

**Procesos semióticos y construcción cognitiva en torno al aprendizaje de la función lineal:
una investigación mediada por GeoGebra en noveno grado.**

Víctor Luis Lora Carrasquilla

Yenny Katherine Santamaría Medina

Directora

María Alejandra Solano Delgado

Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD

Escuela de Ciencias de la Educación ECEDU

Maestría en Educación Matemática

2026

Resumen

Este estudio analiza la evolución de los procesos de conversión y tratamiento semiótico, así como las estructuras de construcción de pensamiento de estudiantes de noveno grado del Centro de Educación El Recreo en Cartagena, Colombia, durante una intervención didáctica mediada por GeoGebra para el aprendizaje de la función lineal. La investigación adopta un enfoque cualitativo-interpretativo enmarcado en la Investigación-Acción Educativa (IAE), e integra la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1993, 2004, 2006) y la Teoría APOE de Dubinsky (1991) y Arnon et al. (2014). Participaron 32 estudiantes, con análisis en profundidad de ocho casos focales seleccionados mediante muestreo intencional. La intervención comprendió una evaluación diagnóstica, tres secuencias didácticas mediadas por GeoGebra y una evaluación final. Los datos se recolectaron mediante un diario de campo, una rúbrica de síntesis TRRS-APOE y una conversación de cierre documentada. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes progresó de la estructura mental Acción a la estructura mental Proceso, especialmente en la coordinación del registro algebraico-gráfico; un porcentaje menor alcanzó indicios de la estructura mental Objeto y sólo uno de los casos focales evidenció coherencia incipiente con la estructura mental Esquema. El obstáculo semiótico más recurrente fueron las conversiones no congruentes del registro verbal al algebraico en contextos de modelación. El marco analítico simultáneo TRRS-APOE ofreció interpretaciones más precisas y pedagógicamente útiles que cada teoría por separado, aportando a la educación matemática en un contexto secundario del Caribe colombiano.

Palabras clave: Funciones lineales, registros de representación semiótica, APOE, GeoGebra, pensamiento variacional.

Abstract

This study analyzes the evolution of semiotic conversion and treatment processes, as well as the mental structures of knowledge construction of ninth-grade students at the Centro de Educación El Recreo in Cartagena, Colombia, during a GeoGebra-mediated didactic intervention for the learning of linear functions. The research adopts a qualitative-interpretive approach grounded in Educational Action Research (EAR), and integrates the Theory of Semiotic Representation Registers (TSRR) by Duval (1993, 2004, 2006) and the APOS Theory by Dubinsky (1991) and Arnon et al. (2014). Thirty-two students participated, with in-depth analysis of eight focal cases selected through intentional sampling. The intervention comprised a diagnostic assessment, three GeoGebra-mediated didactic sequences, and a final evaluation. Data were collected through a field journal, a TSRR–APOS synthesis rubric, and a documented closing conversation. The results indicate that the majority of students progressed from the Action mental structure to the Process mental structure, particularly in the coordination of the algebraic-graphical register; a smaller proportion reached early indicators of the Object mental structure, and only one of the focal cases evidenced incipient coherence with the Schema mental structure. The most recurrent semiotic obstacle was non-congruent conversions from the verbal to the algebraic register in modeling contexts. The simultaneous TSRR–APOS analytical framework provided more precise and pedagogically useful interpretations than either theory in isolation, contributing to mathematics education in a secondary school context in the Colombian Caribbean.

Keywords: Linear functions, semiotic representation registers, APOS, GeoGebra, variational thinking.

Tabla de contenido

Introducción	13
Planteamiento del problema.....	15
Pregunta de Investigación.....	18
Justificación	19
Objetivos	22
Objetivo General.....	22
Objetivos Específicos	22
Antecedentes de Investigación.....	23
Estudios Sobre el Concepto de Función Lineal en la Didáctica de las Matemáticas	23
Estudios Relacionados con los Registros de Representación Semiótica en Torno al Aprendizaje de la Función Lineal	25
Estudios Relacionados con el Aprendizaje de la Función Lineal desde la Teoría APOE.....	27
Estudios Relacionados con la Mediación Tecnológica de GeoGebra para el aprendizaje	29
Marco Teórico.....	32
La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) como Eje Central	32
Fundamentos epistemológicos.....	32
Registros semióticos y sus funciones cognitivas	33
Transformaciones semióticas: tratamiento y conversión.....	34
Paradoja cognitiva de Duval y su implicación didáctica	35
La Teoría APOE como Complemento Cognitivo.....	36
Fundamentos y estructura	36
Mecanismos de construcción: interiorización, encapsulación y coordinación.....	38

Descomposición genética inicial de la función lineal.....	40
Articulación entre la TRRS y la Teoría APOE.....	42
Mediación Tecnológica con el Software GeoGebra.....	44
La función lineal.....	46
Marco metodológico.....	49
Enfoque de la Investigación.....	49
Diseño Metodológico.....	50
Alcance de la Investigación.....	52
Contexto del Estudio.....	52
Población y Muestra.....	54
Estructura General del Diseño.....	55
Fases de la Investigación.....	55
Fase 1. Diagnóstico inicial.....	56
Fase 2. Diseño de la propuesta didáctica.....	56
Fase 3. Implementación de las secuencias didácticas.....	57
Fase 4. Evaluación final.....	58
Fase 5. Análisis e interpretación de los datos.....	58
Instrumentos de recolección de datos.....	59
Análisis Teórico Previo a la Intervención.....	62
Categorías de análisis.....	63
Situaciones semióticas anticipadas desde la TRRS.....	64
Conversiones congruentes y no congruentes (C1).....	64
Tratamiento algebraico (C2).....	65

Coordinación mediada por Geogebra (C3).....	65
Registro verbal (C4)	66
Metacognición semiótica (C5).....	66
Situaciones cognitivas anticipadas desde la teoría APOE.....	67
Implementación de la Intervención Pedagógica Mediada por Geogebra	69
Prueba Diagnóstica	69
Estructura de la Prueba Diagnóstica	69
Patrones de grupo anticipados y observados	70
Resultados prueba diagnóstica.....	70
Selección y caracterización de casos focales	76
Implicaciones del Análisis de la Prueba Diagnóstica para el Diseño de las Secuencias Didácticas	80
Secuencias Didácticas.....	81
Sesión 1: Exploración Gráfica y Construcción de la Noción de Pendiente.....	81
Estructura de la Sesión 1.....	81
Análisis a priori.....	82
Contexto y Desarrollo de la Sesión 1	83
Episodios Semióticos Relevantes y Análisis TRRS–APOE en la Sesión 1	84
Valoración APOE y uso de GeoGebra en la Sesión 1	87
Sesión 2: De los Puntos a la Ecuación Formal de la Recta	88
Estructura de la Sesión 2.....	88
Análisis a Priori	89
Contexto y Desarrollo de la Sesión 2	90

Episodios Semióticos Relevantes y Análisis TRRS–APOE en la Sesión 2	90
Valoración APOE y Evolución Semiótica en la Sesión 2	95
Sesión 3: Modelación Matemática y Consolidación del Ciclo Completo de Registros	96
Estructura de la Sesión 3.....	96
Análisis a Priori	96
Contexto y Desarrollo de la Sesión 3	98
Episodios Semióticos Relevantes y Análisis TRRS–APOE en la Sesión 3	98
Valoración APOE y Evolución Semiótica en la Sesión 3	102
Evaluación Final	103
Estructura de la Evaluación Final	103
Resultados por episodio evaluativo	104
Resultados por caso focal de la Evaluación final	107
Evolución de los casos focales en el aprendizaje de la función lineal	108
Uso de GeoGebra y registro verbal en la prueba final.....	112
Análisis de Resultados	113
Evolución de los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos (TRRS) ...	113
Estado semiótico inicial	113
Evolución de la categoría C1: conversiones entre registros a lo largo de la intervención	114
Evolución de la categoría C2: tratamiento dentro del registro y su relación con la conversión	
.....	116
La congruencia semiótica permite predecir los avances.....	118
Progresión en la construcción cognitiva de los estudiantes (Teoría APOE)	119
Estructura Mental Acción Inicial Predominante en el Grupo.....	120

Trayectorias de transición: mecanismos activados por caso focal	121
Estructura Mental en transición $A \rightarrow P$	122
Estructura mental Objeto	124
Estructura mental Esquema	126
Límites de la intervención	127
Evolución final del grupo de casos focales	128
El Papel de GeoGebra como Mediador Semiótico-Cognitivo.....	129
Descomposición genética refinada de la función lineal	131
Conclusiones.....	135
Recomendaciones	142
Referencias Bibliográficas	144

Lista de tablas

Tabla 1 <i>Articulación TRRS–APOE para la función lineal</i>	43
Tabla 2 <i>Momentos del modelo IAE para la propuesta</i>	50
Tabla 3 <i>Categorías de Análisis</i>	63
Tabla 4 <i>Estructuras mentales esperados desde la Teoría APOE al trabajar con funciones lineales</i>	67
Tabla 5 <i>Obstáculos anticipados para la prueba diagnostica</i>	70
Tabla 6 <i>Estructuras mentales asignadas a los casos focales seleccionados</i>	78
Tabla 7 <i>Rasgos característicos en cada estructura mental APOE establecido para la investigación</i>	79
Tabla 8 <i>Estructura de cada Sesión</i>	81
Tabla 9 <i>Estructuras mentales APOE alcanzadas en la prueba final</i>	107
Tabla 10 <i>Perfiles finales APOE por caso focal al término de la intervención</i>	108
Tabla 11 <i>Descomposición genética refinada de la función lineal</i>	133

Lista de Figuras

Figura 1	<i>Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de contenido matemático</i>	..39
Figura 2	<i>Fases de la investigación acción educativa a desarrollar</i>55
Figura 3	<i>Desarrollo de la Evaluación Diagnóstica</i>71
Figura 4	<i>Cita textual adjunta del E8 en la pregunta 1</i>71
Figura 5	<i>Desarrollo y operaciones del E2 a la pregunta 2</i>72
Figura 6	<i>Desarrollo de la pregunta 3 E5</i>73
Figura 7	<i>Desarrollo de la pregunta 4 E7</i>74
Figura 8	<i>Desarrollo pregunta 5 E7</i>75
Figura 9	<i>Applet del ciclista</i>83
Figura 10	<i>Reflexiones del EF7 respecto a la actividad con el applet del ciclista</i>85
Figura 11	<i>Interacción con Geogebra de EF3 en el desarrollo de P2 Sesión 1</i>86
Figura 12	<i>Definición final del concepto de pendiente EF4</i>86
Figura 13	<i>Manipulación de la pendiente a través de deslizadores en Geogebra EF6</i>92
Figura 14	<i>Definición de pendiente del EF7</i>93
Figura 15	<i>Definición de pendiente de EF4</i>93
Figura 16	<i>EF6 explica los parámetros de la función lineal en torno a un problema contextualizado</i>94
Figura 17	<i>Solución de EF8 a la situación contextual</i>94
Figura 18	<i>Exploración de paralelismo y perpendicularidad en Geogebra EF1 y EF2</i>99
Figura 19	<i>Definición de rectas paralelas EF3</i>99
Figura 20	<i>Definición rectas perpendiculares EF1</i>100
Figura 21	<i>Explicación de paralelismo y perpendicularidad EF4</i>101

Figura 22 <i>Reflexión acerca de la mediación con GeoGebra EF5</i>	101
Figura 23 <i>Respuesta pregunta 1 EF4</i>	104
Figura 24 <i>Respuesta pregunta 1 EF8</i>	105
Figura 25 <i>Respuesta pregunta 6 EF6</i>	106
Figura 26 <i>Respuesta pregunta 6 EF1</i>	107

Listado de Apéndices

Apéndice A <i>Evaluación Diagnóstica</i>	152
Apéndice B <i>Secuencias didácticas</i>	158
Apéndice C <i>Evaluación Final</i>	177
Apéndice D <i>Formato Consentimiento informado para la institución educativa</i>	189
Apéndice E <i>Consentimiento informado padres de familia y/o acudientes</i>	192

Introducción

El presente trabajo surge de la observación de una problemática concreta en el contexto del aula de los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo de Cartagena, quienes evidencian un dominio procedimental de la función lineal que no corresponde con una comprensión conceptual articulada del objeto matemático. Esta situación se evidencia en la práctica docente como una brecha entre lo que el estudiante puede calcular y lo que puede interpretar, generada por los métodos de enseñanza tradicionalmente centrados en el registro algebraico que no garantizan que el estudiante sea capaz de reconocer ese mismo objeto cuando se le presenta en una representación gráfica, tabular o verbal. Comprender la función lineal no sólo equivale a manejar su expresión simbólica con fluidez, también implica poder transitar entre sus distintas formas de representación con autonomía y sentido, lo cual requiere condiciones didácticas específicas que este estudio se propuso analizar.

