

Uso de modelos manipulativos en la enseñanza del álgebra: una propuesta para la educación inclusiva.

Oscar Alexander Castañeda Guevara

Asesora

María Camila González

Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD

Escuela de Ciencias de la Educación – ECEDU

Maestría en Educación

2025

Dedicatoria

A Dios, quien me iluminó y me sostuvo en cada etapa de este camino con un amor inmenso por mi pasión: la enseñanza de las matemáticas. Por la presencia viva de su Hijo Jesús y por la luz del Espíritu Santo que guía, consuela y enseña. A ellos, mi gratitud eterna.

“Te doy gracias, Señor, de todo corazón; delante de los ángeles tañeré para ti. Me postraré hacia tu santo templo, y daré gracias a tu nombre por tu misericordia y tu fidelidad. Salmo 138: 1-2.

¿Quién podría conocer tu voluntad, si tú no le das la sabiduría y no le envías desde lo alto tu santo espíritu?” Libro de la Sabiduría. 9: 17.

“Pero el Paráclito, el Espíritu Santo que el Padre enviará en mi nombre, les enseñará todo y les recordará todo lo que yo les he dicho.” Juan 14:26.

A mis padres, quienes con su acompañamiento y educación me formaron como una persona íntegra, capaz de aportar a la construcción de una sociedad basada en la fe en Dios y el respeto por los demás.

Agradecimientos

A lo largo de este proceso, he contado con el acompañamiento de personas e instituciones que han dejado huella profunda en la construcción de este trabajo. A cada una, mi gratitud sincera.

A mi asesora, por su mirada crítica, su sensibilidad académica y su insistencia ética. Sus observaciones no solo fortalecieron la estructura de esta tesis, sino también mi convicción de que investigar es un acto de responsabilidad pedagógica.

Al Colegio Theodoro Hertzl, por abrir sus puertas con generosidad y permitir que esta propuesta se desarrollara en un contexto real, diverso y desafiante. A sus docentes, por su compromiso con la innovación y por creer que el aula puede ser un espacio de transformación.

A mis estudiantes, por enseñarme cada día que el aprendizaje no se mide solo en resultados, sino en gestos, silencios, preguntas y resistencias. Su participación, sus trayectorias únicas y sus formas de habitar el conocimiento fueron el motor de esta investigación.

A mi familia, por sostenerme en los momentos de duda, por celebrar cada avance como si fuera propio, y por recordarme que la educación también se construye en casa, con afecto y escucha.

A mis colegas y amigos, por sus lecturas generosas, sus preguntas incómodas y sus palabras oportunas. Este trabajo también les pertenece.

Finalmente, a quienes creen que la inclusión no es una estrategia, sino una postura ética. Esta tesis es un intento de honrar esa convicción.

Resumen

Esta investigación surge del compromiso ético y pedagógico por transformar las prácticas de enseñanza de las matemáticas en contextos escolares diversos. Se plantea como objetivo general diseñar, implementar y evaluar una propuesta didáctica inclusiva para la enseñanza de contenidos algebraicos en estudiantes de grado octavo, reconociendo sus trayectorias, estilos de aprendizaje y condiciones particulares.

La metodología empleada combina enfoques cualitativos y cuantitativos, integrando instrumentos como encuestas, entrevistas, diarios de campo y una matriz de caracterización estudiantil. Los resultados evidencian que La implementación de recursos táctiles, actividades contextualizadas y una atención empática a las voces estudiantiles favoreció la apropiación del saber matemático, la comprensión conceptual y el fortalecimiento del vínculo con el saber matemático.

Esta propuesta didáctica promueve una matemática construida desde la pluralidad, donde cada diferencia se convierte en posibilidad de aprendizaje. El trabajo aporta al campo de la educación inclusiva y a la formación docente, ofreciendo herramientas concretas para una práctica más empática, rigurosa y comprometida con la equidad.

Palabras clave: Inclusión. Material concreto. Factorización. Didáctica. Aprendizaje significativo. Diversidad.

Abstract

This research emerges from an ethical and pedagogical commitment to transform mathematics teaching practices in diverse school contexts. Its main objective is to design, implement, and evaluate an inclusive didactic proposal for teaching algebraic content to eighth-grade students, acknowledging their learning trajectories, styles, and individual conditions.

The methodology combines qualitative and quantitative approaches, integrating instruments such as surveys, interviews, field journals, and a student characterization matrix. The results show that the use of manipulative strategies, context-based activity design, and pedagogical listening foster active participation, conceptual understanding, and a stronger connection to mathematical knowledge.

This thesis advocates for a mathematics that does not exclude—one built from difference and recognizing each student as a possibility for transformation. It contributes to the field of inclusive education and teacher training by offering concrete tools for a more empathetic, rigorous, and equity-driven practice.

keywords: Inclusion. Concrete materials. Factoring. Didactics. Meaningful learning. Diversity.

Tabla de Contenido

Introducción	10
Planteamiento del Problema	12
Objetivos	13
Objetivo general	13
Objetivos específicos	13
Justificación	15
Marco de Rreferencias	17
Antecedentes investigativos	17
Marco teórico	18
Contenidos matemáticos	18
Enfoques pedagógicos	18
Inclusión educativa y neuroeducación	19
Marco Conceptual	20
Marco legal	20
Marco Metodológico	22
Enfoque y método de investigación	22
Tipo de investigación	23
Instrumentos	23
<i>Diseño del instrumento diagnóstico</i>	23
<i>Validación del constructo</i>	24
<i>Validez de contenido y criterio</i>	24
<i>Consistencia interna y coherencia lógica</i>	24
<i>Confiabilidad del instrumento</i>	24
<i>Recolección de datos</i>	25

<i>Análisis de datos</i>	25
Población y muestra	26
<i>Población</i>	26
<i>Muestra</i>	27
<i>Características relevantes de la muestra</i>	27
Etapas de la investigación	27
<i>Etapa 1: Diagnóstico Pedagógico Inicial</i>	28
<i>Etapa 2: Análisis de Resultados y Fundamentación Metodológica</i>	28
<i>Etapa 3: Diseño e Implementación de la Propuesta Didáctica</i>	28
<i>Etapa 4: Evaluación del Impacto Pedagógico</i>	31
Resultados y Análisis de Datos	32
Resultados y Análisis de la Encuesta (datos personales, aspectos de formación)	32
Análisis de la Entrevista	33
Análisis de Redes Semánticas	34
Análisis de los Diarios de Campo	35
Matriz de Caracterización	37
Conclusiones	40
Conclusiones Generales	40
Conclusiones Específicas	40
Recomendaciones	42
Recomendaciones Pedagógicas	42
Recomendaciones Metodológicas	42
Recomendaciones Institucionales	43
Referencias Bibliográficas	44
Apéndices	49

Lista de Tablas

Tabla 1 <i>Resumen de resultados</i>	25
Tabla 2 <i>Matriz de caracterización</i>	37
Tabla 3 <i>Lista de Apéndices</i>	50

Lista de apéndices

Apéndice A <i>Consigna Polinomios</i>	51
Apéndice B Reconocimiento del Álgebra Geométrica a través de Polinomios	59
Apéndice C <i>Reconocimiento del Álgebra Geométrica</i>	60
Apéndice D <i>Operaciones con Polinomios</i>	61
Apéndice E <i>Descubrimiento de Productos Notables Mediante Álgebra Geométrica</i>	64
Apéndice F <i>Ejemplo de Actividades Desarrolladas</i>	66

Introducción

La presente investigación propone una ruta de acompañamiento para el aprendizaje del álgebra en estudiantes de grado octavo, atendiendo a sus trayectorias escolares diversas y a sus necesidades educativas específicas. Aunque el enfoque se centra en este nivel, su diseño flexible permite una adaptación pertinente para los grados séptimo y noveno.

Durante esta etapa escolar, los estudiantes enfrentan por primera vez un lenguaje matemático más formal, así como estructuras conceptuales de creciente abstracción. Esta transición demanda estrategias pedagógicas sensibles, inclusivas y accesibles, que promuevan una aproximación gradual al pensamiento algebraico.

La matemática, en su esencia, ofrece herramientas concretas que posibilitan la construcción de conocimiento mediante experiencias contextualizadas y significativas. En el caso de estudiantes con dificultades en el aprendizaje, se vuelve fundamental el uso de recursos didácticos manipulativos y la implementación de secuencias instruccionales explícitas, que contribuyan a su comprensión conceptual, refuercen su seguridad académica y favorezcan su participación equitativa en el proceso formativo.

Muchos acompañamientos académicos demuestran que el uso de material manipulativo en la enseñanza del álgebra constituye una estrategia efectiva para potenciar la comprensión de contenidos como los productos notables y la factorización. Asimismo, dicho enfoque contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas y socioemocionales, especialmente en estudiantes con trayectorias escolares heterogéneas o con Necesidades Educativas Especiales (NEE).

En este contexto, el estudio se orienta a comprender el impacto del uso de recursos manipulativos en el aprendizaje de productos notables y factorización en estudiantes de grado

octavo. Para ello, se plantea el diseño de estrategias didácticas inclusivas que respondan de forma auténtica y flexible a las particularidades del grupo, reconociendo las diferencias individuales como oportunidad de enriquecimiento pedagógico. Finalmente, el documento se estructura en tres capítulos: el primero presenta el marco referencial; el segundo expone el diseño metodológico; y el tercero aborda el análisis de los hallazgos y las conclusiones.

Planteamiento del Problema

En el aula de grado octavo, la enseñanza de productos notables y factorización presenta desafíos persistentes para estudiantes con trayectorias de aprendizaje heterogéneas. Aunque estos contenidos son fundamentales para construir el pensamiento algebraico, su carácter abstracto y simbólico puede generar barreras cognitivas significativas, especialmente en aquellos con dificultades atencionales, baja comprensión simbólica o estilos de pensamiento divergentes.

La transición entre operaciones aritméticas concretas y el lenguaje algebraico formal no ocurre de manera natural para todos los estudiantes. En particular, los contenidos como la factorización, que demandan una comprensión estructural y visual de expresiones matemáticas, suelen generar desmotivación o rechazo cuando se abordan desde metodologías tradicionales, descontextualizadas o poco sensibles a las diferencias individuales.

Diversas investigaciones han señalado la ausencia de estrategias pedagógicas inclusivas que permitan mediar el acceso a estos conceptos en entornos diversos. Además, en las instituciones rurales y con escasa formación docente especializada, esta brecha se intensifica, acentuando desigualdades en el desarrollo del pensamiento matemático.

A pesar de estos hallazgos, aún persiste una falta de propuestas concretas que vinculen la enseñanza de productos notables y factorización con enfoques accesibles y multisensoriales — como el álgebra geométrica— que ofrezcan alternativas significativas para estudiantes con Necesidades Educativas Especiales.

Pregunta problema

¿Cómo puede el uso de álgebra geométrica como estrategia multisensorial contribuir a la enseñanza inclusiva de productos notables y factorización en estudiantes de grado octavo con trayectorias de aprendizaje diversas?

