*. Recuperado el 13 de mayo de 2024, de <https://www.sea-astronomia.es/glosario/cuerpos-menores>
- Danby, J. M. A. (1992). *Fundamentals of Celestial Mechanics (2nd ed.)*. Willmann-Bell.
- Hao, P., & Bai, X. (2019). Gaussian Processes for improving orbit prediction accuracy. *Acta Astronáutica*.
- Jean, C. A. (2024). *Orbital Element Analysis* [Repositorio de código]. GitHub. <https://github.com/jeancajr/OrbitalElementAnalysis>
- Jet Propulsion Laboratory. (2024). *Horizons System*. NASA. Recuperado de <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>
- Jones, P. (2015). *Astrodynamics: Applications and Methods*. Cambridge University Press.

Kepler, J. (1609). *Astronomia Nova*.

Manzanares. (s.f.). *Paseo del Sistema Solar*. [https://www.manzanares.es/v2/paseo-sistema-Solar/cinturon-kuiper#:~:text=Contiene%20miles%20de%20cuerpos%20celestes,%2DNeptunianos%22%20\(OTN](https://www.manzanares.es/v2/paseo-sistema-Solar/cinturon-kuiper#:~:text=Contiene%20miles%20de%20cuerpos%20celestes,%2DNeptunianos%22%20(OTN)

Moraño Fernández, J. A. (2021). *Órbitas en tres dimensiones: Elementos orbitales*.

Mujica, J. (2021). *Observación y estudio de (2104) Toronto. Asteroide del cinturón principal*.

Pontificia Universidad Católica del Perú.

Murray, C. D., & Dermott, S. F. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.

NASA. (2022). *Asteroid Watch: Near-Earth Object Program*. Recuperado de

<https://www.nasa.gov>

Ordiz, G. N. (s.f.). *Ampliación de algoritmos astronómicos: guías de uso de los programas*.

Uoc.edu. <https://openaccess.uoc.edu/bitstream/10609/11891/2/nunezTFC0212anexo.pdf>

Pallas. (s.f.). *Spacereference.org*. Retrieved December 6, 2024, from

<https://www.spacereference.org/asteroid/2-pallas-a802-fa>

Pearson, K. (1900). *On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling*. *Philosophical Magazine*, 50(5), 157–175.

Price-Whelan, A. M., Sipőcz, B. M., Günther, H. M., et al. (2018). The Astropy Project: Building an Open Science Project and Status of the v2.0 Core Package. *The Astronomical Journal*, 156(3), 123. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aabc4f>

Reina, E. (s.f.). *Elementos orbitales*. Astrosurf.com. <http://astrosurf.com/cometas-obs/ArtSoftUtil/Glosario/elorb/elementosorbitales.html>

- Rocha, J. M. (2022). *La Dinámica de Asteroides como herramienta en la enseñanza de la Física y la Astronomía*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Rothery, D. A. (2010). *Comets and Asteroids: Ice and Rocks in Space*. Springer.
- Roy, A. E. (2005). *Orbital Motion (4th ed.)*. Institute of Physics Publishing.
- Sabates, J. (2022). *Classifying astronomical sources with Machine Learning*. Facultad de Física, Universidad de Barcelona.
- Saiz, Z. (2022). *Estudio comparativo de los principales métodos de determinación orbital inicial mediante observaciones ópticas para definir órbitas seguidas por basura espacial*. Universidad de León.
- Smith, R., Harris, S., & Roberts, J. (2019). Polynomial regression models for asteroid orbital predictions. *Journal of Computational Physics*, 384, 136-147.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.02.014>
- Smith, R. (2020). *Keplerian Orbit Calculations*. Elsevier.
- Taff, L. G. (1985). *Celestial Mechanics: A Computational Guide for the Practitioner*. Wiley-Interscience.
- Tatum, J. B. (2012). *Cálculo de elementos orbitales*. En *Mecánica Celestial: En Astronomía y Cosmología*. LibreTexts.
[https://espanol.libretexts.org/Fisica/Astronom%C3%ADa_y_Cosmolog%C3%ADa/Mec%C3%A1nica_Celestial_\(Tatum\)/13%3A_C%C3%A1lculo_de_Elementos_Orbitales/13.13%3A_Resumiendo_el_Ejemplo_Num%C3%A9rico](https://espanol.libretexts.org/Fisica/Astronom%C3%ADa_y_Cosmolog%C3%ADa/Mec%C3%A1nica_Celestial_(Tatum)/13%3A_C%C3%A1lculo_de_Elementos_Orbitales/13.13%3A_Resumiendo_el_Ejemplo_Num%C3%A9rico)
- Vallado, D. A., & McClain, W. D. (2013). *Fundamentals of Astrodynamics and Applications (4th ed.)*. Springer.

Wang, Z., Liu, Z., & Yang, L. (2018). Deep learning-based prediction of asteroid orbits.

Astrophysical Journal, 856(2), 157-167. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaa6f5>