Para entender la dinámica del proceso de aprendizaje de la función lineal este estudio articula dos marcos teóricos que la literatura en educación matemática ha desarrollado de forma separada. La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1993, 2004, 2006) permite identificar qué operaciones semióticas están en juego cuando un estudiante trabaja con representaciones matemáticas, distinguiendo entre tratamientos dentro de un mismo registro y conversiones hacia otro, y explicando por qué ciertas conversiones resultan cognitivamente más exigentes. La Teoría APOE de Dubinsky (1991) y Arnon et al. (2014) complementa esa mirada al describir cómo se construyen mentalmente las estructuras que hacen posibles esas operaciones. La articulación de ambos marcos responde a la limitación derivada de un análisis exclusivamente semiótico que puede señalar qué conversiones fallan, pero no explicar por qué se producen estos errores a nivel cognitivo. A su vez, un análisis exclusivamente APOE

caracteriza la estructura mental construida por el estudiante, pero no describe qué operaciones semióticas concretas está realizando.

En el diseño de la intervención pedagógica se incluye el software GeoGebra no sólo como un recurso de apoyo visual o de motivación tecnológica, sino que se establece como el entorno donde la representación simultánea y dinámica de los registros algebraico, gráfico, tabular y verbal hace visible y manipulable aquello que el estudiante debe interiorizar cognitivamente. Esto crea las condiciones que la TRRS y la teoría APOE plantean como necesarias para la comprensión matemática.

La investigación se llevó a cabo con 32 estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo durante el primer semestre académico de 2026, con un análisis en profundidad de ocho casos focales seleccionados de forma intencional por máxima variación. El estudio aporta a la educación matemática al articular operativamente la TRRS y la teoría APOE para analizar dinámicas pedagógicas en torno al aprendizaje matemático en nivel de básica secundaria, además de generar evidencia empírica situada en el Caribe colombiano y producir un modelo de intervención didáctica replicable en contextos similares.

El documento se organiza en cuatro secciones: la primera establece el propósito del estudio mediante el planteamiento del problema, la pregunta de investigación, la justificación y los objetivos; la segunda desarrolla los antecedentes y el marco teórico (TRRS, APOE, su articulación y el papel de GeoGebra); la tercera describe el marco metodológico; y la cuarta presenta los resultados, el análisis y las conclusiones de la intervención pedagógica.

Planteamiento del problema

La comprensión de los objetos matemáticos constituye uno de los desafíos centrales de la educación matemática contemporánea. Investigaciones recientes como la de Rodríguez Nieto et al. (2024) sostienen que las dificultades de los estudiantes en educación media no radican en la capacidad operativa con símbolos, sino en la incapacidad de coordinar múltiples sistemas de representación de un mismo objeto matemático. La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2004, 2006), eje teórico de este estudio, afirma que los objetos matemáticos solo son aprehendidos a través de sus representaciones, y que la comprensión real ocurre cuando el estudiante reconoce el mismo objeto en al menos dos registros distintos y puede operar entre ellos mediante conversiones.

Respecto a la función lineal se ha documentado que los estudiantes de educación secundaria evidencian obstáculos cognitivos persistentes como dificultades para vincular expresiones algebraicas con representaciones tabulares, errores en la interpretación de gráficas, incapacidad para extraer información variacional del registro verbal e inconvenientes ante conversiones que no son congruentes entre los registros de partida y llegada (Hernández, 2023; Vargas y García, 2024; Yiğit Koyunkaya y Boz-Yaman, 2023). Estos obstáculos en la práctica educativa tradicional se tratan de resolver con la mecanización de procedimientos, desconociendo la naturaleza cognitivo-semiótica del problema y la necesidad de mejorar las estrategias didácticas para fortalecer la comprensión y la coordinación entre registros.

A nivel internacional, los resultados de evaluaciones como PISA han evidenciado de forma reiterada que los estudiantes presentan dificultades significativas para interpretar y utilizar representaciones matemáticas en contextos variados (OCDE, 2023). En el caso específico de las funciones y el álgebra, la evaluación PISA 2022 mostró que una proporción considerable de

estudiantes alcanza sólo el nivel mínimo de competencia funcional en matemáticas, lo que refleja su incapacidad de articular distintas representaciones de un mismo fenómeno de variación.

Investigaciones recientes en Colombia, México y Ecuador confirman que esta situación se reproduce en los contextos locales, con patrones de error en la función lineal que son notablemente similares entre poblaciones de distintos países latinoamericanos (Rodríguez-Nieto et al., 2024; Hernández, 2023; Villacis Montoya et al., 2023).

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional señala que la enseñanza del álgebra continúa centrada en la memorización de procedimientos y en el uso predominante del registro simbólico lo que impide un mayor nivel de comprensión conceptual (MEN, 2016). En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se establece que los estudiantes deben ser capaces de interpretar, representar y transformar funciones en distintos registros, pero es evidente la brecha existente entre la expectativa curricular y el desempeño real de los estudiantes.

Al observar los resultados de las Pruebas Saber 9° del ICFES (2021) se confirma que las mayores dificultades de los estudiantes colombianos en el componente de pensamiento variacional se concentran en la interpretación de gráficas de funciones, en la capacidad de establecer relaciones entre variables y en la comprensión de fenómenos de cambio a partir de sus representaciones. Estos resultados son particularmente preocupantes en instituciones de municipios y ciudades intermedias del Caribe colombiano, donde el acceso a recursos tecnológicos y la formación docente en el uso de herramientas dinámicas de visualización matemática son más limitados. Investigaciones desarrolladas en contextos similares al de esta propuesta, como el trabajo de Muñoz et al. (2021) en Barranquilla, han documentado que la

introducción de GeoGebra en secuencias didácticas estructuradas produce mejoras significativas en la comprensión de la función lineal, lo que señala la pertinencia de este tipo de intervención.

En los últimos años se han desarrollado en Colombia pocas investigaciones en educación matemática en torno al estudio de las representaciones semióticas aplicadas a la función lineal. Se resalta el estudio de Coy y García (2023) cuyo trabajo se enfocó más en el desarrollo semiótico en torno a la integración de un objeto virtual de aprendizaje OVA. Esta brecha en la literatura nacional respecto al aprendizaje de la función lineal desde la perspectiva de las representaciones semióticas y la construcción cognitiva que se genera en torno a este objeto matemático refuerza la pertinencia del presente estudio.

El Centro de Educación El Recreo, institución privada ubicada en la ciudad de Cartagena, departamento de Bolívar, atiende a una población estudiantil caracterizada por condiciones socioeconómicas heterogéneas y acceso limitado a recursos tecnológicos fuera del aula. En el área de matemáticas, las prácticas pedagógicas predominantes están orientadas a la enseñanza del registro algebraico de manera aislada, con escasa integración de representaciones gráficas, tabulares y verbales en las actividades de aula. Esta situación genera que los estudiantes de grado noveno desarrollen un dominio procedimental limitado de la función lineal que no se traduce en comprensión conceptual articulada.

A estas dificultades de orden semiótico se suma una dimensión cognitiva que la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) trabajada desde las experiencias de Arnon et al., (2014) y Dubinsky (1991) permite caracterizar con precisión. La mayoría de los estudiantes del grupo de estudio opera con la función lineal la estructura mental Acción, es decir, ejecutan procedimientos mecánicos sin haber interiorizado el proceso subyacente ni encapsulado la función como un objeto cognitivo sobre el cual puedan reflexionar con profundidad. Esta

condición limita significativamente su capacidad de trasladar el conocimiento a situaciones nuevas y de coordinar los distintos registros de manera autónoma.

Ante este panorama, existe la necesidad pedagógica concreta de diseñar e implementar estrategias didácticas que permitan analizar simultáneamente la dimensión semiótica y la dimensión cognitiva del aprendizaje de la función lineal. Las secuencias didácticas mediadas por GeoGebra responden a esta necesidad porque el software ofrece un entorno en el que los registros de representación de la función lineal pueden coexistir y actualizarse de manera simultánea y dinámica. Esta característica convierte a GeoGebra en un mediador semiótico que externaliza la coordinación de registros y hace observable el proceso de conversión, creando condiciones cognitivas que ningún otro recurso didáctico tradicional puede proporcionar (Artigue, 2002; Vargas y García, 2024; Wondimuneh y Ayele, 2021).

La implementación de las actividades propuestas para la intervención pedagógica se desarrolla durante el primer semestre académico de la institución, con un grupo de 32 estudiantes de grado noveno. El análisis en profundidad se realiza sobre 8 casos focales seleccionados de manera intencional para garantizar diversidad en los perfiles de desempeño inicial. El concepto matemático central es la función lineal, en sus cuatro registros de representación: algebraico, gráfico, tabular y verbal.

Pregunta de Investigación

¿De qué manera evolucionan los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos y cómo se relacionan con la evolución de las estructuras mentales de los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo durante el aprendizaje de la función lineal en una intervención didáctica mediada por GeoGebra?

Justificación

Esta investigación se justifica desde el punto de vista teórico al generar conocimiento desde la intersección de dos marcos teóricos que, a pesar de ser ampliamente reconocidos en la investigación en educación matemática, han sido articulados de manera operativa en muy pocos estudios. La Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval TRRS (1993, 2004, 2017) y la Teoría APOE de Dubinsky (1991) y Arnon et al. (2014) exponen perspectivas complementarias sobre el aprendizaje matemático; la TRRS describe qué operaciones semióticas son necesarias para la comprensión mientras que la teoría APOE explica cómo el estudiante construye las estructuras mentales que permiten esas operaciones. La integración de ambas teorías en un estudio analítico representa un aporte metodológico original que puede ser adaptado a otras investigaciones en contextos similares.

Desde la perspectiva de la TRRS, la justificación teórica radica en que la función lineal es un objeto matemático cuyo aprendizaje involucra varios registros de representación simultáneamente activos (algebraico, gráfico, tabular y verbal) y en el que las conversiones no congruentes son más frecuentes y cognitivamente más exigentes (Duval, 2006; Hernández, 2023). Estudiar los procesos de conversión y tratamiento en este objeto específico, con este grupo específico de estudiantes, genera conocimiento situado y contextualizado que enriquece la base empírica de la teoría de Duval en el contexto iberoamericano.

Desde la perspectiva de la teoría APOE, la justificación teórica reside en que la descomposición genética de la función lineal propuesta en este estudio y su validación a través de los datos empíricos de la intervención, contribuye a comprender cómo los estudiantes de educación básica secundaria construyen este concepto. Como señalan Şefik et al. (2021) la gran mayoría de las investigaciones con APOE se desarrollan en contextos universitarios, por lo tanto,

su extensión a la educación secundaria es una adaptación de alta relevancia para la investigación matemática.

La articulación de estos enfoques es coherente con las orientaciones de investigadores como Wondimuneh y Ayele (2021) y Nga et al. (2023), quienes documentan los beneficios de combinar APOE con herramientas tecnológicas, y por los planteamientos de Reyes-Santander et al. (2023), quienes señalan explícitamente la necesidad de complementar la TRRS con otros marcos cognitivos para alcanzar interpretaciones más completas de la comprensión matemática

Metodológicamente se adopta el diseño de Investigación-Acción Educativa en un contexto donde el problema identificado tiene una dimensión tanto comprensiva como práctica. La IAE es un diseño coherente cuando el objeto de estudio es la práctica pedagógica en su contexto natural, y cuando el propósito incluye no solo describir lo que ocurre sino transformarlo (Elliott, 2015).

La justificación pedagógica de esta investigación radica en que produce secuencias didácticas específicamente diseñadas para atender las dificultades documentadas en los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo en el aprendizaje de la función lineal. Estas secuencias no son ejercicios comunes de representación matemática, sino actividades articuladas con la progresión de complejidad semiótica (de conversiones congruentes a no congruentes) y de construcción de estructuras mentales (de Acción hacia Esquema) fundamentadas en el marco teórico.