Objetivos

Objetivo general

Diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica basada en material concreto y los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), que facilite a estudiantes de grado octavo con Necesidades Educativas Especiales (NEE) la comprensión de conceptos algebraicos, desde polinomios hasta factorización.

Objetivos específicos

Diagnosticar las barreras cognitivas, emocionales y representacionales que dificultan la comprensión de productos notables y factorización en estudiantes de grado octavo con NEE.

Diseñar actividades didácticas inclusivas y multisensoriales, centradas en el uso de material concreto y sustentadas en los principios del DUA, para abordar contenidos de álgebra en aulas diversas.

Implementar la secuencia didáctica diseñada en un grupo de estudiantes de grado octavo, promoviendo el acceso significativo al lenguaje algebraico mediante experiencias prácticas, visuales y contextualizadas.

Evaluar el impacto de la propuesta en el rendimiento académico de los estudiantes, comparando los resultados obtenidos frente a metodologías tradicionales.

Analizar las transformaciones en los procesos de pensamiento matemático evidenciadas durante la intervención didáctica, identificando patrones de cambio en la comprensión conceptual, la aplicación práctica y la argumentación de los estudiantes, con base en los

resultados diagnósticos, evaluaciones formativas y testimonios reflexivos recogidos durante el proceso.

Justificación

Enseñar productos notables y factorización en grado octavo implica enfrentar barreras que trascienden lo conceptual, especialmente en aulas que reúnen estudiantes con trayectorias diversas y perfiles neuro educativos diferenciados. En este contexto, lo abstracto puede tornarse inaccesible, y el lenguaje simbólico, ininteligible. Pese a que estos contenidos son clave para consolidar el pensamiento algebraico, existe un vacío metodológico respecto a cómo abordarlos desde enfoques pedagógicos sensibles e inclusivos (Casanova & Domínguez, 2018)

Esta investigación responde a dicha carencia proponiendo una intervención basada en álgebra geométrica manipulativa, articulada con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA). La propuesta reconoce las particularidades cognitivas y emocionales de estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE), incluidos aquellos con dificultades de atención, procesamiento simbólico o razonamiento visual. Al integrar lo concreto con lo simbólico, se busca facilitar el acceso a contenidos algebraicos complejos mediante experiencias significativas, visuales y participativas.

Desde este enfoque, el estudio pretende:

Ofrecer a los docentes estrategias didácticas innovadoras que favorezcan la construcción de sentido en torno a productos notables y factorización.

Diseñar actividades multisensoriales que estimulen el interés, la autonomía y el pensamiento estructural.

Cerrar brechas en la comprensión algebraica entre estudiantes con y sin NEE, fortaleciendo la equidad en el aula heterogénea.

Los hallazgos proyectan una serie de aportes concretos a la práctica docente: desde el uso ético y funcional de material manipulativo, hasta la generación de entornos inclusivos donde cada estudiante pueda construir conocimiento desde su singularidad. Además, se plantea un modelo replicable que puede ser adaptado en contextos rurales, aulas de apoyo o procesos de formación docente, convirtiendo la enseñanza del álgebra en una experiencia comprensible, empática y transformadora.

Marco de Referencias

Antecedentes investigativos

Diversos estudios han abordado la enseñanza del álgebra desde enfoques inclusivos, destacando el uso de materiales manipulativos como estrategia para favorecer la comprensión en estudiantes con estilos de aprendizaje diversos. Investigaciones como las de Rodríguez (2019) y Morales (2021) evidencian que el trabajo con regletas, balanzas y fichas geométricas permite vincular lo concreto con lo simbólico, facilitando el tránsito hacia la abstracción matemática facilitando el tránsito hacia la abstracción matemática (Duval, 2006

En contextos escolares con alta diversidad funcional, se ha comprobado que las actividades multisensoriales no solo mejoran el rendimiento académico, sino que también fortalecen la participación y el sentido de pertenencia. Estudios realizados en instituciones públicas de Bogotá y Medellín (Gómez, 2020; Herrera, 2022) muestran que los estudiantes responden positivamente cuando se les ofrece la posibilidad de construir significados a partir de experiencias concretas (Casanova & Domínguez, 2018).

Por su parte, investigaciones internacionales como las de Bruner (1966) y Gravemeijer (2004) han fundamentado el valor del aprendizaje activo y la modelación visual en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en contenidos abstractos como el álgebra. Estos aportes han sido retomados por autores contemporáneos que promueven el uso de representaciones manipulativas como vía para democratizar el acceso al conocimiento matemático.

En conjunto, los antecedentes revisados respaldan la pertinencia de diseñar propuestas didácticas que integren modelos manipulativos, adaptadas a las necesidades reales del aula y orientadas a garantizar procesos de aprendizaje inclusivos, significativos y emocionalmente seguros

Marco teórico

El presente marco teórico se estructura en tres ejes articuladores: los contenidos matemáticos abordados en la propuesta, los enfoques pedagógicos que sustentan su enseñanza y los principios de inclusión educativa que orientan el diseño metodológico.

Contenidos matemáticos.

La enseñanza de polinomios, área y perímetro, funciones trigonométricas y tablas de frecuencia representa un desafío conceptual para muchos estudiantes, especialmente en contextos con acceso limitado a recursos didácticos. Según Godino y Batanero (1998), el aprendizaje matemático requiere una mediación adecuada entre el lenguaje simbólico, gráfico y verbal, lo cual se potencia mediante representaciones múltiples y actividades contextualizadas.

El modelado espacial de polinomios y la vinculación entre área y perímetro permiten construir significados a partir de experiencias concretas. En el caso de las funciones trigonométricas, el uso de manipulativos y representaciones visuales facilita la comprensión de relaciones angulares y proporcionales, facilita la comprensión de relaciones angulares y proporcionales (Laborde, 2002).

Enfoques pedagógicos.

La propuesta se enmarca en metodologías activas como el aula invertida, la gamificación y el aprendizaje basado en proyectos. Estas estrategias promueven la participación, la autonomía y la conexión con situaciones reales. Según Bergmann y Sams (2012), el aula invertida permite que los estudiantes accedan a los contenidos en casa y utilicen el tiempo de clase para resolver dudas y aplicar conocimientos, favoreciendo ritmos diversos de aprendizaje.

La gamificación introduce elementos lúdicos que incrementan la motivación y el compromiso, mientras que el aprendizaje basado en proyectos permite abordar problemas significativos, desarrollando competencias cognitivas y socioemocionales.

Inclusión educativa y neuroeducación.

La propuesta se sustenta en el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), planteado por el CAST (2018), que promueve múltiples formas de representación, expresión y participación para atender la diversidad del aula. Su aplicación permite eliminar barreras mediante la flexibilización de objetivos, métodos y materiales, favoreciendo la accesibilidad cognitiva y emocional.

Además, se incorporan principios de la neuroeducación, que reconocen el papel de las emociones, la atención y la memoria en el aprendizaje. Estudios como los de Mora (2017) destacan que el cerebro aprende mejor cuando se siente seguro, motivado y vinculado con el entorno, lo cual refuerza la necesidad de crear ambientes empáticos y estimulantes (Mora, 2017). Este marco permite sustentar la propuesta metodológica desde una perspectiva integral, que articula el rigor conceptual de las matemáticas con estrategias pedagógicas inclusivas y humanizadoras. En este contexto, los modelos manipulativos emergen como una solución efectiva para la enseñanza del álgebra en aulas diversas, al facilitar la comprensión, promover la participación y garantizar procesos de aprendizaje emocionalmente seguros.

Marco Conceptual

Marco legal

La presente investigación se fundamenta en el marco normativo colombiano que garantiza el derecho a una educación inclusiva, equitativa y de calidad, así como en los lineamientos institucionales de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD).

La Ley General de Educación (Ley 115 de 1994) establece que la educación debe ser un proceso permanente orientado al desarrollo integral de la persona, reconociendo sus diferencias individuales. Este principio respalda el enfoque inclusivo de la propuesta, al exigir que los procesos educativos se adapten a las características de los estudiantes.

La Ley 1618 de 2013, que protege los derechos de las personas con discapacidad, señala la obligación del Estado de implementar ajustes razonables en los entornos educativos. Esta disposición legitima el uso de estrategias diferenciadas y herramientas tecnológicas como las que se proponen en esta investigación.

El Decreto 1421 de 2017 reglamenta la atención educativa a la población con discapacidad, enfatizando la necesidad de diseñar instrumentos de evaluación que respondan a las necesidades específicas de los estudiantes. Este mandato se articula directamente con el diseño del formulario diagnóstico y los talleres manipulativos incluidos en la propuesta.

Desde el ámbito institucional, la UNAD promueve el respeto por la diversidad, la pertinencia social de las propuestas y el uso de metodologías activas que favorezcan el aprendizaje autónomo. Además, exige el cumplimiento de normas éticas y académicas, incluyendo la aplicación del estilo APA y la validación rigurosa de los instrumentos utilizados.

Finalmente, la Constitución Política de Colombia, en su artículo 67, reconoce la educación como un derecho fundamental y una función social que debe garantizar el acceso, la permanencia y la calidad para todos los ciudadanos.

Este marco legal proporciona el respaldo normativo necesario para implementar estrategias inclusivas, diagnósticas y metodológicas que buscan mejorar la enseñanza del álgebra en contextos educativos diversos.

Marco Metodológico

La investigación se enmarca en una metodología de tipo mixto, que integra elementos cuantitativos y cualitativos para comprender de manera integral las barreras y oportunidades en el aprendizaje de contenidos matemáticos. Esta elección permite captar tanto los datos objetivos derivados de los instrumentos aplicados como las percepciones y experiencias de los estudiantes en contextos educativos diversos.

Se estructura en tres fases: diagnóstico, intervención y análisis. En la fase diagnóstica, se aplicó un formulario digital diseñado en Google Forms para evaluar la comprensión en temas como polinomios, potenciación, área, perímetro y tablas de frecuencia. El instrumento fue validado mediante criterios de contenido, coherencia lógica y consistencia interna.

Durante la intervención, se desarrollaron talleres con actividades manipulativas, ejercicios contextualizados y estrategias como aula invertida y gamificación. Estas metodologías permitieron observar la respuesta de los estudiantes ante propuestas didácticas inclusivas.

En la fase de análisis, se aplicaron técnicas estadísticas (prueba t de Student, p-valores, tamaño del efecto) y se complementó con una lectura empática de las respuestas abiertas, identificando barreras cognitivas, emocionales y contextuales. La triangulación de datos fortaleció la validez interna del estudio, al contrastar los resultados cuantitativos con las observaciones cualitativas.

Enfoque y método de investigación

La investigación adopta un enfoque mixto, que permite integrar técnicas cuantitativas y cualitativas para obtener una comprensión más completa del fenómeno educativo. Desde la perspectiva cuantitativa, se aplicaron encuestas digitales y se analizaron mediante pruebas

estadísticas. Desde la dimensión cualitativa, se consideraron respuestas abiertas y observaciones durante los talleres, lo que permitió identificar barreras cognitivas y emocionales.