Al incorporar GeoGebra como mediador tecnológico se aporta a la actualización pedagógica en coherencia con los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional para la integración de tecnologías en el aula (MEN, 2013) y con los hallazgos de investigaciones recientes que demuestran su efectividad específica en el contexto colombiano (Muñoz et al.,

2021; Baldovino y Quigua, 2022; Pérez-Salamanca, 2025). El uso de GeoGebra se justifica por su disponibilidad dentro de la institución educativa y por su capacidad específica de representar simultáneamente y actualizar dinámicamente los cuatro registros de la función lineal, creando el tipo de entorno semiótico-cognitivo que tanto la TRRS como la teoría APOE señalan como condición para el aprendizaje.

Objetivos

Objetivo General

Analizar la evolución de los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos y las estructuras de construcción de pensamiento matemático (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) de los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, durante la implementación de secuencias didácticas mediadas por GeoGebra para el aprendizaje de la función lineal.

Objetivos Específicos

Caracterizar el estado inicial de los estudiantes en los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos de la función lineal, identificando los tipos de dificultades semióticas y la estructura de construcción de pensamiento predominante, a partir del análisis de la prueba diagnóstica y de la observación inicial del aula.

Describir los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos que aparecen durante la implementación de las secuencias didácticas mediadas por GeoGebra, identificando los modos de coordinación semiótica que el software favorece, los patrones de articulación verbal entre registros y los indicios de avance en las estructuras de construcción de pensamiento de los estudiantes.

Interpretar las transformaciones producidas en los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos y en las estructuras de construcción de pensamiento de los estudiantes al finalizar la intervención, mediante el análisis comparativo integrado de la prueba diagnóstica, los registros de observación de las sesiones y la prueba final.

Antecedentes de Investigación

La revisión de antecedentes presentada a continuación tiene como propósito identificar el estado del arte en cuatro líneas temáticas vinculadas con el problema investigado: el concepto de función lineal en la didáctica de las matemáticas, los registros de representación semiótica aplicados a dicho concepto, la teoría APOE como marco para analizar su aprendizaje y la mediación tecnológica con GeoGebra.

Estudios Sobre el Concepto de Función Lineal en la Didáctica de las Matemáticas

El concepto de función lineal ha sido estudiado de manera amplia en la investigación en educación matemática. Los estudios revisados no tienen propósitos o enfoques homogéneos y muestran diferencias marcadas en sus objetos de análisis, sus poblaciones y sus marcos de referencia. Dávila et al. (2023), Rodríguez- Nieto et al. (2024) y Mateus y Moreno (2021) coinciden en señalar que las dificultades con la función lineal van mucho más allá del plano procedimental, pero cada estudio analiza un ángulo distinto del problema y sus hallazgos no son directamente equivalentes.

En el trabajo de Dávila et al. (2023) se examinan los errores de docentes costarricenses de matemática en formación al trabajar con variación lineal, documentando confusiones en la aplicación del concepto de linealidad que persisten incluso en sujetos con formación pedagógica avanzada. La fortaleza de este estudio radica en su población pues al trabajar con futuros docentes se visibiliza cómo los obstáculos conceptuales se reproducen en el ciclo de enseñanza. Su alcance es limitado desde el punto de vista del diseño al tratarse de una experiencia formativa de caso único, sin grupo de comparación, lo que impide establecer si los avances reportados se deben a la intervención o a otros factores del proceso formativo. La relevancia para este estudio es principalmente de comparación diagnóstica, pues a pesar de enfocarse en poblaciones de

niveles académicos distintos los tipos de errores que identifica en futuros docentes son consistentes con los observados en los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, lo que sugiere que ciertos obstáculos tienen un origen profundo que no depende del nivel educativo.

Rodríguez- Nieto et al. (2024) trabajan con estudiantes de bachillerato en una institución pública de Barranquilla, lo que representa una proximidad geográfica y contextual de alto valor para la presente investigación. Plantean un laboratorio de matemáticas con ocho actividades centradas en la función lineal que produjo avances en el pensamiento variacional y en la articulación entre representaciones. Sin embargo, el estudio se realizó desde un enfoque cualitativo descriptivo sin instrumentos de análisis semiótico explícito, describiendo las mejoras observadas sin explicar con precisión cognitiva por qué se producen ni en qué tipo de conversiones avanzan los estudiantes. Esta limitación es precisamente el vacío que la doble lente de análisis TRRS-APOE de la presente investigación pretende cubrir.

Desde otro punto de vista Mateus y Moreno (2021) enfocan el análisis de la función lineal como parte del desarrollo del pensamiento variacional, situando este objeto matemático como base conceptual del cálculo al considerar que la función lineal es el puente entre el álgebra escolar y el razonamiento variacional superior. Su postura es coherente con el enfoque de este estudio, que también resalta la importancia de la comprensión conceptual del comportamiento de la función sobre el dominio del algoritmo. Estos autores trabajan principalmente en un registro curricular y didáctico, sin aplicar un marco semiótico o cognitivo que permita analizar la naturaleza interna de las dificultades.

Los tres trabajos consultados en esta línea temática muestran una tensión metodológica en torno al objeto de estudio; la investigación con mayor proximidad contextual al Caribe

colombiano (Rodríguez- Nieto et al., 2024) carece de profundidad teórica semiótica, mientras que los estudios con mayor precisión analítica (Dávila et al., 2023) se desarrollan en contextos educativos bastante distantes.

Estudios Relacionados con los Registros de Representación Semiótica en Torno al Aprendizaje de la Función Lineal

Los estudios revisados en esta línea temática coinciden en señalar que las principales dificultades en el aprendizaje de la función lineal no se explican únicamente por falencias en el manejo algebraico, sino por la incapacidad de los estudiantes para coordinar registros de representación distintos. A pesar de esta coincidencia general los trabajos consultados muestran diferencias importantes en los énfasis analíticos, en los diseños metodológicos y en los contextos educativos desde los cuales se ha investigado el problema.

Hernández (2023) analiza la función lineal en secundaria desde una secuencia didáctica mediada por GeoGebra con estudiantes mexicanos y concluye que el obstáculo central está en la coordinación entre los registros verbal, tabular, gráfico y algebraico. En cambio, Coy y García (2023), aunque trabajan también con estudiantes de grado noveno y desde la teoría de Duval, centran su análisis en las conversiones semióticas realizadas mediante objetos virtuales de aprendizaje (OVA) en un contexto panameño, demostrando que, aunque el entorno digital favorece la producción de múltiples representaciones, las conversiones no congruentes continúan siendo un punto crítico. Ambos estudios permiten afirmar que el problema no es simplemente la ausencia de recursos tecnológicos, sino en el tipo de mediación didáctica que estructura la conversión entre registros.

Hernández (2023) trabaja desde el diseño e implementación de una secuencia didáctica, lo que le permite valorar el potencial de una intervención estructurada, pero limita la profundidad

del análisis sobre los tipos específicos de conversiones fallidas. En cambio, Coy y García (2023) desarrollan un estudio cualitativo sobre un pequeño grupo de seis estudiantes, permitiéndoles describir con mayor detalle los tipos de transformaciones logradas o erradas en un entorno virtual específico, pero sin posibilidad de generalización de los resultados. Aunque ambas investigaciones aportan evidencia importante sobre las conversiones semióticas, los resultados no son directamente equivalentes: uno privilegia el alcance de la intervención y el otro profundiza en los mecanismos cognitivos individuales.

De otra parte, se encuentra el trabajo de García y Martínez (2021), quienes desarrollan un estudio cuasiexperimental con 99 estudiantes de secundaria en España, en el que desplazan el foco de análisis desde la función lineal hacia la relación entre la diversidad de registros de representación y las estrategias metacognitivas. Su principal aporte como antecedente radica en vincular la dimensión semiótica con la autorregulación del aprendizaje. También es importante señalar que al desarrollarse en un contexto europeo sus hallazgos presentan limitaciones para su transferencia directa al contexto educativo colombiano.

La revisión de los estudios antes mencionados evidencia una tensión metodológica recurrente en la investigación en educación matemática: mientras los estudios microanalíticos permiten comprender con detalle procesos específicos como las conversiones semióticas, los diseños comparativos de mayor escala ofrecen una visión más general de los patrones de aprendizaje.

Pasando a los estudios asociados a TRRS en el contexto colombiano, Pineda et al. (2022) ofrecen una investigación que se apoya en GeoGebra para trabajar el concepto de elipse con estudiantes de grado décimo. Aunque el objeto matemático es diferente, presentan hallazgos sobre la progresión no lineal en la coordinación de registros, lo que evidencia que algunos

estudiantes avanzan en ciertos pares de registros, pero retroceden en otros, lo cual es transferible al estudio de la función lineal y anticipa que el análisis de las conversiones no puede reducirse a una escala única de dominio.

Otro trabajo de investigación consultado dentro del contexto colombiano es el de Reyes Santander et al. (2023). En este estudio los autores analizan las producciones de estudiantes en olimpiadas de matemáticas y concluyen que, aunque la TRRS es un marco teórico robusto no logra explicar todos los comportamientos cognitivos observados, lo cual justifica la necesidad de diseñar propuestas de articulación teórica con otros marcos como APOE para dar respuesta a esta necesidad analítica real.

Estudios Relacionados con el Aprendizaje de la Función Lineal desde la Teoría APOE

La teoría APOE se ha utilizado con frecuencia en el desarrollo de investigaciones en educación matemática, pero su aplicación al nivel de básica secundaria y al concepto específico de la función lineal sigue siendo limitada en comparación con su uso en contextos universitarios.

Yiğit Koyunkaya y Boz-Yaman (2023), trabajaron con docentes en formación en Turquía, encontrando que el ciclo ACE (Activities, Classroom Discussion, Exercises, por sus siglas en inglés) de APOE aportó positivamente para que la mayoría de los participantes avanzaran desde la estructura mental Acción hasta la estructura mental Proceso, agregando que la discusión en clase fue el componente más determinante para que se materializara ese avance. Este hallazgo es valioso para la presente investigación porque señala que el progreso cognitivo no depende únicamente del software o de las tareas, sino de la calidad de la estrategia pedagógica. Sin embargo, el estudio citado trabaja con una población de adultos en formación docente, con diferencias cognitivas y motivacionales importantes respecto a estudiantes de grado noveno.

Nga et al. (2023) desarrollaron una investigación en un nivel académico similar al abordado en el presente estudio, aportando evidencia cuantitativa y cualitativa en un diseño experimental con grupos de control en bachillerato vietnamita. Encontraron que los estudiantes con instrucción bajo el ciclo ACE de APOE combinado con GeoGebra obtuvieron puntajes significativamente más altos en la comprensión conceptual de la derivada. Este es el diseño metodológicamente más estructurado de los revisados en esta categoría, al incluir un grupo de control y criterios de medida explícitos. Los aspectos que limitan su transferibilidad directa son en primer lugar que trabaja con un concepto distinto (la derivada) y las marcadas diferencias curriculares y culturales del contexto asiático.

Otro estudio con enfoque teórico APOE en secundaria es el realizado por Matindike y Makonye (2023), en una escuela rural de Sudáfrica. Sus hallazgos demuestran que el diagnóstico basado en APOE permite diseñar intervenciones más precisas y que los errores de los estudiantes al trabajar con funciones hiperbólicas son manifestaciones directas de la estructura mental APOE en el que operan. Su mérito metodológico es el análisis detallado de las producciones escritas para inferir la estructura de construcción cognitiva, lo que proporciona un modelo de codificación útil para la presente investigación. Las diferencias más marcadas son el concepto matemático en torno al cual se desarrolla el estudio y el contexto de alta vulnerabilidad educativa que, aunque comparte algunas características con el de Centro Educativo El Recreo, difiere en los recursos tecnológicos disponibles.

La investigación de Rachmawati (2020) realizada en básica secundaria en Indonesia añade como variable los estilos cognitivos, una variable poco explorada en otros estudios. Los datos obtenidos muestran que los estudiantes reflexivos avanzan más rápidamente hacia las estructuras cognitivas Proceso y Objeto, mientras que los impulsivos tienden a permanecer en la

estructura mental Acción. Este hallazgo identifica como punto metodológico relevante que la diversidad en los perfiles cognitivos individuales puede producir trayectorias de aprendizaje muy distintas dentro de un mismo grupo, lo que justifica el análisis de casos focales en la presente investigación en lugar de un análisis grupal general.

Rico (2023) realizó una revisión de APOE en el cálculo diferencial iberoamericano que ofrece la reflexión más directamente aplicable al contexto colombiano, su trabajo concluye que esta teoría permite identificar con mayor precisión los puntos de quiebre cognitivo y que su adaptación al contexto hispanohablante es muy viable. La ausencia de estudios que apliquen APOE a la función lineal en secundaria colombiana es uno de los vacíos más claros encontrados en la revisión de antecedentes. Como respuesta a lo anterior la presente investigación articula el estudio de la función lineal desde la doble perspectiva TRRS / APOE, en el nivel de básica secundaria con mediación tecnológica, que puede llegar a posicionarla como un antecedente de valor en la discusión académica.

Estudios Relacionados con la Mediación Tecnológica de GeoGebra para el aprendizaje

La evidencia académica relacionada con el uso de GeoGebra es amplia y consistente en afirmar que el uso de este software mejora la comprensión de conceptos matemáticos, favorece la visualización y aumenta la motivación en los estudiantes. Pese a ello se encuentran diferencias en las condiciones de implementación, los diseños metodológicos o las conclusiones sobre la forma en que GeoGebra produce esos efectos.

Vargas y García (2024), desarrollaron una investigación en México en nivel de bachillerato que demuestra que la combinación de TRRS con applets de GeoGebra favoreció la construcción de significado matemático para ecuaciones lineales. Macías Tejena et al. (2025), en Ecuador, aportan evidencia cuantitativa parametrizada a través de una prueba t-student sobre el

impacto positivo de GeoGebra en el aprendizaje de funciones lineales. Sin embargo, encontraron como obstáculo la falta de formación docente y las limitaciones de acceso tecnológico, concluyendo que estos aspectos pueden disminuir el potencial del software si no se tienen en cuenta desde la etapa de diseño de la intervención. Este hallazgo es directamente relevante para el contexto del Centro de Educación El Recreo, donde el acceso tecnológico es limitado fuera del aula.

Villacis Montoya et al. (2023), también en Ecuador, trabajaron un diseño experimental con grupo de control obteniendo mejoras estadísticamente significativas en el grupo que usó GeoGebra. Comparados con la investigación de Macías Tejena et al. (2025) los dos estudios ecuatorianos muestran una diferencia metodológica importante: uno mide el impacto con criterios cuantitativos (Villacis Montoya) y el otro integra perspectivas docentes cualitativas (Macías Tejena). Ambos son necesarios porque producen conocimiento complementario, pero ninguno de los dos analiza en profundidad qué tipo de conversiones semióticas facilita GeoGebra ni en qué estructura mental APOE se producen los avances.

En el contexto colombiano del Cauca los investigadores Baldovino y Quigua (2022), documentaron mejoras en la interpretación de parámetros de la función lineal, confirmando que GeoGebra es consistentemente positivo en visualización, comprensión conceptual y motivación en secundaria. A su vez, Pérez Salamanca (2025), en Medellín, añade Desmos como recurso complementario y subraya la importancia de combinar el software con el razonamiento algebraico. Estos estudios colombianos muestran que la investigación local sobre GeoGebra avanza, pero sigue concentrándose en las regiones andinas del país. El contexto de esta investigación se ubica en el Caribe colombiano, región que permanece subrepresentada en esa literatura, lo que valida la pertinencia de la propuesta.

Una tensión transversal evidenciada al comparar los estudios antes mencionados es que aquellos trabajos que producen los hallazgos más sólidos desde el punto de vista cuantitativo (Villacis Montoya et al., Macías Tejena et al., Nga et al.) son los que menos detallan los mecanismos semióticos o cognitivos que explican dichos avances, mientras que los estudios de caso con mayor profundidad analítica (Coy y García, 2023; Hernández, 2023) ofrecen comprensiones más detalladas, pero con menor capacidad de generalización.

Marco Teórico

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) como Eje Central

Fundamentos epistemológicos

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Raymond Duval (1993, 2004) constituye uno de los ejes articuladores de esta investigación. Esta teoría afirma que los objetos matemáticos no pueden ser aprehendidos de manera directa por la mente humana y sólo son accesibles a través de sus representaciones semióticas. Duval (2006) sostiene que esta condición no es una limitación provisional, sino la naturaleza constitutiva del conocimiento matemático.

Duval separa el objeto matemático de sus representaciones, en este caso la función lineal como concepto no es la expresión $y = mx + b$, ni la recta en el plano cartesiano, ni la tabla de valores, ni la descripción verbal de una relación de proporcionalidad directa, por el contrario, la función lineal es el concepto subyacente a todas estas representaciones. Para comprender un objeto matemático el estudiante debe estar en capacidad de reconocerlo en distintos sistemas de representación y operar entre ellos con fluidez. Algunas investigaciones recientes en contextos iberoamericanos como la de Hernández (2023) y el trabajo de Reyes-Santander et al. (2023) coinciden al afirmar que esta condición sigue siendo el principal desafío cognitivo en el aprendizaje del álgebra escolar.

Desde este punto de vista trabajar el objeto matemático en un único registro semiótico no garantiza su comprensión. Puede encontrarse que un estudiante opere la función lineal con éxito dentro del registro algebraico, pero al mismo tiempo ser incapaz de interpretar la gráfica de esa función o de vincularla con una situación planteada en forma verbal. Esta confusión entre registros es la manifestación más clara del obstáculo cognitivo central en el aprendizaje

matemático desde la perspectiva de la TRRS. Estudios con estudiantes de bachillerato en Colombia han corroborado que las dificultades de los estudiantes con las funciones lineales se evidencian en la articulación entre registros y no en la manipulación dentro de un solo sistema (Rodríguez-Nieto et al., 2024).

Registros semióticos y sus funciones cognitivas

Un registro de representación semiótica según la definición de Duval (2004, 2006) es un sistema semiótico que cumple tres condiciones: permite la formación de representaciones identificables, otorga la posibilidad de realizar transformaciones internas (tratamientos) y admite la conversión hacia otros registros. En el caso de la función lineal existen cuatro registros de representación fundamentales con funciones cognitivas específicas e irreducibles entre sí:

Registro algebraico. Permite expresar la función mediante símbolos formales como $f(x) = mx + b$. Su importancia radica en que facilita la generalización y la operación simbólica del objeto matemático. Algunos estudiantes presentan dificultades al trabajar en este registro cuando no han interiorizado el significado estructural de cada parámetro. (Umam & Susandi, 2022).

Registro gráfico. Representa la función como una recta en el plano cartesiano. Permite visualizar propiedades globales como la tendencia, la pendiente y el intercepto. Es el registro donde se encuentra mayor cantidad de información acerca del comportamiento dinámico de la función. Requiere que el estudiante reconozca convenciones de lectura que algunos no dominan en el nivel de secundaria. (Rodríguez-Nieto et al., 2024).

Registro tabular o numérico. Organiza en tablas pares de valores (x, y) . Este registro facilita la identificación de patrones de cambio y la verificación puntual de valores, pero puede inducir una lectura desconectada de la continuidad de la función (Vargas & García, 2024).

Registro verbal o en lenguaje natural. Describe la función mediante el lenguaje ordinario o matemático. Tiene una función articuladora fundamental pues permite dar sentido y contexto a las relaciones entre los demás registros y se constituye como un medio relevante para la comunicación matemática. Investigaciones recientes como la de Reyes-Santander et al., (2023) señalan que este registro es frecuentemente subutilizado en la enseñanza tradicional del álgebra.

En cada registro se establece una estructura interna propia, con reglas de formación, transformación y significados particulares. No son traducciones equivalentes entre sí pues cada uno destaca aspectos distintos del objeto matemático y oculta otros. Estas diferencias son la razón por la cual la coordinación entre registros es cognitivamente exigente y educativamente valiosa (Duval, 2017).

Transformaciones semióticas: tratamiento y conversión

El núcleo de las operaciones de la TRRS se fundamenta en dos tipos de transformaciones que un sujeto puede realizar sobre las representaciones semióticas (Duval, 1993, 2006).

El *tratamiento* es la transformación que se produce dentro de un mismo registro, siguiendo sus reglas internas. Por ejemplo, despejar x en la ecuación $2x - 3 = 7$ es un tratamiento dentro del registro algebraico; trazar la recta a partir de dos puntos previamente marcados es un tratamiento dentro del registro gráfico; calcular la diferencia entre valores sucesivos de y en una tabla es un tratamiento dentro del registro tabular. Desde el punto de vista cognitivo los tratamientos son operaciones de menor complejidad que las conversiones, pues no exigen cambiar de sistema de representación (Duval, 2017).

La *conversión* es la transformación que permite pasar de una representación en un registro a una representación en otro registro distinto, conservando el objeto matemático de referencia. Por ejemplo, pasar de la expresión algebraica $y = 3x + 1$ a su representación gráfica como una recta, o describir verbalmente el comportamiento de una tabla de valores. Duval (2004) señala que la conversión es el proceso cognitivo más exigente y relevante para la comprensión matemática, ya que obliga al estudiante a reconocer el mismo objeto en sistemas representacionales distintos. Esta afirmación ha sido corroborada por diferentes investigaciones como las de Vargas & García (2024), Reyes-Santander et al. (2023) y Hernández (2023).

La dificultad de una conversión depende de la congruencia entre los registros involucrados. Dos registros son congruentes en una conversión cuando existe una correspondencia directa, unidad a unidad, entre sus elementos constitutivos. Cuando esta correspondencia es indirecta ya sea porque el orden de los elementos difiere, la cardinalidad cambia o la dirección de la conversión es inversa, se habla de conversiones no congruentes, que resultan significativamente más difíciles para los estudiantes y son escenario frecuente de errores persistentes (Duval, 2006; Arteaga et al., 2024).

Paradoja cognitiva de Duval y su implicación didáctica

Duval (1993) enuncia una paradoja cognitiva fundamental en relación al aprendizaje matemático: para comprender un objeto matemático es necesario trabajar con al menos dos registros de representación diferentes y reconoce que la confusión entre el objeto y sus representaciones es el principal obstáculo que dificulta esa comprensión. Esta paradoja sigue siendo vigente epistemológicamente y ha sido retomada en investigaciones como las desarrolladas por Reyes-Santander et al., (2023) y Vargas & García (2024), como punto de partida para el diseño de propuestas didácticas innovadoras

La implicación didáctica de esta paradoja es directa porque el docente no puede simplemente plantear varias representaciones de un mismo objeto y esperar que los estudiantes las coordinen espontáneamente. Es necesario diseñar actividades que hagan explícito el acto de conversión, que pongan en evidencia la correspondencia entre los elementos de los distintos registros y que promuevan la reflexión del estudiante sobre sus propios procesos de conversión. Investigaciones con grupos de grado noveno en contextos latinoamericanos han demostrado que este tipo de diseño mejora significativamente la comprensión de las funciones lineales (Muñoz et al., 2021; Hernández, 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2024).

En esta investigación las secuencias didácticas mediadas por GeoGebra cumplen esta función al crear un entorno en el que la representación simultánea y dinámica de múltiples registros hace visible la conversión y permite al estudiante trabajar sobre ella de manera intencional y reflexiva.

La Teoría APOE como Complemento Cognitivo

Fundamentos y estructura

La Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) fue desarrollada por Ed Dubinsky y colaboradores (Dubinsky, 1991; Arnon et al., 2014) como un marco constructivista para describir y analizar los mecanismos mediante los cuales los estudiantes construyen el conocimiento matemático. Se encuentra alineada con la tradición piagetiana de la abstracción reflexiva, entendiéndola como el mecanismo cognitivo mediante el cual el sujeto construye conocimiento nuevo a partir de la reflexión sobre sus propias acciones. La vigencia de esta teoría se ha validado en revisiones sistemáticas de literatura relacionada como la realizada por Şefik et al. (2021) que ubican a APOE como uno de los marcos teóricos más productivos en la investigación de la educación matemática universitaria y de bachillerato.

Arnon et al. (2014) y Nga et al. (2023) coinciden al afirmar que la comprensión de un concepto matemático progresa a través de cuatro estructuras mentales, que se caracterizan por no ser etapas rígidas ni lineales, sino estados de sofisticación cognitiva que pueden coexistir y evolucionar mediante mecanismos específicos.