El método es descriptivo-exploratorio, ya que busca caracterizar el nivel de comprensión en contenidos específicos y explorar estrategias pedagógicas que favorezcan el aprendizaje en contextos diversos. Esta elección responde al carácter inclusivo de la propuesta, que exige atender la diversidad de ritmos, estilos y condiciones de aprendizaje.

Tipo de investigación

El estudio es de tipo aplicado, orientado a generar soluciones prácticas frente a la dificultad en la comprensión de contenidos matemáticos. También es descriptivo, al caracterizar el nivel de comprensión en temas clave mediante encuestas y talleres. En su dimensión exploratoria, indaga sobre el impacto de metodologías activas como gamificación y aula invertida.

Esta elección se justifica por el propósito transformador del estudio, que no se limita a describir una situación, sino que propone alternativas concretas para mejorar la práctica docente desde una perspectiva inclusiva y humanizadora.

Instrumentos

Diseño del instrumento diagnóstico

Se elaboró un formulario digital para evaluar la comprensión en contenidos como polinomios, potenciación, área y perímetro. Incluyó preguntas cerradas, abiertas y ejercicios contextualizados que permitieran identificar el tipo de representación preferida por los estudiantes.

Validación del constructo

Para garantizar que el instrumento midiera efectivamente los conceptos que se pretendían evaluar, se realizó una validación del constructo mediante revisión de expertos en didáctica de las matemáticas y educación inclusiva. Se verificó que cada ítem correspondiera a un contenido específico del currículo y que estuviera alineado con los objetivos de la investigación.

Validez de contenido y criterio

La validez de contenido se estableció mediante juicio de expertos, quienes evaluaron la pertinencia, claridad y relevancia de cada pregunta.

Consistencia interna y coherencia lógica

Se aplicó un análisis de consistencia interna utilizando el coeficiente Alfa de Cronbach, obteniendo un valor superior a 0.80, lo cual indica una alta fiabilidad del instrumento. Además, se revisó la coherencia lógica entre los ítems, asegurando que la secuencia de preguntas favoreciera la comprensión progresiva y no generara ambigüedad en las respuestas.

Confiabilidad del instrumento

La confiabilidad del instrumento se fortaleció mediante una prueba piloto aplicada a un grupo de estudiantes con características similares a la muestra principal. Los resultados permitieron ajustar la redacción de algunos ítems, mejorar la claridad de las instrucciones y verificar la funcionalidad del formulario digital en distintos dispositivos.

Recolección de datos

Se realizó en dos momentos: aplicación del formulario y talleres manipulativos. Las respuestas fueron almacenadas automáticamente para su análisis.

Análisis de datos

Los datos cuantitativos fueron analizados mediante técnicas estadísticas como la prueba t de Student, el cálculo de p-valores y el análisis del tamaño del efecto, con el fin de determinar la significancia de las diferencias entre grupos.

La siguiente tabla resume los resultados obtenidos en la comparación entre el grupo experimental —que recibió la intervención didáctica basada en modelos manipulativos— y el grupo control, que continuó con la metodología tradicional:

Tabla 1 *Resumen de resultados*

Grupo	n	Media (\bar{x})	Desviación estándar (σ)	p-valor	Interpretación
Experimental	14	7.8	1.2	0.03	Mejora significativa en desempeño
Control	14	6.2	1.5		Menor desempeño en comparación

Nota 1. de comparación de resultados. Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en la intervención.

Los resultados de la prueba t de Student aplicada a los puntajes obtenidos por ambos grupos muestran una diferencia estadísticamente significativa ($p = 0.03$) entre el grupo experimental y el grupo control. El grupo que recibió la intervención didáctica basada en modelos manipulativos obtuvo una media de 7.8, frente a 6.2 del grupo control, lo que sugiere que el uso de materiales concretos favoreció el aprendizaje del álgebra en estudiantes con

trayectorias escolares diversas. Esta diferencia se refuerza con el análisis del tamaño del efecto, que indica una mejora relevante en términos pedagógicos.

Los datos cualitativos se analizaron mediante codificación temática, identificando patrones en las respuestas abiertas que revelaban barreras cognitivas, emocionales y representacionales. La triangulación de ambos tipos de datos permitió obtener una visión integral del fenómeno educativo estudiado.

Como parte de los instrumentos de análisis cualitativo, se diseñó una matriz de caracterización que permitió sistematizar información relevante sobre los estudiantes participantes. Esta herramienta facilitó la lectura pedagógica del grupo, integrando variables como condiciones personales, estilos de aprendizaje y desempeño académico. Su uso fue clave para fundamentar el diseño de la propuesta didáctica y garantizar que respondiera a las necesidades reales del contexto educativo.

Población y muestra

Población

Estudiantes de grado octavo del Colegio Theodoro Hertzl de Envigado, Antioquia, con diversidad en estilos de aprendizaje, trayectorias escolares y condiciones socioemocionales. Se incluyen estudiantes con NEE (TDAH, Asperger), lo que refuerza la pertinencia de una propuesta inclusiva.

La institución seleccionada cuenta con una planta docente comprometida con la innovación pedagógica, y ha manifestado interés en fortalecer sus prácticas en el área de matemáticas mediante estrategias que respondan a las realidades de sus estudiantes.

Muestra

La muestra fue seleccionada mediante un muestreo intencional, considerando criterios de accesibilidad, disposición institucional y relevancia pedagógica. Participaron 28 estudiantes de grado octavo, distribuidos en dos grupos: uno de control y otro experimental. El grupo experimental recibió la intervención didáctica basada en modelos manipulativos, mientras que el grupo de control continuó con la metodología tradicional.

Características relevantes de la muestra

Entre las características más relevantes de la muestra se destacan:

- Presencia de estudiantes con NEE, lo que permitió evaluar la efectividad de estrategias inclusivas.
- Heterogeneidad en el rendimiento académico previo, especialmente en contenidos algebraicos.
- Preferencia por representaciones visuales y manipulativas, según lo evidenciado en el diagnóstico inicial.
- Limitaciones en el acceso a recursos tecnológicos, propias del contexto rural, que fueron consideradas en el diseño de los instrumentos.

Estas características fortalecen la validez contextual de la investigación y permiten proyectar sus resultados hacia escenarios educativos similares.

Etapas de la investigación

La investigación se desarrolló en cuatro etapas secuenciales que permitieron diagnosticar, diseñar, implementar y evaluar una propuesta didáctica orientada al fortalecimiento del

pensamiento matemático en estudiantes de educación media. A continuación, se describen cada una de ellas:

Etapa 1: Diagnóstico Pedagógico Inicial

Se aplicó un instrumento digital (Google Forms) para identificar el nivel de comprensión de conceptos como polinomios, potenciación, área y perímetro. Los resultados permitieron detectar barreras cognitivas, dificultades en el uso de lenguaje matemático y vacíos en la aplicación de procedimientos.

Etapa 2: Análisis de Resultados y Fundamentación Metodológica

A partir del diagnóstico, se realizó un análisis cualitativo y cuantitativo que orientó la selección de estrategias pedagógicas inclusivas. Se incorporaron enfoques como el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), la neuroeducación y metodologías activas como la gamificación, el aula invertida y el aprendizaje basado en proyectos.

Etapa 3: Diseño e Implementación de la Propuesta Didáctica

Propuesta centrada en material concreto para enseñar operaciones con polinomios, productos notables y factorización. Actividades multisensoriales, colaborativas y adaptadas para estudiantes con NEE. Evaluación formativa mediante rúbricas, listas de cotejo y observaciones.

La propuesta se fundamenta en principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), la neuroeducación y el aprendizaje activo, con el propósito de garantizar accesibilidad, participación y significatividad en el proceso de enseñanza. Se parte del reconocimiento de la diversidad cognitiva, sensorial y emocional del grupo, lo cual exige estrategias flexibles, multisensoriales y contextualizadas. El diseño contempla los siguientes componentes:

Fundamentación pedagógica: Se sustenta en enfoques inclusivos que promueven la equidad y la eliminación de barreras para el aprendizaje. La manipulación de material concreto —como fichas algebraicas, bloques geométricos, tarjetas de expresión y modelos tridimensionales— permite representar visual y táctilmente los conceptos abstractos, facilitando su apropiación por parte de todos los estudiantes.

Actividades propuestas: Se diseñaron talleres secuenciales que integran el uso de materiales manipulativos, trabajo colaborativo, resolución de problemas contextualizados y retroalimentación continua. Las actividades incluyen:

- Construcción de modelos de polinomios con fichas de colores.
- Representación de productos notables mediante áreas geométricas.
- Descomposición de expresiones algebraicas usando tarjetas móviles y diagramas.
- Ejercicios adaptados para estudiantes con NEE, considerando apoyos visuales, instrucciones simplificadas y tiempos flexibles.
- Instrumentos de evaluación: Se emplean rúbricas de desempeño, listas de cotejo, autoevaluaciones y observaciones sistemáticas para valorar el nivel de comprensión, la participación activa y la transferencia de los aprendizajes. La evaluación se concibe como un proceso formativo, orientado a identificar avances, dificultades y oportunidades de mejora.

Esta etapa constituye el núcleo transformador de la investigación, al proponer una alternativa pedagógica que responde a la diversidad del aula y que busca humanizar el aprendizaje matemático mediante experiencias concretas, significativas y accesibles para todos.

Material Manipulativo: Álgebra Geométrica como Estrategia Multisensorial

La propuesta didáctica se fundamentó en el uso del álgebra geométrica como recurso manipulativo para facilitar la comprensión de productos notables, polinomios y factorización en estudiantes de grado octavo. Esta estrategia permitió representar expresiones algebraicas mediante configuraciones espaciales, favoreciendo el tránsito entre lo concreto y lo simbólico.

El álgebra geométrica se aplicó a través de actividades que involucraban fichas móviles, tarjetas con términos algebraicos y esquemas de área, diseñados para construir visualmente expresiones como $(x+3)(x+2)$ o x^2+5x+6 . Estas representaciones permitieron a los estudiantes identificar patrones, descomponer estructuras y establecer relaciones entre coeficientes, términos semejantes y factores, desde una experiencia táctil y visual.

La estrategia se articuló con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), ofreciendo múltiples formas de representación y expresión. Los estudiantes interactuaron con los modelos manipulativos en parejas o grupos, verbalizando sus razonamientos y construyendo significados compartidos. Esta dinámica promovió la participación activa, la argumentación matemática y la apropiación progresiva del lenguaje algebraico.

En los Anexos, ver anexo 14.6, se incluyen imágenes del desarrollo de estas actividades, que ilustran el uso del álgebra geométrica como herramienta multisensorial en un contexto inclusivo. Las evidencias visuales permiten comprender cómo esta estrategia contribuyó a superar barreras cognitivas y emocionales, facilitando el acceso a contenidos tradicionalmente abstractos desde una perspectiva concreta, colaborativa y humanizadora.

Etapas 4: Evaluación del Impacto Pedagógico

Se aplicaron instrumentos post-intervención para valorar el efecto de la propuesta. Se utilizaron pruebas estadísticas (t-test, p-valor, tamaño del efecto) para determinar mejoras significativas en el desempeño estudiantil y se realizó un análisis reflexivo sobre los aprendizajes emergentes.

Se elaboraron anexos con los instrumentos utilizados, ejemplos de actividades y evidencias del trabajo realizado, siguiendo las directrices de la UNAD y los criterios éticos de la investigación educativa.

Resultados y Análisis de Datos

Durante el desarrollo de los talleres, se evidenció un aumento significativo en la participación activa, la argumentación matemática y la disposición al trabajo colaborativo. El uso de balanzas algebraicas, regletas y fichas geométricas facilitó la comprensión de conceptos como igualdad, equivalencia y operaciones con expresiones algebraicas.

Los estudiantes con condiciones neurodivergentes respondieron positivamente a las actividades multisensoriales, mostrando avances en la identificación de patrones, la resolución de problemas y la expresión verbal de sus razonamientos. El vínculo entre lo concreto y lo simbólico permitió una transición más fluida hacia la abstracción, especialmente en quienes inicialmente presentaban resistencia frente al lenguaje algebraico tradicional (Duval, 2006).

La observación directa y el registro de evidencias durante los talleres confirmaron que el uso de modelos manipulativos no solo favorece la comprensión conceptual, sino que también fortalece el sentido de pertenencia y la confianza en las propias capacidades.

Resultados y Análisis de la Encuesta (datos personales, aspectos de formación).

La encuesta aplicada a los estudiantes de grado octavo permitió recolectar información sobre sus características personales y aspectos formativos relevantes para el diseño de la propuesta didáctica. A continuación se presentan los principales hallazgos:

Datos personales

Edad promedio: 13.8 años

Género: 57% masculino, 43% femenino

Contexto: 100% estudiantes de zona rural

Diagnósticos reportados: 5 estudiantes con NEE (2 con TDAH, 1 con rasgos de Asperger, 2 con dificultades de aprendizaje no especificadas)

Aspectos de formación:

68% manifestó dificultad para comprender contenidos algebraicos

74% expresó preferencia por actividades visuales y manipulativas

52% indicó que se siente inseguro al resolver ejercicios matemáticos

81% afirmó que aprende mejor cuando puede trabajar en grupo o con apoyo visual

Interpretación pedagógica

Estos datos confirman la necesidad de estrategias multisensoriales, colaborativas y accesibles para la enseñanza del álgebra. La presencia de estudiantes con NEE y la alta preferencia por materiales visuales justifican el uso de álgebra geométrica y recursos manipulativos como eje de la intervención.

Análisis de la Entrevista.

La entrevista semiestructurada aplicada al docente del área de matemáticas permitió identificar percepciones clave sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra. El docente señaló que, en general, los estudiantes presentan resistencia frente a los contenidos abstractos, especialmente cuando se abordan desde una metodología tradicional centrada en la memorización y la repetición.

Asimismo, se destacó la importancia de incorporar estrategias didácticas que vinculen lo concreto con lo simbólico, permitiendo que los estudiantes construyan significados a partir de

experiencias manipulativas (Bruner, 1966; Gravemeijer, 2004). El docente valoró positivamente el uso de materiales como balanzas, regletas y fichas geométricas, señalando que estos recursos favorecen la participación activa y la comprensión progresiva de conceptos algebraicos.

En cuanto a la inclusión educativa, el entrevistado reconoció la necesidad de adaptar las actividades a los estilos de aprendizaje y condiciones particulares de los estudiantes, especialmente aquellos con necesidades educativas especiales. Subrayó que el uso de modelos manipulativos no solo facilita el aprendizaje, sino que también fortalece la autoestima y el sentido de pertenencia al grupo.

La entrevista permitió confirmar que existe una disposición institucional y docente para implementar propuestas metodológicas innovadoras, siempre que estas respondan a las características reales del contexto y se fundamenten en principios pedagógicos sólidos.

Este capítulo demuestra que el aprendizaje significativo es posible cuando se parte de la empatía, la escucha activa y el respeto por las diferencias. Los datos no solo validan la propuesta, sino que la enriquecen, mostrando que enseñar álgebra desde la manipulación concreta y el enfoque inclusivo no es una utopía, sino una realidad alcanzable.

Análisis de Redes Semánticas

La red semántica construida a partir de las respuestas de la entrevista permitió identificar los conceptos más recurrentes en el discurso del docente, así como las relaciones entre ellos. Las palabras con mayor frecuencia fueron: dificultad, comprensión, material, manipulativo, participación e inclusión, lo que evidencia una preocupación constante por los obstáculos que enfrentan los estudiantes y por la búsqueda de estrategias que favorezcan su aprendizaje.

El nodo central de la red se conformó alrededor del término material manipulativo, el cual se conectó con expresiones como comprensión, participación activa, motivación y adaptación. Esta configuración sugiere que el docente reconoce el valor de los recursos concretos como mediadores del aprendizaje, especialmente en contextos donde la abstracción representa una barrera (Godino, Batanero, & Font, 2007).

También se observaron vínculos entre inclusión y necesidades educativas especiales, lo que indica una sensibilidad hacia la diversidad del aula y una disposición a implementar ajustes razonables. La red semántica, en este sentido, no solo revela los conceptos clave del discurso, sino que también permite visualizar la coherencia entre las percepciones del docente y los principios que sustentan la propuesta metodológica.

Análisis de los Diarios de Campo

Los diarios de campo permitieron registrar observaciones directas durante el desarrollo de los talleres, aportando información valiosa sobre las dinámicas de participación, las reacciones emocionales y los procesos de construcción conceptual de los estudiantes. Este instrumento fue clave para comprender cómo se vivió la propuesta metodológica en tiempo real y desde una mirada situada.

Se evidenció que los estudiantes mostraron mayor disposición al trabajo colaborativo cuando se utilizaron materiales manipulativos. Las balanzas algebraicas, regletas y fichas geométricas generaron curiosidad, facilitando la exploración activa y el diálogo entre pares. En los registros se destacan expresiones como “ahora sí entiendo”, “me gusta trabajar con esto” y “lo puedo explicar”, que reflejan una apropiación progresiva del contenido.

También se observó una mejora en la argumentación matemática, especialmente en estudiantes que inicialmente mostraban inseguridad. El uso de modelos concretos permitió que verbalizaran sus razonamientos con mayor claridad, lo que fortaleció su autoestima y su participación en el aula.

Los diarios de campo revelaron que la propuesta no solo impactó el aprendizaje de contenidos, sino también el clima emocional del grupo. La inclusión de actividades multisensoriales y la valoración del proceso individual generaron un ambiente de respeto, confianza y reconocimiento mutuo.

Matriz de Caracterización

Los datos organizados en la matriz evidencian una diversidad significativa en cuanto a estilos de aprendizaje, niveles de comprensión matemática y condiciones personales. Se identificaron estudiantes con alta sensibilidad emocional, otros con diagnósticos de neurodivergencia, y varios con trayectorias escolares marcadas por experiencias de exclusión o baja autoestima.

En cuanto a los estilos de aprendizaje, predomina el canal visual, seguido del kinestésico. Esta información fue determinante para seleccionar materiales manipulativos que facilitaran la comprensión de contenidos algebraicos. Asimismo, se observó que los estudiantes con mayor dificultad en el lenguaje simbólico lograron avances cuando se les ofrecieron apoyos concretos y visuales.

Tabla 2 *Matriz de caracterización*

N°	Edad	Grado	Género	Condiciones particulares	Estilo de aprendizaje	Nivel de desempeño	Actitud frente al área
1	13	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
2	12	8°	Femenino	TDHA	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa
3	13	8°	Masculino	Discapacidad auditiva	Manipulativo / concreto	Medio	Neutra
4	14	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
5	13	8°	Masculino	Dificultades de aprendizaje	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa

6	12	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
7	14	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
8	13	8°	Femenino	TDHA	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa
9	12	8°	Masculino	Discapacidad visual	Manipulativo / concreto	Medio	Neutra
10	14	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
11	13	8°	Masculino	Dificultades de aprendizaje	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
12	12	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
13	13	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Neutra
14	14	8°	Femenino	Discapacidad auditiva	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa
15	12	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
16	13	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
17	14	8°	Masculino	TDHA	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa
18	12	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
19	13	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Neutra
20	14	8°	Femenino	Dificultades de aprendizaje	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa

21	12	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
22	13	8°	Femenino	Discapacidad visual	Manipulativo / concreto	Medio	Neutra
23	14	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
24	12	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
25	13	8°	Masculino	TDHA	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa
26	14	8°	Femenino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Positiva
27	12	8°	Masculino	Ninguna	Manipulativo / concreto	Medio	Neutra
28	13	8°	Femenino	Dificultades de aprendizaje	Manipulativo / concreto	Medio	Negativa

Nota 2. Matriz de caracterización. Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en la intervención.

La matriz también permitió identificar factores externos que afectan el rendimiento académico, como la sobrecarga familiar, el acceso limitado a recursos tecnológicos y la falta de acompañamiento en casa. Estos elementos fueron considerados al momento de diseñar las actividades, procurando que fueran accesibles, motivadoras y adaptables.

Finalmente, la caracterización evidenció que el grupo requiere estrategias que reconozcan la diversidad sin etiquetar, que promuevan el respeto mutuo y que valoren el proceso individual de cada estudiante. Esta mirada ética y contextual orientó toda la propuesta metodológica.

Conclusiones

Conclusiones Generales

La implementación de modelos manipulativos en el aprendizaje del álgebra permitió evidenciar mejoras significativas en la comprensión conceptual, la participación activa y la argumentación matemática de los estudiantes. El uso de materiales concretos facilitó la transición hacia lo simbólico, especialmente en quienes presentaban dificultades para abordar contenidos abstractos.

La propuesta metodológica demostró ser pertinente en contextos de diversidad, al adaptarse a distintos estilos de aprendizaje y condiciones personales. Los estudiantes con necesidades educativas especiales respondieron positivamente a las actividades multisensoriales, mostrando avances en la expresión verbal, la resolución de problemas y la confianza en sus capacidades.

El enfoque inclusivo, centrado en el proceso y no en el resultado, generó un ambiente de respeto, colaboración y reconocimiento mutuo. La evaluación formativa, basada en la observación, la retroalimentación y el uso de rúbricas adaptadas, permitió valorar los avances individuales sin recurrir a juicios estandarizados.

Conclusiones Específicas

- La caracterización inicial fue clave para diseñar estrategias ajustadas a las necesidades reales del grupo.
- Los materiales manipulativos favorecieron la comprensión de contenidos algebraicos y el trabajo colaborativo.

- La inclusión de actividades multisensoriales fortaleció la autoestima y la participación de estudiantes con condiciones neurodivergentes.
- La entrevista al docente confirmó la pertinencia de la propuesta y la disposición institucional para innovar en la enseñanza del álgebra.
- Los diarios de campo evidenciaron un cambio positivo en el clima emocional del aula y en la relación de los estudiantes con las matemáticas.
- La red semántica reveló coherencia entre el discurso docente y los principios pedagógicos de la intervención.