Las estructuras mentales que se describen desde la Teoría APOE son:

Acción (A). El estudiante realiza transformaciones sobre objetos matemáticos siguiendo pasos explícitos y guiados de manera externa. Es una estructura mental netamente procedimental porque el sujeto sabe que hacer, pero no comprende por qué ni puede generalizar. En el contexto de la función lineal un estudiante en la estructura mental Acción puede sustituir un valor de x en $y = 2x$ y calcular el resultado siguiendo el algoritmo paso a paso, pero no comprende la función como una relación global entre conjuntos (Matindike & Makonye, 2023; Wondimuneh & Ayele, 2021).

Proceso (P). El estudiante construye un proceso que puede ejecutar de forma mental sin necesidad de realizarlo físicamente a partir de la interiorización de sus acciones. El proceso puede revertirse, pensarse como un todo y aplicarse en distintas situaciones. Cuando un estudiante está en la estructura mental Proceso en torno al concepto de función lineal puede imaginar cómo cambiaría una tabla de coordenadas si se modifica el valor de m y a la vez razonar sobre la función sin calcular cada valor individualmente (Nga et al., 2023; Arnon et al., 2014).

Objeto (O). Esta estructura mental se presenta cuando el estudiante concibe el proceso matemático como una totalidad a través del mecanismo de encapsulación, consolidando un objeto cognitivo sobre el cual el estudiante puede operar. En el caso de la función lineal, la

encapsulación ocurre cuando el estudiante puede identificar la función, compararla con otras funciones, incluirla en sistemas de ecuaciones o identificarla como caso particular de la función polinómica (Trigueros & Hernández-Rebollar, 2022; Arnon et al., 2014).

Esquema (E). En la estructura mental Esquema los objetos, procesos y acciones relacionados con un dominio conceptual se organizan en una estructura cognitiva coherente que el estudiante puede aplicar a situaciones nuevas. Un estudiante con un esquema bien desarrollado puede seleccionar la representación más adecuada, anticipar el comportamiento de la función y establecer conexiones con otros conceptos matemáticos (Şefik et al., 2021)

Mecanismos de construcción: interiorización, encapsulación y coordinación

La teoría APOE describe los mecanismos mediante los cuales se construyen las estructuras mentales. Comprender estos mecanismos es fundamental para diseñar secuencias didácticas que los activen deliberadamente.

La interiorización. Es el mecanismo por el cual una acción se convierte en proceso. A través de ella el estudiante deja de necesitar pasos explícitos y puede ejecutar la transformación mentalmente. Se favorece mediante la repetición reflexiva y la variación sistemática de los contextos de aplicación. Wondimuneh y Ayele (2021) documentan que los entornos mediados por GeoGebra aceleran este proceso al permitir que el estudiante observe en tiempo real el efecto de sus acciones.

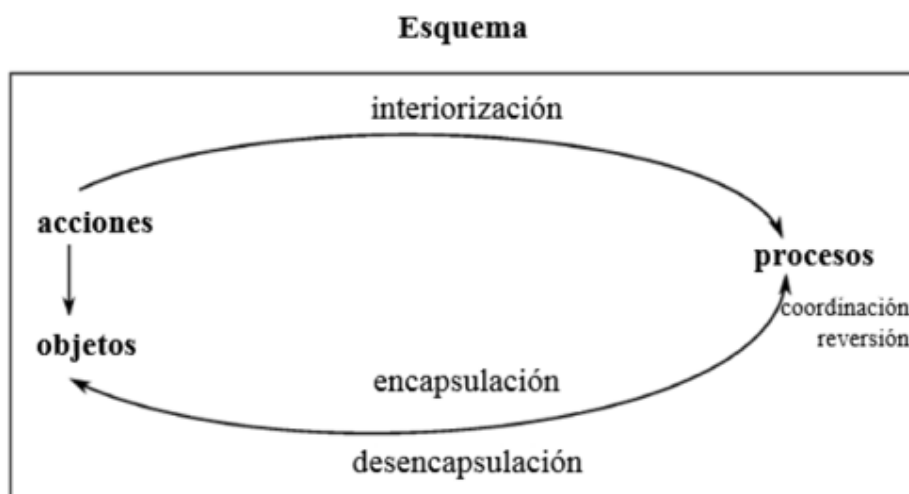
La encapsulación. Es el mecanismo por el cual un proceso se convierte en objeto: el estudiante puede tratar al concepto como una entidad con propiedades y operar sobre él con acciones. La encapsulación es cognitivamente el salto cualitativo más importante en la construcción del concepto. Investigaciones recientes han mostrado que el diseño de actividades

que obligan al estudiante a aplicar el proceso a nuevas situaciones es la estrategia más eficaz para provocar la encapsulación (Trigueros & Hernández-Rebollar, 2022; Şefik et al., 2021).

La coordinación. Es el mecanismo por el cual se articulan dos o más procesos para construir un proceso nuevo o un esquema más complejo. (Arnon et al., 2014). La coordinación de los procesos asociados a los distintos registros de representación resulta central en esta investigación, pues es el mecanismo que permite construir un esquema conceptual coherente sobre la función lineal.

Figura 1

Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de contenido matemático



Nota. Tomado de Arnon et al., 2014, p. 18)

Como se ilustra en la Figura 1, Dubinsky (1991, citado en Arnon et al., 2014) concibe la relación entre estos elementos como un ciclo en el que cada componente retroalimenta a los demás de manera continua. En este marco, el estudiante parte de operaciones que ya domina y, con la práctica y la reflexión, las interioriza hasta convertirlas en unidades mentales más

compactas. Estas unidades pueden tratarse como entidades sobre las cuales seguir operando, y también descomponerse para examinar cómo fueron construidas. Cuando todas estas estructuras logran funcionar de forma integrada ante una situación matemática, se configura lo que la teoría denomina un Esquema.

Descomposición genética inicial de la función lineal

Para aplicar la teoría APOE a la enseñanza, Dubinsky (1991) y otros autores como Arnon et al, (2014) proponen la elaboración de una descomposición genética. Esto se traduce en una descripción hipotética de las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante necesita construir para comprender el concepto. La descomposición orienta el diseño de las actividades de instrucción y puede ser ajustada a través de ciclos de investigación empírica (Trigueros & Hernández-Rebollar, 2022).

La descomposición genética que se presenta a continuación no es una construcción ad hoc de esta investigación, sino que se fundamenta en trabajos previos que han aplicado la teoría APOE al estudio del concepto de función. Breidenbach et al. (1992) establecieron, en uno de los primeros estudios empíricos con APOE sobre función, que la mayoría de los estudiantes de secundaria y primer año universitario operan con una concepción de tipo acción (denominada por los autores concepción proceso-acción) y que la transición hacia una concepción proceso genuina requiere de actividades que permitan al estudiante anticipar imágenes, invertir asignaciones y razonar sobre la función como una totalidad. Por su parte, Dubinsky y Harel (1992) señalan que la encapsulación de la función como objeto (la transición hacia la estructura mental O) es el mecanismo cognitivo más difícil de producir en la enseñanza secundaria, y que su activación requiere experiencias en las que la función sea operada sobre otras funciones o incluida en estructuras más complejas.

Esta descripción es coherente con los patrones observados en el contexto latinoamericano de educación secundaria: Rodríguez-Nieto et al. (2024), trabajando con estudiantes de bachillerato en Barranquilla, documentan que las dificultades en el aprendizaje de la función lineal no son primordialmente algebraicas sino de coordinación entre representaciones, lo que desde la teoría APOE indica que los estudiantes operan predominantemente en estructura mental Acción; y Hernández (2023), en México, confirma que la transición hacia la estructura mental Proceso requiere de mediación tecnológica sistemática con entornos de geometría dinámica. La descomposición genética que se propone en este estudio adapta esos hallazgos al objeto específico de la función lineal y al contexto de mediación tecnológica con GeoGebra, en consonancia con lo señalado por Trigueros y Hernández-Rebollar (2022), quienes establecen que toda descomposición genética debe ser considerada una hipótesis de trabajo que se ajusta a partir de los datos empíricos de la intervención y no una prescripción definitiva sobre cómo aprenden todos los estudiantes.

En este estudio la descomposición genética toma como objeto matemático la función lineal $y = mx$ y se aplicará también dentro de las actividades propuestas en esta investigación a funciones afines a ella como la ecuación de la recta representada de la forma $f(x) = mx + b$.

Estructura Mental Acción. El estudiante calcula valores de y dado x usando la expresión algebraica como algoritmo. Construye tablas de valores siguiendo un procedimiento indicado. Marca puntos en el plano cartesiano dado un par ordenado. Su trabajo con GeoGebra consiste en introducir datos y observar resultados sin interpretar el proceso global.

Estructura Mental Proceso. El estudiante comprende la función como una regla de correspondencia que asigna a cada x un único y . Puede anticipar el efecto de modificar m o b sobre la tabla sin calcular todos los valores. Establece razonamientos sobre la recta como el

conjunto de todos los pares (x, y) que satisfacen la relación. Utiliza GeoGebra para explorar y formular conjeturas.

Estructura Mental Objeto. El estudiante compara la función lineal con otras funciones, la incluye en sistemas de ecuaciones, identifica su pendiente e intercepto como propiedades del objeto matemático. Puede operar sobre familias de funciones lineales y reconoce la función en cualquier registro de manera directa.

Estructura Mental Esquema. El estudiante coordina los registros algebraicos, gráfico, tabular y verbal dentro de una estructura conceptual articulada. Transita con fluidez entre registros, siendo capaz de elegir el más adecuado para cada propósito y aplica el concepto en situaciones de modelación de fenómenos de cambio reales.

Esta descomposición genética tiene carácter hipotético y provisional, en el sentido que Trigueros y Hernández-Rebollar (2022) atribuyen a toda descomposición genética elaborada previamente a la intervención. En este caso describe las estructuras que el investigador anticipa que el estudiante deberá construir, pero no predice el camino exacto que seguirá cada estudiante ni el tiempo requerido para cada transición. La implementación de la intervención pedagógica y el análisis de sus resultados permitirán, en la sección de Análisis de Resultados, evaluar en qué medida esta descomposición inicial se corresponde con lo observado y, si los datos lo justifican, proponer una descomposición genética refinada como producto empírico de la investigación.

Articulación entre la TRRS y la Teoría APOE

En la presente propuesta de investigación se articulan la TRRS y la teoría de manera coherente aplicándolos al aprendizaje de la función lineal. A pesar de derivarse de concepciones distintas (la psicología cognitiva piagetiana en el caso de APOE, y la semiótica cognitiva en el

caso de Duval), su combinación produce un marco analítico más completo y consistente que cualquiera de los dos por separado (Wondimuneh & Ayele, 2021; Nga et al., 2023).

Desde la TRRS se da respuesta a la pregunta ¿Qué tipo de operaciones semióticas implica la comprensión matemática? y señala las conversiones entre registros como el proceso cognitivo central. Desde la teoría APOE se responde a la pregunta ¿Cómo se construyen mentalmente las estructuras que permiten esas operaciones? y se describe la progresión desde la estructura mental Acción hasta la estructura mental Esquema como la trayectoria de esa construcción. La articulación entre ambas teorías permite un análisis simultáneo, que en el enfoque semiótico identifica qué registros usa el estudiante, qué conversiones realiza, si estas son congruentes o no y en cuanto al enfoque cognitivo establece en qué estructura mental (A, P, O o E) se encuentra el estudiante cuando opera en cada registro.

En la tabla 1 se describe de manera específica la articulación de la TRRS y la teoría APOE en torno al concepto de función lineal.

Tabla 1
Articulación TRRS–APOE para la función lineal

Estructura mental APOE	Operación semiótica predominante (TRRS)	Manifestación observable
Acción (A)	Tratamientos dentro de un registro (algebraico o tabular). Conversiones congruentes guiadas externamente.	El estudiante sigue pasos explícitos. Necesita instrucciones para convertir entre registros. Depende de GeoGebra como verificador.
Proceso (P)	Tratamientos autónomos en varios registros. Inicio de conversiones en ambas direcciones, incluyendo no congruentes parciales.	El estudiante anticipa resultados en otros registros. Comienza a explorar con GeoGebra sin necesidad de guía paso a paso.

Estructura mental APOE	Operación semiótica predominante (TRRS)	Manifestación observable
Objeto (O)	Conversiones fluidas en múltiples direcciones, incluyendo no congruentes. Puede operar sobre representaciones como totalidades.	El estudiante reconoce la función en cualquier registro. Identifica propiedades globales (pendiente, intercepto) en todos los registros.
Esquema (E)	Coordinación dinámica de todos los registros. Selección estratégica del registro más apropiado según el problema.	El estudiante elige registros con intención, articula argumentos que cruzan registros, modela situaciones nuevas sin apoyo de GeoGebra.

Nota. Elaboración propia a partir de Duval (2004, 2006), Arnon et al. (2014) y Wondimuneh & Ayele (2021).

Mediación Tecnológica con el Software GeoGebra

GeoGebra actúa en esta investigación como un entorno tecnológico que hace posible la articulación dinámica entre TRRS y APOE. La capacidad de este software para representar simultáneamente los registros algebraicos, gráfico y tabular y de permitir la actualización de cada representación en tiempo real cuando se modifican parámetros en cualquiera de ellas, crea las condiciones para que los procesos de conversión sean observables y manipulables.

Investigaciones como la de Vargas & García (2024) y la de Hernández (2023) combinan GeoGebra con la TRRS demostrando el carácter dinámico del software que resulta determinante para que los estudiantes den significado a conceptos como función, ecuación lineal y variación.

Al trabajar desde la perspectiva de la TRRS, GeoGebra se convierte en un mediador semiótico que permite visibilizar la coordinación de registros, evidenciando en pantalla aquello que el estudiante requiere interiorizar cognitivamente. La conversión pasa de ser un acto mental no observable para convertirse en un evento verificable (Arteaga et al., 2024). Desde la

perspectiva de APOE, GeoGebra crea las condiciones para que acciones como el cálculo puntual de valores y el trazado de rectas puedan ser interiorizadas en procesos y posteriormente encapsuladas en objetos. Investigaciones en contextos similares al de esta propuesta han demostrado que los estudiantes que trabajan con GeoGebra en el marco de una secuencia didáctica estructurada exhiben niveles más altos de conceptualización que los que trabajan solo con papel y lápiz (Muñoz et al., 2021; Wondimuneh & Ayele, 2021; Macías Tejena et al., 2025).

En esta investigación se distinguen tres modalidades de uso de GeoGebra que se corresponden con distintos momentos del desarrollo cognitivo de los estudiantes y con distintas operaciones semióticas de la TRRS:

GeoGebra como verificador. El estudiante calcula en otro registro y usa GeoGebra para confirmar su resultado. Corresponde a una estructura mental Acción o de transición hacia la estructura mental Proceso. La conversión es guiada externamente.

GeoGebra como explorador. El estudiante modifica parámetros y observa efectos en tiempo real, descubriendo relaciones entre registros de manera autónoma. Corresponde a una estructura mental Proceso en construcción. La conversión se internaliza progresivamente (Vargas & García, 2024).

GeoGebra como andamiaje. La coordinación de registros ocurre con apoyo de GeoGebra, pero no se sostiene sin la herramienta. Esta modalidad es el principal indicador de que el proceso de encapsulación aún no se ha completado y permite identificar la brecha entre la estructura mental Proceso y la estructura mental Objeto. (Wondimuneh & Ayele, 2021).

La inteligencia artificial como mediador secundario para el registro verbal

En el diseño de las secuencias didácticas se incorpora el uso de ChatGPT como herramienta de mediación secundaria para el registro verbal. Desde la teoría de la instrumentación desarrollada por Rabardel (1995) y retomada por Artigue (2002), ChatGPT se utiliza en esta investigación como un mediador de apoyo que actúa como un interlocutor instrumental que devuelve al estudiante una valoración de la precisión semiótica de su lenguaje matemático, exigiendo que sea el propio estudiante quien reformule y tome decisiones sobre su explicación.

La investigación reciente ha documentado que el registro verbal ha sido subutilizado en la enseñanza tradicional del álgebra (Reyes-Santander et al., 2023; Arteaga et al., 2024), y que su fortalecimiento requiere espacios de retroalimentación que el docente no siempre puede proveer de manera individualizada durante la clase. ChatGPT cumple aquí una función de andamiaje verbal individualizado: formula preguntas orientadoras y señala imprecisiones sin proporcionar la respuesta final, lo que es condición explícita de los prompts diseñados para cada sesión. Cuando el estudiante escribe con sus palabras qué ocurre entre dos registros y recibe retroalimentación sobre la precisión de esa descripción, está realizando exactamente el tipo de reflexión sobre su propia acción que la teoría APOE identifica como mecanismo de interiorización.

La función lineal

La función lineal $f(x) = mx$ es un objeto matemático que según lo expuesto por Duval (2004) en la TRRS solo puede ser aprehendido a través de la coordinación de sus registros de representación. Cada parámetro de la función aporta información que se asigna de forma diferente entre los registros, lo que influye en que ningún registro por sí solo sea suficiente para comprender completamente el concepto. (Hernández, 2023).

La pendiente m se manifiesta en el registro algebraico como un coeficiente, en el registro gráfico como la inclinación de la recta y la razón de cambio vertical/horizontal, en el registro tabular como la diferencia constante entre valores consecutivos de y para incrementos unitarios de x y en el registro verbal como la tasa de variación. Vargas & García, (2024) señalan que esta multiplicidad de manifestaciones hace de la comprensión de la pendiente uno de los indicadores más importantes para evaluar el nivel de coordinación de registros alcanzado por el estudiante.

Las funciones afines como la ecuación de la recta $y = mx + b$ el intercepto b se manifiesta en el registro algebraico como el término independiente, para el registro gráfico se identifica como el punto donde la recta corta al eje y , en el registro tabular corresponde al valor de y cuando $x = 0$ y en el registro verbal representa el valor inicial de la relación. Hernández (2023) señala que para estudiantes de noveno grado la identificación del intercepto en el registro gráfico y su conexión con el registro algebraico es relativamente difícil cuando la conversión no es congruente.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2016) sitúa el aprendizaje de las funciones lineales en el marco del pensamiento variacional, entendido como la capacidad de analizar, representar y modelar situaciones de cambio y dependencia entre cantidades. Según lo expuesto por Mateus-Nieves & Moreno (2021) este tipo de pensamiento matemático no se desarrolla mediante la manipulación algebraica aislada, sino a través de la experiencia con situaciones que requieren reconocer y describir patrones de variación en múltiples registros.

Tomando el punto de vista de la TRRS, Hernández (2023) expone que el pensamiento variacional hace énfasis en la capacidad de reconocer patrones de cambio en diferentes registros. Para el caso de la función lineal se evidencia en la identificación de constantes en una tabla, la

comprensión de la linealidad en la gráfica y de la estructura algebraica mx como manifestaciones de un mismo fenómeno de variación proporcional. Desde la perspectiva de la teoría APOE, cuando el estudiante puede aplicar el concepto de función lineal a situaciones nuevas y ha construido una red conceptual articulada es válido afirmar que se ha alcanzado la estructura mental Esquema.

Rodríguez-Nieto et al. (2024) manifiesta que al trabajar con estudiantes de bachillerato en Colombia se encontró que las actividades de laboratorio que involucraban múltiples representaciones mejoraban significativamente la consolidación del pensamiento variacional. Por ello la integración de GeoGebra como herramienta de visualización dinámica es pertinente, ya que permite a los estudiantes explorar el efecto de cambios en los parámetros de la función lineal sobre sus distintas representaciones en tiempo real. Esta capacidad de observar la covariación de manera dinámica es un puente cognitivo fundamental entre la estructura mental Proceso y la estructura mental Objeto de la teoría APOE (Wondimuneh & Ayele, 2021).

Marco metodológico

Enfoque de la Investigación

La presente investigación se desarrolla desde un enfoque cualitativo de corte interpretativo, dado que su objeto de estudio se centra en los procesos cognitivos que los estudiantes construyen, modifican y expresan en torno a la función lineal durante su interacción con secuencias didácticas mediadas por GeoGebra. Esta perspectiva coincide con lo planteado por Johnson & Christensen (2019), quienes resaltan la importancia de comprender cómo ocurren dichos procesos, en qué momentos emergen, cómo se transforman a lo largo de la intervención y qué significados les atribuyen los propios estudiantes.

En coherencia con este enfoque, se asume que el aprendizaje constituye una construcción de significados situada en un contexto social y cultural específico. Por ello el análisis desarrollado en esta propuesta no pretende generalizar los hallazgos a otras poblaciones, sino comprender en profundidad la realidad del grupo de estudio: los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, quienes enfrentan dificultades concretas para coordinar los registros de representación semiótica de la función lineal.

La investigación emplea la TRRS y la teoría APOE como marcos de referencia conceptual, transformándolos en dispositivos analíticos operativos que guían qué observar, qué preguntar y cómo interpretar lo que los estudiantes hacen. Cada acción observable de un estudiante se lee desde dos planos complementarios simultáneos:

Desde el plano semiótico se plantean preguntas como ¿Qué tipo de transformación entre registros está realizando? ¿Es una conversión o un tratamiento? ¿Es congruente o no congruente?, mientras desde el plano cognitivo se cuestiona ¿En qué estructura mental se encuentra el estudiante cuando realiza esa operación? Esta doble lectura simultánea produce

interpretaciones que ninguno de los dos marcos podría generar por separado y constituye el aporte metodológico central de esta investigación

Diseño Metodológico

El estudio se desarrolló en torno al modelo de investigación acción educativa (IAE), que se caracteriza por integrar de manera la reflexión y la acción en el contexto del aula. Este enfoque permite al docente-investigador identificar una problemática, diseñar una intervención pedagógica, implementarla y analizar sus efectos con el propósito de mejorar la práctica educativa (Bancayán & Vega, 2020).

La elección de este diseño metodológico responde a la necesidad de comprender las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las funciones lineales y de generar transformaciones en las prácticas docentes mediante la implementación de estrategias didácticas fundamentadas teóricamente. En este sentido, la investigación se concibe como un proceso cíclico, dinámico y reflexivo, en el cual cada fase retroalimenta la siguiente, favoreciendo la mejora continua de la enseñanza. (Elliott, 2015).

Para el desarrollo de la propuesta se definieron tres momentos que coinciden con los tres objetivos específicos del estudio, añadiendo un criterio específico para cada momento desde la perspectiva de análisis TRRS–APOE:

Tabla 2
Momentos del modelo IAE para la propuesta

Momento	Objetivo específico	Pregunta TRRS	Pregunta APOE
Momento 1 Diagnóstico	Caracterizar las dificultades iniciales en los procesos de conversión y tratamiento.	¿Qué conversiones logra o falla el estudiante? ¿Son congruentes o no congruentes?	¿En qué estructura mental APOE opera el estudiante con la función lineal antes de la intervención?

Momento 2 Intervención reflexiva	Describir los procesos de conversión y tratamiento durante las secuencias didácticas.	¿Qué patrones de dificultad, transformación y coordinación emergen por sesión y por registro?	¿Qué evidencias de interiorización, encapsulación o coordinación entre procesos se producen? ¿Qué estudiantes
Momento 3 Interpretación	Interpretar las transformaciones al finalizar la intervención.	¿Qué conversiones que antes fallaban ahora son exitosas? ¿Cambió la congruencia dominante?	avanzaron respecto a la estructura mental APOE? ¿Qué mecanismos se activaron?

Aunque el diseño general de esta investigación se encuentra alineado con la Investigación-Acción Educativa (IAE), para el momento de intervención reflexiva se planteó la implementación de secuencias didácticas mediadas por Geogebra, por tanto para el diseño y análisis de dichas secuencias se retoman herramientas de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1992), particularmente el análisis a priori, que se entiende como la anticipación sistemática de las variables didácticas relevantes, los obstáculos semióticos y cognitivos previsibles, y las posibles producciones de los estudiantes antes de cada sesión.

Esta articulación no es una contradicción metodológica, sino un uso complementario y funcional de las herramientas con que cuentan los investigadores. La IAE aporta la estructura del proceso investigativo definiendo quién investiga, desde qué posición, con qué ciclo reflexivo y con qué propósito transformador de la práctica pedagógica, mientras que los elementos de la Ingeniería Didáctica aportan solidez en la estructuración y análisis de las secuencias, añadiendo

criterios explícitos y teóricamente fundamentados para observar, documentar e interpretar lo que ocurre durante la intervención.