En síntesis, esta investigación confirma que el uso de materiales manipulativos y estrategias multisensoriales no solo facilita la comprensión del lenguaje algebraico, sino que transforma el aula en un espacio más inclusivo, participativo y emocionalmente seguro. El valor agregado del proyecto radica en demostrar que es posible enseñar álgebra desde una mirada situada, ética y respetuosa de la diversidad, sin renunciar al rigor conceptual ni a la profundidad pedagógica.

Recomendaciones.

Recomendaciones Pedagógicas

- Promover el uso de materiales manipulativos en la enseñanza del álgebra, especialmente en los primeros momentos de aproximación al lenguaje simbólico.
- Diseñar actividades que vinculen lo concreto con lo abstracto, favoreciendo la construcción de significados desde la experiencia.
- Incorporar estrategias multisensoriales que respondan a los distintos estilos de aprendizaje presentes en el aula.
- Fomentar la argumentación matemática como parte del proceso, valorando la verbalización de ideas y el diálogo entre pares.
- Priorizar la evaluación formativa, centrada en el proceso y en la retroalimentación ética, evitando juicios estandarizados que afecten la autoestima.

Recomendaciones Metodológicas

- Utilizar instrumentos de caracterización para conocer trayectorias escolares y estilos de aprendizaje.
- Integrar materiales manipulativos como recurso permanente en la planificación didáctica.
- Registrar evidencias mediante diarios de campo, rúbricas adaptadas y observaciones directas, para valorar avances individuales con mayor precisión.
- Diseñar secuencias didácticas flexibles, que permitan ajustes razonables sin perder el rigor conceptual.
- Incorporar entrevistas docentes como insumo para validar la pertinencia y viabilidad de las propuestas.

Recomendaciones Institucionales

- Generar espacios de formación docente sobre el uso de materiales manipulativos y estrategias inclusivas en matemáticas.
- Promover una cultura evaluativa centrada en el proceso, la argumentación y el reconocimiento emocional.
- Fortalecer el acompañamiento a estudiantes neurodivergentes, garantizando accesos reales a los contenidos.
- Reconocer la diversidad como valor pedagógico, evitando prácticas que etiqueten o excluyan.
- Establecer diálogo entre docentes, directivos y familias para construir propuestas sostenibles.

Estas recomendaciones no constituyen recetas, sino caminos posibles para construir una educación matemática más inclusiva, situada y humanizadora.

Referencias Bibliográficas

- Arteaga, B., & Macías, J. (2016). *Didáctica de las Matemáticas*. Universidad Internacional de La Rioja-UNIR.
- Barkley, R. A. (2013). *Trastorno por déficit de atención e hiperactividad: Guía completa para el diagnóstico y tratamiento*. Editorial Paidós.
- Ballén Novoa, J. O. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*. Universidad Nacional de Colombia.
<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10836>
- Brookhart, S. M. (2013). *How to create and use rubrics for formative assessment and grading*. ASCD
- Campbell, D. T., & Stanley, J. C. (1963). *Experimental and quasi-experimental designs for research*. Houghton Mifflin.
- Casanova, J., & Domínguez, R. (2018). *Educación inclusiva: Aportes y desafíos en contextos escolares*. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 20(2), 28–40. <https://rieoei.org>
- CAST (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*.
<http://udlguidelines.cast.org>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Routledge.
- Colombia. (1991). *Constitución política de Colombia*. Impr. Nacional.

- Cortés, O. P., & Gómez, L. G. (2017). *Del enseñar y el aprender. Praxis & Saber*, 8(18), 9-14.
http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2216-01592017000300009
- Cobeñas, P., Grimaldi, V., Broitman, C., Sancha, I., & Escobar, M. (2021). *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad*. Educación.
<http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/115580>
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). SAGE Publications.
- Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. SAGE Publications.
- Denzin, N. K. (1978). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- Duval (2006) - Registros Semióticos en Matemáticas Duval, R. (2006). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Geary, D. C. (2013). *Early foundations for mathematics learning and their relations to learning disabilities*. *Current Directions in Psychological Science*, *22*(1), 23-27.
<https://doi.org/10.1177/0963721412469398>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Fundamentos de la enseñanza de las matemáticas*. Universidad de Granada.
- Gómez Medina, G. (2016). *Uso del material manipulativo en la comprensión del álgebra en estudiantes de grado octavo*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Bucaramanga]

https://repository.unab.edu.co/bitstream/handle/20.500.12749/2574/2016_Presentacion_Gerardo_Gomez_Medina.pdf

González-Ortega, O. (2022). *Matemáticas manipulativas en secundaria*. [Trabajo de fin de máster, Universidad de Alcalá].

https://ebuah.uah.es/dspace/bitstream/handle/10017/53973/TFM_Oliver_Gonzalez_Ortega_2022.pdf

Grandin, T., & Panek, R. (2014). *El cerebro autista: Pensamiento visual, dones especiales y desafíos de la vida moderna*. RBA.

González, M. J. (2011). *Estudiantes con inteligencia limítrofe: características y propuestas educativas*. *Revista Iberoamericana de Educación*, 55(2), 1–10. <https://rieoei.org>

Gutiérrez-Saldivia, X. D., Barría, C. M., & Tapia, C. P. (2020). *Diseño universal para el aprendizaje de las matemáticas en la formación inicial del profesorado*. *Formación Universitaria*, 13(6), 129-142. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000600129>

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. SAGE Publications.

Laborde, C. (2002). *The challenge of symbolic thinking in mathematics*. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Creta, Grecia.

Márquez Sarmiento, A. (2022). *Estrategias inclusivas en la enseñanza del álgebra: Uso de material concreto para la conceptualización matemática* [Tesis de maestría, Universidad Nacional]. Repositorio Académico.

Marmolejo, A. (2020). *Aplicación del DUA a la matemática*. Genially.

<https://view.genially.com/5f7549006b5d2f0d04c7492a/interactive-content-aplicacion-del-dua-a-la-matematica>

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*.

<https://www.mineduccion.gov.co>

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas*.

Volumen 1. Grados 1° a 6°; Volumen 2. Grados 7° a 11°.

https://www.mineduccion.gov.co/1759/articles-357787_recurso_1.pdf

Miranda López, L. F. (2024). *DUA una Estrategia para Potenciar la Enseñanza de las Matemáticas en la Institución Educativa Técnica General Santander del Municipio de Rioblanco, Tolima*. [Tesis de maestría, Universidad del Tolima].

<https://repository.ut.edu.co/entities/publication/f4c0df42-3299-463f-bf23-1e0c40caf482>

Parra, D. J. L., Bandera, E. E., & Arjona, D. C. (2016). Necesidades específicas de apoyo educativo en el alumnado con capacidad intelectual límite: aspectos para su intervención psicopedagógica. *Summa Psicológica UST*, 13(2), 33-44.

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5763555>

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*. *Educational Studies in Mathematics*, 62(1), 1–22.

- Romero Silva, C. P., Tapia Vaca, A. F., Rojas Nuñez, M. del P., Borja Santi, H. R., Monroy Yazan, K. M., & Guanangui Grijalva, A. del R. (2024). Diseño universal de aprendizaje como herramienta didáctica en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación General Básica. Dialnet. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/download/articulo/9769448.pdf>
- Salvador-Carulla, L., García-Gutiérrez, J. C., Gutiérrez-Colosía, M. R., Artigas-Pallarès, J., Ibáñez, J. G., Pérez, J. G., ... & Martínez-Leal, R. (2013). Funcionamiento intelectual límite: guía de consenso y buenas prácticas. *Revista de psiquiatría y salud mental*, 6(3), 109-120. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1888989112002121>
- Rojas-Ferreira, R. E. (2016). Aproximación a las Discapacidades Específicas de Aprendizaje en la competencia Matemática en el contexto educativo colombiano. *Eco matemático*, 7(1), 121-140.
- Universidad Nacional de Colombia. (s.f.). *Código de ética y buenas prácticas en la investigación*. Recuperado de: <https://investigacionyextension.medellin.unal.edu.co/2-institucional/219-codigo-de-etica-y-buenas-practicas-en-la-investigacion-de-la-universidad-nacional-de-colombia-sede-medellin.html>

Apéndices

Los anexos que se presentan a continuación contienen los instrumentos, guías, fichas de actividades, materiales manipulativos y evidencias que respaldan el desarrollo metodológico y pedagógico de esta investigación. Estos recursos fueron diseñados e implementados en el marco de la propuesta didáctica centrada en el uso de material concreto para la enseñanza de productos notables y factorización en estudiantes de grado octavo con Necesidades Educativas Especiales (NEE).

Cada anexo cumple una función específica dentro del proceso investigativo: desde el diagnóstico inicial hasta la evaluación final, pasando por la implementación de actividades basadas en el álgebra geométrica. Su inclusión permite no solo validar la intervención realizada, sino también ofrecer herramientas replicables para otros contextos educativos que busquen una enseñanza del álgebra más inclusiva, visual y significativa.

Apéndice	Título del documento	Descripción breve
1	Instrumento diagnóstico	Formulario aplicado para evaluar conocimientos previos y percepciones matemáticas.
2	Guía de actividad: Reconocimiento del álgebra geométrica	Ficha inicial para explorar el material manipulativo y

		activar conocimientos previos.
3	Ficha de trabajo: Modelación de áreas con polinomios	Actividad para representar expresiones algebraicas mediante figuras geométricas.
4	Ficha de trabajo: Suma y resta de polinomios	Actividad con modelos físicos para identificar términos semejantes y operar polinomios.
5	Ficha de trabajo: Descubrimiento de productos notables	Actividad para representar binomios al cuadrado mediante construcción de áreas.
6	Rúbrica de evaluación formativa	Instrumento para valorar comprensión, participación y argumentación matemática.

Tabla 3 *Lista de Apéndices*

Apéndice A *Consigna Polinomios*

El propósito de la siguiente actividad es reconocer el concepto de expresión algebraica.

Indicador de Logro: Identifica las características de los polinomios y los nombra según el número de términos y reconoce el valor numérico de un polinomio.

¿Qué son las expresiones algebraicas?

Las expresiones algebraicas son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar. Funcionan todas las reglas aritméticas que hemos aprendido hasta ahora, solo que algunos números son sustituidos por letras que pueden recibir distintos valores.

Un ejemplo de la utilidad de las expresiones algebraicas sería, por ejemplo, las fórmulas que conocemos para encontrar el área de una figura o para obtener nuevas fórmulas. Como sabemos que el volumen de los prismas y los cilindros es el área de la base (A_b) por la altura (h) $V = A_b \cdot h$, podremos sustituir en esa fórmula el área de la base. Si sabemos que la base es un círculo, $A_b = \pi r^2$ podremos sustituir y escribir en una sola fórmula que el volumen del cilindro es $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Aplicaciones en el mundo real.

Las expresiones algebraicas tienen numerosas aplicaciones en el mundo real. Algunos ejemplos incluyen:

Física: En la descripción de leyes y fenómenos físicos, como la ley de gravitación universal o las ecuaciones del movimiento.

Economía: En la modelización de problemas financieros, como el cálculo de intereses, beneficios o depreciación.

Ingeniería: En el diseño y análisis de estructuras, circuitos eléctricos o sistemas de control.

Ciencias de la computación: En algoritmos y programación, donde las expresiones algebraicas se utilizan para realizar cálculos y tomar decisiones.

Actividad: Expresa en lenguaje matemático (algebraico) cada uno de los siguientes enunciados:

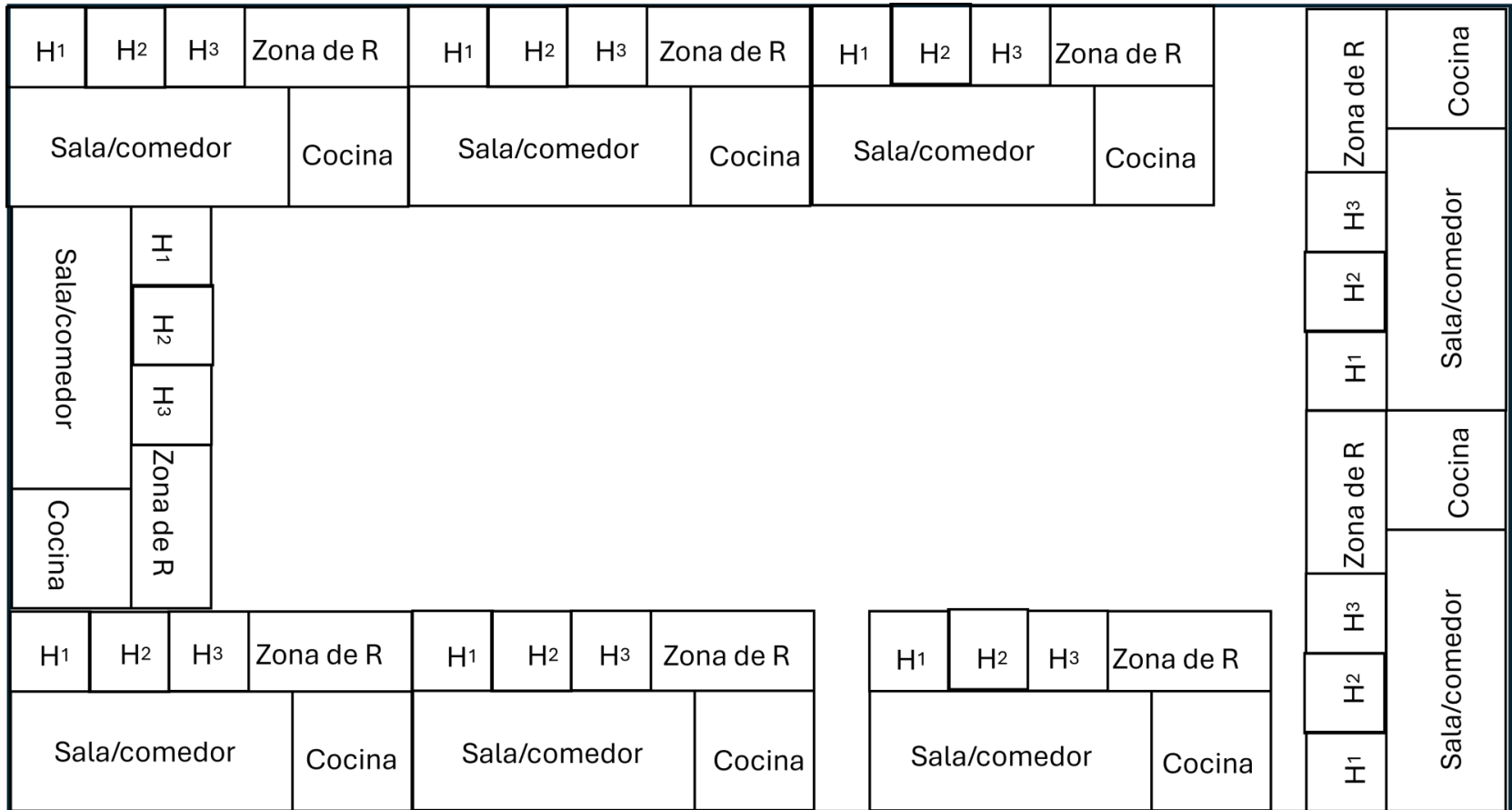
- i. El 30% de un número _____.
- ii. El área de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida _____.
- iii. El perímetro de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida _____.
- iv. El doble del resultado de sumarle a un número entero su siguiente _____.
- v. El triple del resultado de sumar un número con su inverso _____.
- vi. El doble de la edad que tendré dentro de cinco años _____.
- vii. El quíntuplo del área de un cuadrado de lado x _____.
- viii. El área de un triángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura _____.
- ix. La mitad del resultado de sumarle 3 a un número _____.
- x. La tercera parte del área de un rectángulo en el que la base mide el doble que la altura _____.
- xi. El cuadrado de la suma de dos números enteros consecutivos _____.
- xii. La media de un número y su cuádruplo _____.
- xiii. La cuarta parte de un número entero más el cuadrado de su siguiente _____.

- xiv. El perímetro de un triángulo isósceles del que sabemos que su lado desigual mide 4 cm menos que cada uno de los dos lados iguales _____.
- xv. La diagonal de un cuadrado de lado x _____.
- xvi. El doble de la edad que tenía hace 7 años _____.
- xvii. La suma de tres números enteros consecutivos _____.

Actividad: Un ingeniero civil propone la siguiente distribución para diseñar casas.

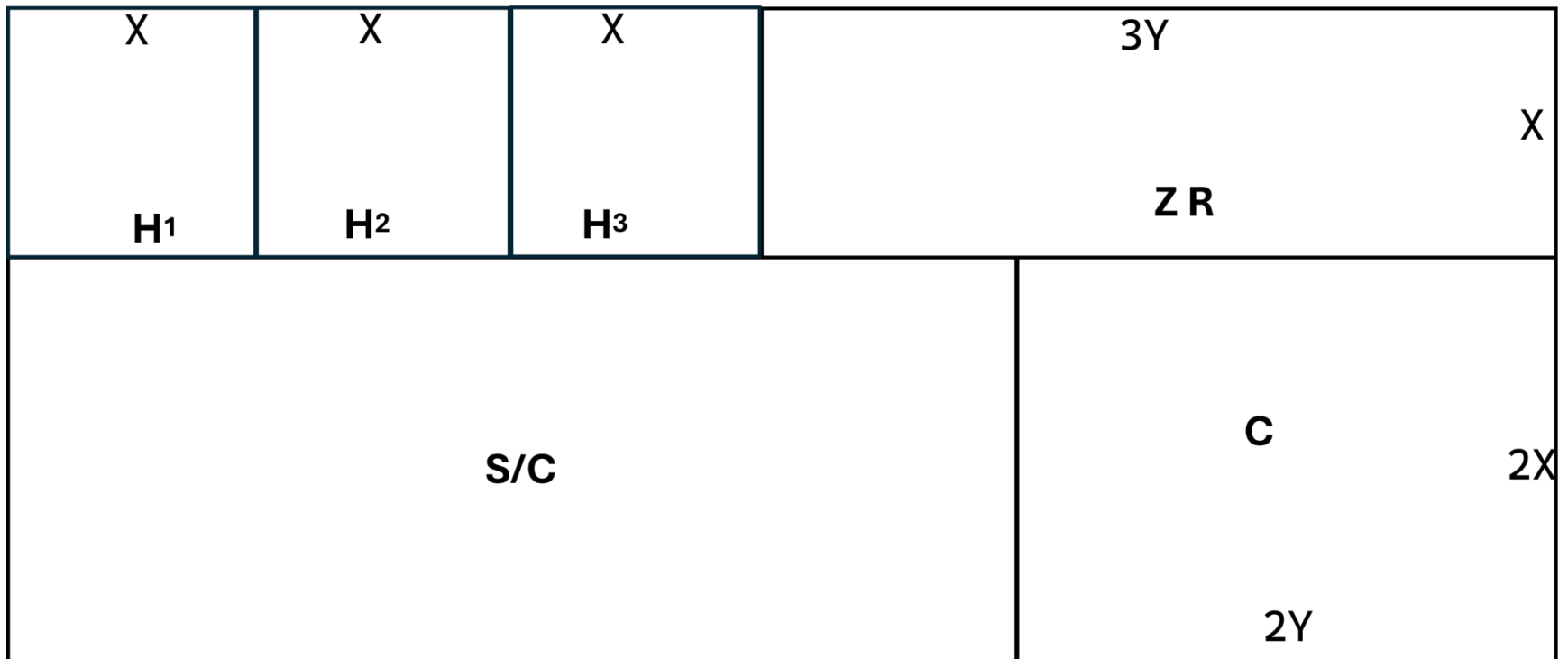
H1	H2	H3	Zona de R
Sala/comedor			Cocina

Esta propuesta se debe aplicar a un terreno rectangular de dimensiones “desconocidas”