Al respecto Elliott (2015) señala que una IAE de calidad no improvisa sobre la práctica sino que parte de hipótesis teóricamente sustentadas que se contrastan y refinan a lo largo del ciclo reflexivo. Por ello el análisis a priori desarrollado para las secuencias didácticas no sustituye el ciclo de la IAE, sino que lo fundamenta, convirtiendo cada sesión en un momento de verificación, ajuste y reflexión sobre decisiones de diseño que fueron anticipadas y justificadas antes de la implementación.

Alcance de la Investigación

El alcance del estudio es de tipo descriptivo e interpretativo. El carácter descriptivo permite identificar y caracterizar las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión del concepto de función lineal, particularmente en los procesos de tratamiento y conversión entre registros de representación semiótica.

El componente interpretativo facilita el análisis de los cambios que se generan en los estudiantes a partir de la implementación de la propuesta didáctica, comprendiendo cómo evolucionan sus formas de representar, interpretar y relacionar los diferentes registros. Este tipo de alcance es pertinente porque permite tanto describir las dificultades observadas como comprender los factores que las producen dentro de un mismo proceso investigativo.

Contexto del Estudio

El Centro de Educación El Recreo es una institución de carácter privado ubicada en la ciudad de Cartagena, departamento de Bolívar, que ofrece los niveles de básica primaria, básica secundaria y media vocacional. Atiende una población estudiantil proveniente de sectores socioeconómicos diversos, con predominio de los estratos 2 y 3. En relación con el acceso a

recursos tecnológicos, la institución cuenta con una sala de informática equipada con computadores de escritorio y conexión a internet, disponible para el desarrollo de clases con mediación tecnológica; sin embargo, la mayoría de los estudiantes no dispone de acceso regular a dispositivos ni a conectividad fuera del horario escolar, lo que delimita la implementación de actividades con GeoGebra al espacio del aula.

En el área de matemáticas, el investigador principal, en su rol de docente titular del grupo de estudio, ha documentado mediante observación sistemática del aula que las prácticas pedagógicas predominantes priorizan el registro algebraico de manera aislada: los estudiantes trabajan con la expresión $y = mx + b$ como un algoritmo sin articularlo con la representación gráfica ni con situaciones de variación en contexto real. Esta observación coincide con los resultados obtenidos en evaluaciones internas de la institución en el componente de pensamiento variacional. La identificación de este patrón pedagógico constituye el punto de partida del ciclo de IAE y justifica la necesidad de una intervención didáctica estructurada (Kemmis & McTaggart, 1988).

La investigación es desarrollada por dos investigadores con roles diferenciados y complementarios. El investigador principal es el docente titular del grupo de estudio, quien diseña e implementa las secuencias didácticas y lleva el registro sistemático de la práctica a través del diario de campo. Su papel como docente del grupo garantiza la coherencia con el principio central de la IAE, que exige que la reflexión sobre la práctica ocurra desde dentro de ella (Elliott, 2015). El segundo investigador actúa como observador externo apoyando las observaciones y el registro de evidencia sin intervenir en el desarrollo de las actividades, participando de manera imparcial en el proceso de análisis e interpretación de los datos. Esta estructura de equipo investigador se inscribe en la modalidad de IAE colaborativa, reconocida en

la literatura cuando un docente-investigador trabaja con un coinvestigador externo que cumple funciones de observador, triangulador y analista (Groundwater-Smith & Mockler, 2009). La participación del observador externo fortalece el rigor metodológico del estudio al permitir la triangulación de perspectivas interna y externa acerca de los mismos eventos pedagógicos, reduciendo el riesgo de sesgo propio de la autoobservación exclusiva.

Población y Muestra

En la Investigación-Acción Educativa, la selección de participantes no sigue la lógica del muestreo estadístico. El objetivo no es la representatividad numérica sino comprender en profundidad el contexto de una práctica pedagógica situada (Hernández Sampieri et al., 2014). El grupo de estudio en esta investigación está conformado por los 32 estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, con edades entre 13 y 15 años, con quienes uno de los investigadores desarrolla su práctica docente regular. Este grupo no es una muestra extraída de una población mayor, sino el contexto donde se identifica el problema de investigación y sobre el cual se diseña, implementa y reflexiona durante la intervención didáctica. Todos los estudiantes participan en la totalidad de las actividades, los instrumentos de diagnóstico y la prueba final.

Incluir al grupo completo responde a un principio ético y pedagógico fundamental: ningún estudiante puede quedar excluido del proceso de enseñanza. Sin embargo, la IAE exige un seguimiento longitudinal detallado que no resulta viable para todos los participantes de forma simultánea. Por ello se estableció una distinción metodológica entre la participación del grupo y el análisis de casos focales (Hernández Sampieri et al., 2014).

A partir de los resultados de la prueba diagnóstica, se seleccionaron 8 casos focales mediante muestreo intencional por variación máxima (Creswell & Poth, 2018), buscando cubrir el rango más amplio posible de perfiles semiótico-cognitivos dentro del grupo. El número se

determinó por saturación informativa: los casos mínimos necesarios para que cada perfil APOE estuviera representado por al menos dos estudiantes, evitando que los patrones identificados dependan de un caso individual, criterio coherente con investigaciones APOE en bachillerato de alcance similar (Matindike & Makonye, 2023; Rachmawati, 2020). Esta distribución permite documentar trayectorias diferenciadas e identificar qué mecanismos de interiorización y encapsulación activan las secuencias didácticas según el punto de partida de cada estudiante.

Estructura General del Diseño

El proceso investigativo se organiza en cinco fases que integran la estructura de la IAE con los dispositivos analíticos TRRS–APOE.

Figura 2

Fases de la investigación acción educativa a desarrollar



Fases de la Investigación

Las fases se describen a continuación de manera detallada.

Fase 1. Diagnóstico inicial

En la fase inicial se identifica la estructura mental en que operan los estudiantes respecto al concepto de función lineal y su capacidad para representarlo en diversos registros de representación semiótica (gráfico, algebraico, tabular y verbal). En esta fase se definen las siguientes acciones clave:

- Aplicar una prueba diagnóstica que requiere que el estudiante realice tratamientos y conversión entre registros.
- Observación de la interacción de los estudiantes con los distintos registros (gráfico, algebraico, tabular, verbal), identificando dificultades, fortalezas y tipos de estrategias utilizadas para resolver situaciones desde el punto de vista semiótico y cognitivo.
- Construcción del perfil APOE–TRRS inicial y los patrones de dificultad del grupo completo.
- Definir las estructuras mentales APOE en torno a los cuales se seleccionan los casos focales.

Fase 2. Diseño de la propuesta didáctica

A partir del diagnóstico, se elaboran y validan las secuencias didácticas cuyo diseño está orientado por los obstáculos semióticos y cognitivos identificados en la Fase 1 y por la descomposición genética de la función lineal propuesta en el marco teórico.

Acciones desarrolladas en esta fase:

- Diseño de tres secuencias didácticas que progresan desde conversiones congruentes hacia conversiones no congruentes (TRRS) y desde actividades propias de la estructura mental Acción hacia actividades que promuevan la interiorización y encapsulación (APOE).

- Incorporación de GeoGebra como mediador semiótico en tres modalidades graduadas: verificador (estructura mental Acción), explorador (estructura mental Proceso) y andamiaje en transición (hacia la estructura mental Objeto).
- Diseño y validación de los instrumentos de recolección de datos con doble codificación TRRS- APOE.

Fase 3. Implementación de las secuencias didácticas

Se plantea desarrollar la intervención en tres sesiones de clase de 120 minutos cada una. En cada sesión se incorporan actividades mediadas por GeoGebra que permiten manipular representaciones y observar en tiempo real los efectos de modificar parámetros en una función lineal. Las actividades por realizar en esta fase son:

- Resolución guiada de actividades relacionadas con funciones lineales que requieren la conversión entre registros.
- Uso de Geogebra de manera interactiva de manera individual o en grupos colaborativos para interactuar simultáneamente con varios registros semióticos.
- Registro detallado de episodios semióticos relevantes dentro del diario de campo.
- Incorporación de las reflexiones escritas de cierre como insumo directo del criterio de metacognición semiótica.
- Evaluación del desempeño de los estudiantes a través de una rúbrica de síntesis TRRS - APOE al finalizar cada sesión.
- Ajuste reflexivo entre sesiones: los hallazgos de cada sesión (documentados en el diario y en la rúbrica) orientan los énfasis de la sesión siguiente, cerrando el ciclo de la IAE.

Fase 4. Evaluación final

Finalizada la implementación, se aplican instrumentos con un enfoque similar al de la evaluación diagnóstica. La fase final integra la evaluación de cierre con la sistematización de datos y la interpretación comprensiva, en coherencia con la lógica de la IAE, donde la reflexión acumulada en el diario de campo alimenta directamente la interpretación. En esta fase se desarrollan las siguientes actividades:

- Aplicación de la prueba final, diseñada como un espejo de la prueba diagnóstica, pero con mayor exigencia.
- Recopilación y organización de todas las evidencias del proceso.
- Revisión de la conversación de cierre documentada de la sesión 3, registrada en el diario de campo como episodio final, para profundizar en las percepciones de los casos focales sobre el aprendizaje.

Fase 5. Análisis e interpretación de los datos

En esta fase se sistematizan los resultados de las fases 1, 3 y 4 a partir de las categorías de análisis definidas. El proceso inicia con la articulación entre los obstáculos semióticos y cognitivos anticipados teóricamente y los datos de la prueba diagnóstica, garantizando que la lectura empírica esté orientada por el marco TRRS–APOE y no sea meramente descriptiva. Posteriormente se analizan las observaciones del diario de campo sobre las secuencias didácticas y la mediación con GeoGebra, con énfasis en las trayectorias de los ocho casos focales. El análisis desde la doble perspectiva APOE–TRRS comprende las siguientes actividades:

- Codificación semiótica abierta desde la TRRS: identificación y clasificación de todas las transformaciones semióticas observadas. Descripción específica del tipo de error cuando aparece.
- Codificación cognitiva desde la teoría APOE: asignación de una estructura mental provisional a cada episodio codificado. Documentación especial de los momentos de transición entre estructuras mentales.
- Construcción de la Matriz APOE–TRRS por caso focal: representación de la trayectoria semiótico-cognitiva desde el diagnóstico hasta la prueba final.
- Análisis de patrones de grupo: convergencias, áreas de resistencia, secuencias de adquisición.

Instrumentos de recolección de datos

La recolección de datos se realiza mediante cuatro instrumentos complementarios diseñados para garantizar la triangulación metodológica.

II. Prueba diagnóstica y prueba final

La prueba diagnóstica se aplica antes de la intervención y pretende caracterizar el estado inicial de los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos (plano TRRS) y establecer la estructura mental APOE predominante en que opera cada estudiante respecto a la función lineal. Cada ítem está diseñado para activar una operación semiótica específica que permita inferir la estructura cognitiva que desarrolla el estudiante. La prueba final replica esta estructura con mayor nivel de exigencia, añadiendo ítems de conversiones no congruentes, modelación verbal con ciclo completo y comparación entre funciones. Su análisis es fundamentalmente comparativo, para cada caso focal se contrasta el perfil APOE–TRRS inicial con el perfil final, describiendo las transformaciones producidas.

12. Diario de campo

El diario de campo es el instrumento que permite la observación activa y el de mayor riqueza analítica porque captura los procesos cognitivos y semióticos en el momento en que ocurren. Tiene una estructura de triple registro: (a) registro semiótico (lente TRRS): narración de las transformaciones entre registros observadas en cada sesión, incluyendo dirección, resultado y descripción específica del error cuando lo hay; (b) registro cognitivo APOE: valoración provisional de las estructuras mentales evidenciadas en cada episodio relevante; y (c) registro reflexivo-metodológico: reflexión sobre el funcionamiento de la secuencia didáctica y los ajustes requeridos para la siguiente sesión. Las producciones digitales de GeoGebra y los textos revisados con inteligencia artificial se analizan como fuentes documentales dentro de este registro, no como instrumentos independientes por lo que se describen, citan y analizan dentro del registro semiótico de cada sesión.

13. Rúbrica de síntesis APOE–TRRS

La rúbrica de síntesis es el instrumento que finalizar cada sesión integra en una sola tabla la valoración desde los dos lentes analíticos. Para cada categoría semiótica, establece niveles de desempeño que corresponden directamente a las estructuras mentales APOE, descritos con criterios observacionales concretos y ejemplos de evidencia. Su función es consolidar en una valoración graduada los patrones observados a lo largo de la sesión y producir un perfil por sesión que permite rastrear la progresión de cada caso focal.