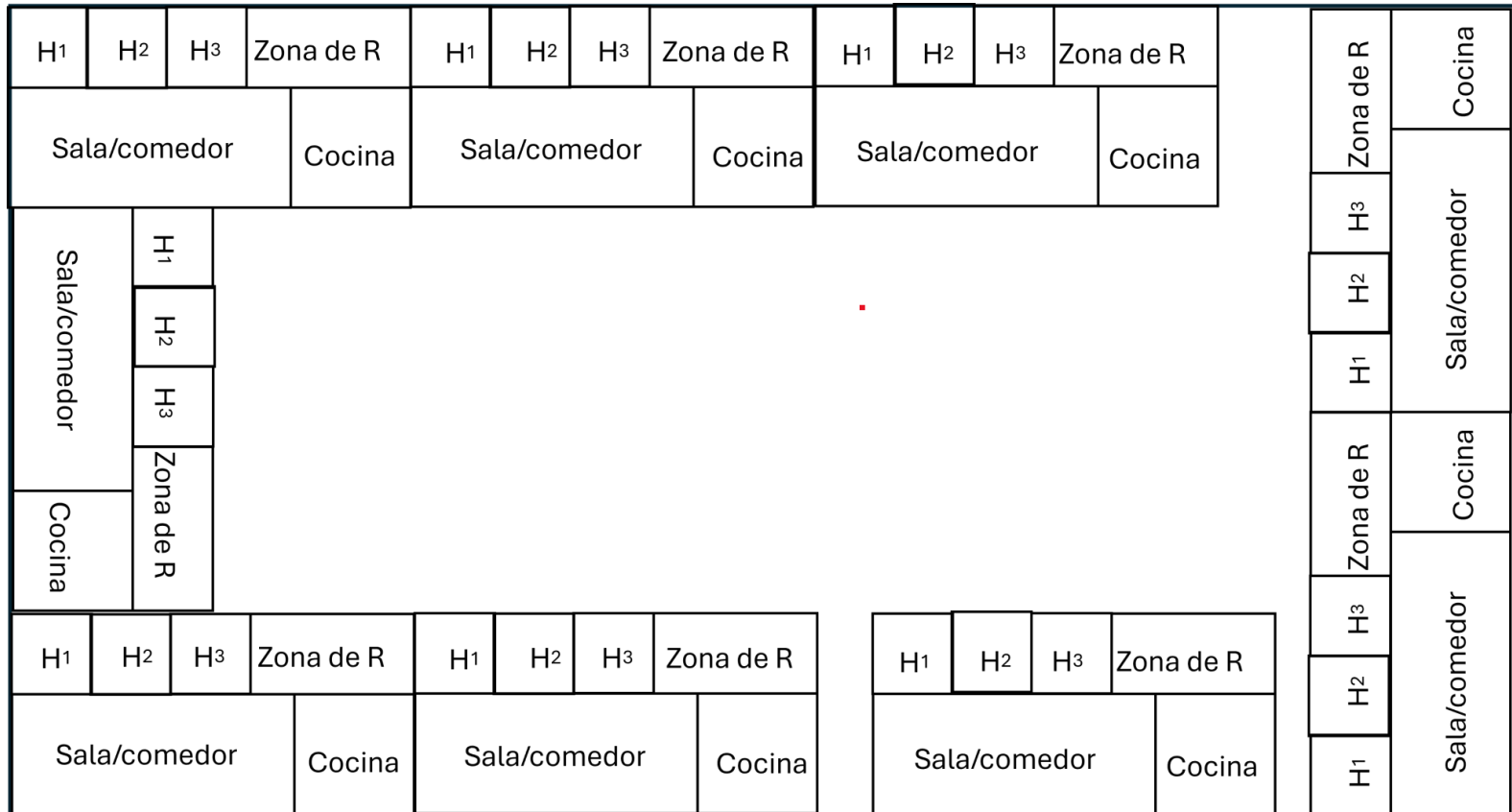
Actividad: Un ingeniero civil propone la siguiente distribución para diseñar una casa.

Este plano tiene tres habitaciones (H_1 , H_2 , H_3); una zona de ropas (ZR); una sala/comedor (S/C) y una cocina (C)



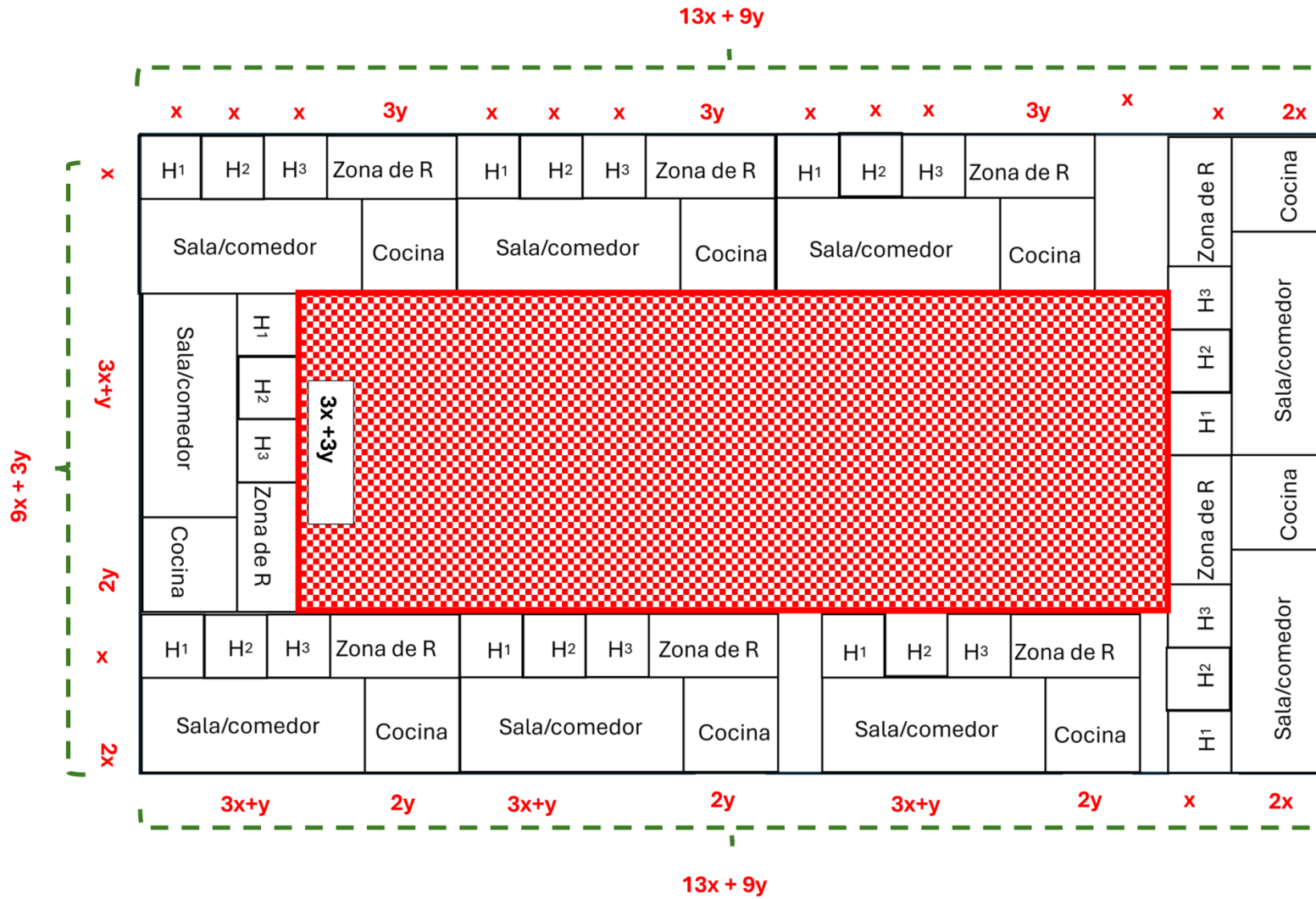
Encuentra el área y perímetro de las distribuciones que propone el arquitecto

Actividad 3: Esta propuesta se debe aplicar a un terreno rectangular de dimensiones “desconocidas”.




Según la información de la actividad 2:

- i) Qué dimensiones tiene el terreno.
- ii)Cuál es su perímetro.
- iii) Cuántas unidades cuadradas cubren las casas.
- iv) Que superficie del terreno no estará construida.



Apéndice B Reconocimiento del Álgebra Geométrica a través de Polinomios

Consigna: Reconocimiento del álgebra geométrica a través de polinomios.

	Consigna Polinomios 1.	Fecha:
Nombre del Equipo		
Integrantes		

Consigna de Exploración

Observa el material que se encuentra en la mesa, recibe el nombre de *álgebra geométrica*, está conformada por cuadrados y rectángulos.

Actividad 1.

Organiza el material sobre la mesa de trabajo.


Actividad 2.

¿Será posible que una de las figuras que conforma el material se pueda completar con las demás?

¿Cuál?

Apéndice C Reconocimiento del Álgebra Geométrica

Consigna: Reconocimiento del álgebra geométrica a través de polinomios.

	Consigna Polinomios 1.	Fecha:
Nombre del Equipo		
Integrantes		

Consigna de Exploración

Observa el material que se encuentra en la mesa, recibe el nombre de *álgebra geométrica*, está conformada por cuadrados y rectángulos.

Actividad 1.

Organiza el material sobre la mesa de trabajo.

Actividad 2.

¿Será posible que una de las figuras que conforma el material se pueda completar con las demás?

¿Cuál?

Apéndice D Operaciones con Polinomios

Consigna: Suma y resta de polinomios con modelos manipulativos

Estándares

Pensamiento variacional: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Pensamiento numérico: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Pensamiento espacial: Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Actividad de Refuerzo

1. Resuelva las siguientes preguntas:

¿Por qué no son semejantes los monomios $8xy^3$ y $-6x^3y$? Expliquen.

De dos ejemplos más de monomios semejantes y un ejemplo de monomios que no sean semejantes.

2. Si el ahorro de Gabriel para comprar la bicicleta se determina por la expresión:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 10.000$, Cuánto dinero tiene ahorrará si tiene \$58.000.

3. Escriba una expresión algebraica que represente cada situación.

- a) La vereda Los Cauchos tiene 120 km² más que la vereda Timbayá.
- b) El área que ocupa la caseta de los comestibles, en la escuela tiene forma de triángulo rectángulo. La base y la altura de ese triángulo difieren entre sí en 5 metros. Si la altura mide h unidades, ¿cuál es la base?
- c) En un puesto de frutas, una mandarina cuesta el doble de una naranja y una manzana el triple de una mandarina. Si x es el precio de las naranjas, ¿Cuál es el precio de la mandarina y de la manzana?
4. Escriba en cada caso, los exponentes que hacen falta para tener términos semejantes en cada una de las parejas de monomios dados.

a. $7x^2, -9x$

b. $\frac{12}{17}xy^6, \frac{8}{9}y^4$

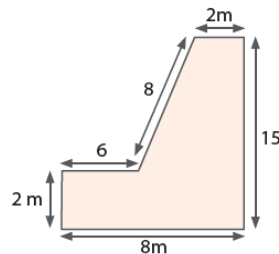
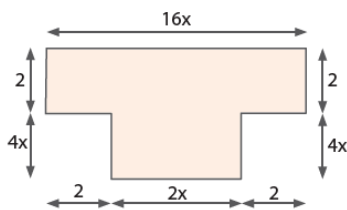
c. $-11w^6z^2, 4w^2z^2$

5. Reduzca o simplifique, en cada caso, los términos semejantes.

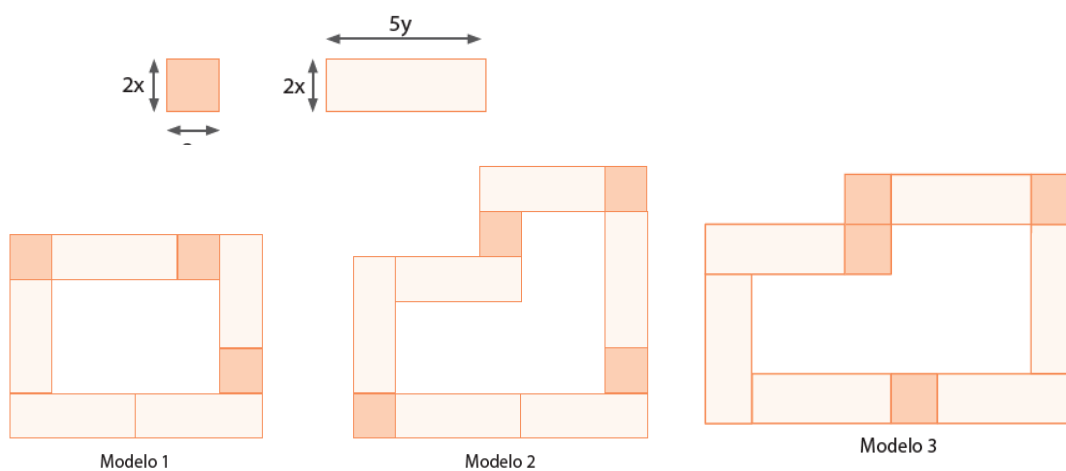
a. $\frac{4}{5}a^3b^2 + \frac{7}{2}a^2b^3 - \frac{1}{4}a^3b^2 + \frac{5}{3}a^2b^3$

b. $-7m^2n^2 - \frac{4}{3}m^2n^2 + 8m^2n^2 + 8m^2n^2$

6. El perímetro de una figura es la suma de la longitud de los lados. Encuentren el perímetro de cada figura, reduciendo términos semejantes.



7. Con dos figuras como las siguientes:



Encuentra el perímetro cada uno de los tres modelos, hallando un polinomio que lo represente.

¿Cuál modelo tiene el mayor perímetro? ¿Por qué?

8. Encuentren el inverso aditivo de cada una de las siguientes expresiones.

a. -8

b. $-a$

c. $5b$

d. $(5 + 4)$

e. $(x + y)$

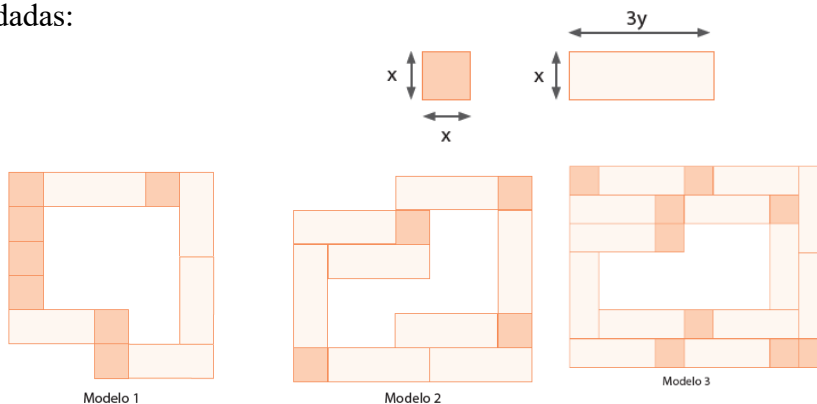
f. $(x - y)$

g. $-(m + n)$

h. $-(m - n)$

i. $-(-8 - u)$

Con las fichas, construyen los modelos y determinen el área y perímetro de cada una de las figuras dadas:



Apéndice E *Descubrimiento de Productos Notables Mediante Álgebra Geométrica***Consigna de Aprendizaje: Productos Notables**

Actividad: Representa con la ayuda del *álgebra geométrica* representa como cuadrilátero los siguientes polinomios:

A) $x^2 + 6x + 9$

B) $x^2 + 8x + 16$

C) $x^2 + 4x + 4$

D) $x^2 + 2x + 1$

Actividad: De acuerdo con la representación de los ejercicios de la **Actividad 1**, responde.

i) ¿Qué cuadrilátero representa cada literal?

ii) ¿Cómo se encuentra el área de cada uno de los cuadriláteros?

iii) ¿Cuál es la medida de los lados de los cuadriláteros?

iv) ¿Cuál es el área de cada uno de los cuadriláteros?

Actividad: Representa gráficamente los siguientes binomios.

a) $(x + 5)^2$ b) $(x + 2)^2$ c) $(x + 6)^2$

1) ¿Qué cuadrilátero representa cada literal?

¿Se podría saber que figura representa sin necesidad de dibujarla?, ¿Por qué?

b) ¿Cómo se encuentra el área de cada uno de los cuadriláteros?

c) ¿Cuál es la medida de los lados de los cuadriláteros?

Apéndice F Ejemplo de Actividades Desarrolladas

Actividad

Representar geométricamente los siguientes productos

a) $(m+3)(m+5)$
 b) $(b+4)(b+2)$
 c) $(c+6)(c+1)$

Respuestas

Representar los siguientes productos

a) $(m+3)(m+5)$
 b) $(b+4)(b+2)$
 c) $(c+6)(c+1)$

Respuestas

actividad

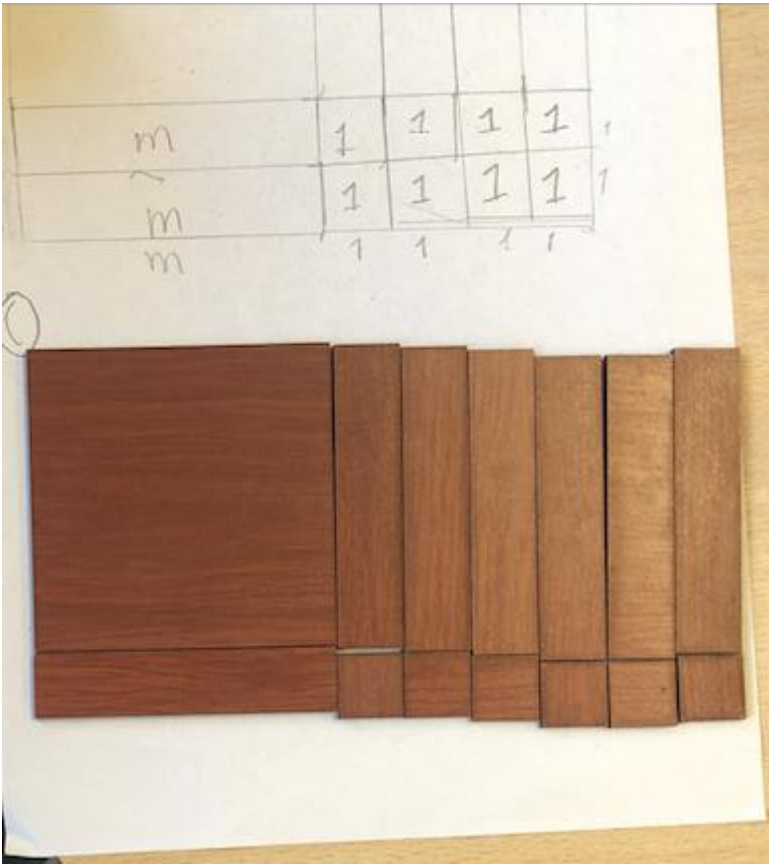
Representa geométricamente los sgtes
Productos

(a) $(m+3)(m+5)$

(b) $(b+4)(b+2)$

(c) $(c+b)(c+1)$





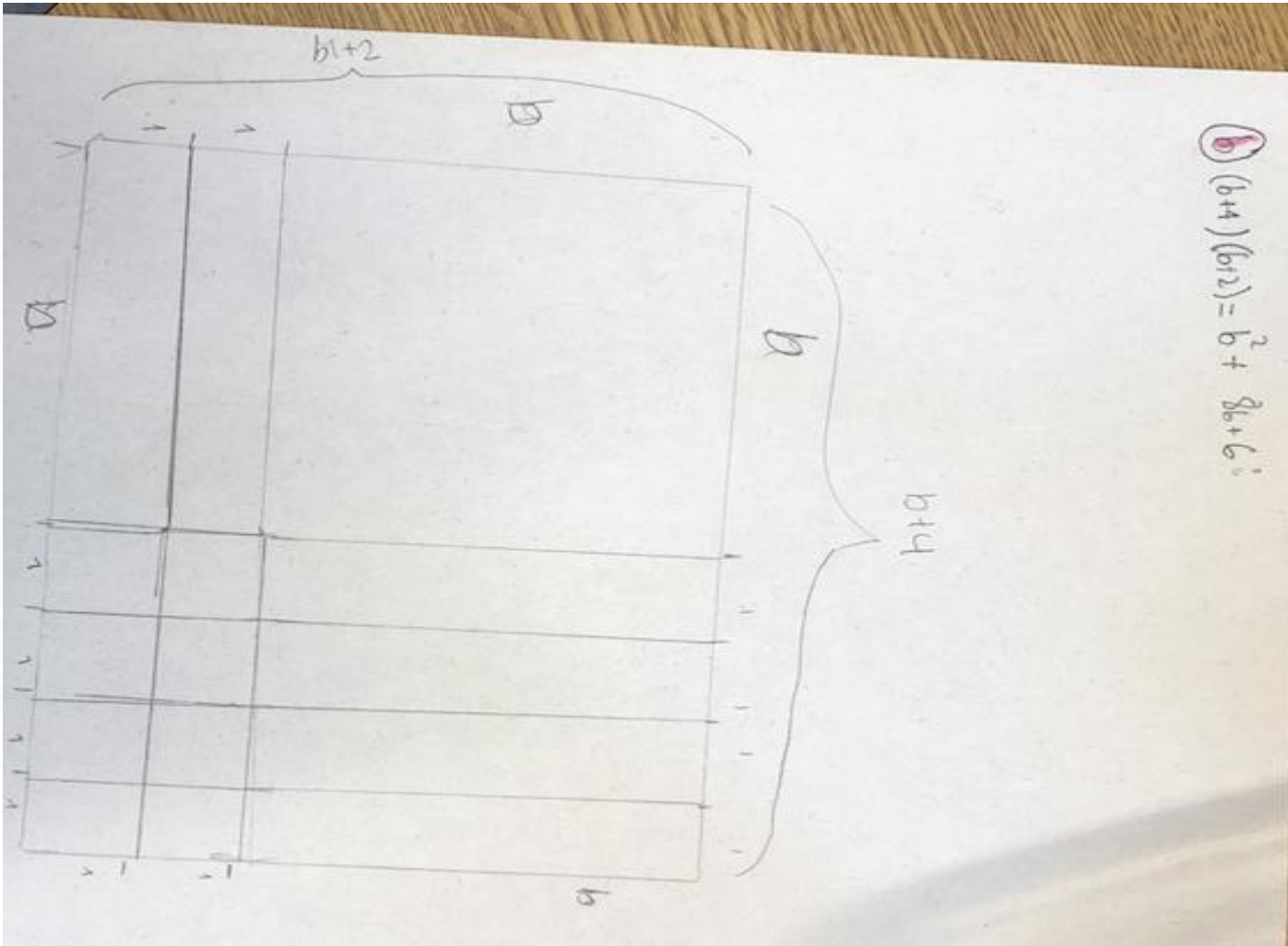


Nicolas Angel Perez
 Belen Fernandez
 Isaac Miranda
 Vicente Zapata

Actividad: Representa geometrica/los sig productos:

a. $(a+3)^2 =$ b. $(m+5)^2 =$

c. $(n+4)^2 =$



$$\textcircled{b} (b+4)(b+2) = b^2 + 8b + 8$$

Actividad: Representa geométrica los siguientes productos
 a) $(m+3)(m+5) = m^2 + 8m + 15$

m^2						
	m	m	m	m	m	
m	1	1	1	1	1	
m	1	1	1	1	1	
m	1	1	1	1	1	

b) $(b+4)(b+2) = b^2 + 6b + 8$

b^2				
	b	b	b	b
	1	1	1	1
b	1	1	1	1
b	1	1	1	1