14. Conversación de cierre documentada (Sesión 3)

La conversación de cierre se realiza durante los últimos quince minutos de la Sesión 3 y tiene como propósito acceder a la metacognición semiótica de los estudiantes mediante preguntas directas sobre su experiencia con los registros de representación: qué registro resultó más difícil

y por qué, de qué manera GeoGebra apoyó la comprensión y qué comprensión construyeron que antes no tenían. Se busca verificar si las interpretaciones de los investigadores corresponden a los significados construidos por los estudiantes. La conversación de cierre tiene la ventaja de ocurrir dentro del espacio natural de la sesión y su registro se integra directamente en el diario de campo como el episodio final de la Sesión 3.

Análisis Teórico Previo a la Intervención

Este capítulo tiene como propósito sistematizar los obstáculos semióticos y cognitivos que la literatura académica y los antecedentes de investigación permiten anticipar en estudiantes de noveno grado que trabajan con el concepto de función lineal. Dichos obstáculos anticipados se articulan con la prueba diagnóstica aplicada al grupo de estudio, de modo que el análisis empírico posterior sea una lectura orientada por categorías teóricamente fundamentadas.

Aunque suelen usarse como equivalentes, *análisis a priori*, *análisis preliminar* y *análisis previo a la intervención* designan operaciones distintas. El análisis a priori (Artigue, 1992) es propio de la Ingeniería Didáctica y se centra en anticipar variables didácticas, posibles producciones de los estudiantes e indicadores de comparación para una secuencia concreta antes de implementarla. El análisis preliminar revisa antecedentes y condiciones de enseñanza para contextualizar el problema y justificar decisiones de diseño, pero no produce categorías analíticas aplicables sobre los datos. El análisis previo a la intervención, propio de la IAE, va más allá: construye antes del trabajo de campo un marco interpretativo que incorpora evidencia empírica disponible y genera categorías operacionalizadas que orientarán la lectura de los datos durante y después de la intervención

En esta investigación se realizó el análisis previo a la intervención, combinando la función teórica del análisis a priori solamente en el diseño de las secuencias con el objetivo de anticipar categorías interpretativas y articularlas con el perfil real del grupo. Con esto se busca que la lectura de los datos este teóricamente orientada y no sea simplemente descriptiva.

Categorías de análisis

Las cinco categorías de análisis se definen a partir de la TRRS y la teoría APOE para garantizar la coherencia entre el marco teórico, el diseño metodológico y el proceso de análisis de datos.

Tabla 3
Categorías de Análisis

Categoría	Subcategorías	Preguntas para el análisis
C1: Conversión entre registros	C1a: Congruente (correspondencia directa). C1b: No congruente (ruptura de orden, sentido o cardinalidad).	¿En qué dirección se producen los errores? ¿Son congruentes o no congruentes? ¿El patrón persiste, se transforma o desaparece tras la intervención?
C2: Tratamiento dentro del registro	Sin subcategorías.	¿El error ocurre al operar dentro del registro o al pasar entre registros? ¿Qué tratamientos domina el estudiante y cuáles le generan dificultad?
C3: Coordinación mediada por GeoGebra	C3a: Verificador. C3b: Explorador. C3c: Andamiaje (coordinación no se sostiene sin la herramienta).	¿Qué tipo de uso hace el estudiante de GeoGebra? ¿La coordinación lograda con GeoGebra se mantiene en la prueba final sin la herramienta?
C4: Registro verbal como articulador	Sin subcategorías.	¿El estudiante usa lenguaje matemático preciso o cotidiano? ¿Sus explicaciones articulan dos o más registros? ¿La mediación de la IA produce cambios conceptuales o solo terminológicos?
C5: Metacognición semiótica	Sin subcategorías.	¿El estudiante puede identificar qué registro le resulta más difícil y explicar por qué? ¿Detecta inconsistencias entre sus propias representaciones sin ayuda externa?

Situaciones semióticas anticipadas desde la TRRS

Como se ha mencionado anteriormente la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1993, 2004, 2006) establece que la comprensión de un objeto matemático exige la coordinación de al menos dos registros de representación distintos. Sin embargo, al realizar conversiones y tratamientos entre registros se presenta obstáculos específicos que la investigación ha documentado con consistencia. Considerando esta dinámica se identifican los obstáculos más recurrentes en torno al concepto de función lineal para las categorías definidas.

Conversiones congruentes y no congruentes (C1)

Duval (2006) distingue entre conversiones congruentes es decir aquellas en que los elementos del registro de partida se corresponden directamente y en el mismo orden con los del registro destino y conversiones no congruentes, donde esa correspondencia directa no existe. Para la función lineal, las conversiones más problemáticas son sistemáticamente no congruentes:

Gráfico → Verbal. La inclinación de una recta es una propiedad general y continua que no tiene un equivalente léxico directo en el lenguaje natural. El estudiante debe construir una metáfora ("sube", "cae", "es empinada") que luego debe abandonar para adoptar el término técnico pendiente, con su carga algebraica. La no congruencia reside en que el registro gráfico codifica la pendiente como un ángulo visual, mientras que el registro verbal la codifica como una relación entre dos magnitudes ($\Delta y/\Delta x$). Esta brecha es el obstáculo central de la Sesión 1.

Verbal → Algebraico (modelación contextual). Cuando un enunciado dice "un taxista cobra \$5.000 fijos más \$2.000 por kilómetro", el estudiante debe identificar cuál cantidad es m y cuál es b . La no congruencia en este caso es estructural pues el orden en que aparecen los datos en el enunciado verbal no corresponde al orden en que aparecen en la ecuación $y = mx + b$. Antecedentes como el trabajo de Hernández (2023) muestran que la mayoría de los estudiantes

invierte m y b en este tipo de tareas, tomando el valor constante como pendiente y la tasa de cambio como intercepto.

Gráfico → Algebraico (leer m y b). Identificar el intercepto b directamente sobre el eje y , sin calcular, requiere que el estudiante trate la gráfica como un objeto con propiedades localizables y no como una colección de puntos. El cálculo punto a punto (estrategia usual en la estructura mental Acción) es el indicador más claro de que esta conversión aún no ha sido interiorizada.

Tratamiento algebraico (C2)

El tratamiento algebraico de la función lineal (operar dentro del registro algebraico para calcular la pendiente, despejar variables o construir la tabla de valores) presenta un obstáculo particular en la fórmula $m = \Delta y / \Delta x$. La investigación reporta dos errores sistemáticos: la inversión del numerador y del denominador (escribir $\Delta x / \Delta y$), y el error de signo al trabajar con coordenadas negativas (Hernández, 2023). Ambos errores son indicadores inequívocos de que el tratamiento algebraico opera en la estructura mental Acción: el estudiante ejecuta pasos memorizados sin comprender que m representa una razón de cambio, es decir, cuántas unidades varía y por cada unidad que varía x .

Coordinación mediada por Geogebra (C3)

Trabajos como el de Macías Tejena (2025) sobre el uso de software dinámico en el aprendizaje de la función lineal muestra que GeoGebra puede cumplir roles cualitativamente distintos según la estructura mental donde opera el estudiante. En Acción, el estudiante usa el software como verificador (C3a): primero hace el cálculo manual y luego comprueba si la gráfica coincide. En la estructura mental Proceso, lo usa como explorador (C3b): manipula los parámetros para descubrir relaciones antes de formularlas algebraicamente. El riesgo

documentado por la investigación es el andamiaje dependiente (C3c): el estudiante logra la coordinación entre registros con GeoGebra, pero no puede sostenerla sin él, lo que indica que la comprensión no ha sido interiorizada sino apoyada externamente.

Registro verbal (C4)

El registro verbal matemático implica la capacidad de explicar en lenguaje preciso qué ocurre entre dos registros, por ello resulta en algunos casos el más complejo, pero a la vez el que demuestra un nivel real de comprensión. Un estudiante que puede decir "*cuando m aumenta, la recta se inclina más porque m representa cuánto sube y por cada unidad que avanza x* " está articulando los registros gráfico y algebraico a través del lenguaje y es un indicador de operación en estructuras mentales más complejas como Proceso u Objeto. En esta investigación, la mediación de la inteligencia artificial actúa como interlocutor que devuelve al estudiante una evaluación de la precisión de su lenguaje matemático. La distinción clave a observar es si la revisión con IA solo produce corrección de términos de forma superficial por ejemplo cuando el estudiante sustituye "sube" por "pendiente positiva" sin cambiar su comprensión o si se produce reorganización conceptual, por ejemplo, cuando el estudiante reescribe la relación entre los parámetros.

Metacognición semiótica (C5)

La teoría APOE ubica la metacognición como una capacidad propia de las estructuras mentales Objeto y Esquema. Cuando el estudiante trata la función como un objeto con propiedades puede reflexionar sobre su propio proceso de representación y detectar inconsistencias entre sus registros. En las estructuras mentales Acción y Proceso, la dificultad con un registro se experimenta como un bloqueo "*esto es muy difícil*", "*no entiendo las fórmulas*", sin que el estudiante pueda identificar con precisión en qué tipo de conversión falla ni

por qué. La conversación de cierre de la Sesión 3 (I4) es el momento del diseño donde esta capacidad metacognitiva se puede observar de forma más clara.

Situaciones cognitivas anticipadas desde la teoría APOE

La teoría APOE (Dubinsky & McDonald, 2001; Arnon et al., 2014) describe el aprendizaje de la función lineal como un proceso de construcción cognitiva que transita por cuatro estructuras mentales: Acción (A), Proceso (P), Objeto (O) y Esquema (E). La descomposición genética de la función lineal para este estudio establece el siguiente conjunto de construcciones cognitivas esperadas:

Tabla 4

Estructuras mentales esperados desde la Teoría APOE al trabajar con funciones lineales

Estructura mental APOE	Descripción operacional para la función lineal	Indicador observable
Acción (A)	El estudiante ejecuta procedimientos paso a paso siguiendo una instrucción explícita. No puede anticipar el resultado ni invertir el proceso.	Calcula m sustituyendo en la fórmula sin saber qué representa. Construye la tabla ítem a ítem. No puede graficar sin calcular todos los puntos.
Proceso (P)	El estudiante ha interiorizado el procedimiento: puede anticipar resultados, invertir el proceso y describir la función como una transformación de entradas en salidas.	Puede decir qué valor de y corresponde a $x=$ un valor dado sin calcular. Identifica m y b visualmente desde la gráfica. Puede razonar por qué m está en el numerador.
Objeto (O)	El estudiante trata la función lineal como una entidad con propiedades. Puede operar sobre ella: compararla con otras funciones, identificar familias de rectas, razonar sobre paralelismo y perpendicularidad.	Afirma " <i>si $m_1=m_2$ son paralelas</i> " sin necesidad de graficarlas. Puede elegir entre funciones según criterios. Detecta inconsistencias entre sus propios registros.

Esquema (E)	El estudiante coordina la función lineal con otros objetos matemáticos (sistemas de ecuaciones, funciones cuadráticas, proporcionalidad directa) en un esquema coherente y flexible.	Establece conexiones entre pendiente y razón de proporcionalidad. Transfiere el ciclo de registros a situaciones nuevas sin apoyo externo.
-------------	--	--

La investigación previa en contextos colombianos de educación secundaria (Rodríguez Ramírez, 2022) sugiere que la mayoría de los estudiantes de noveno grado operan la función lineal operando en la estructura mental Acción para la mayoría de las categorías semióticas. La transición hacia la estructura mental Proceso requiere especialmente la interiorización de la fórmula de m como razón de cambio y la identificación directa de m y b desde la gráfica sin calcular punto a punto.

Implementación de la Intervención Pedagógica Mediada por GeoGebra

Este capítulo presenta el análisis de la intervención pedagógica implementada con estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, en torno al aprendizaje de la función lineal. El análisis se articula en tres momentos: la prueba diagnóstica, que caracteriza el estado semiótico-cognitivo inicial de los estudiantes, las tres sesiones de intervención didáctica mediadas por GeoGebra, que documentan la evolución de los procesos de conversión y tratamiento entre registros y la prueba final, que permite interpretar las transformaciones producidas al término del proceso.

Prueba Diagnóstica

El propósito de la prueba diagnóstica (I1) es producir el perfil semiótico-cognitivo inicial de cada estudiante, que sirve para desarrollar un diseño ajustado de las secuencias y como referente comparativo para el análisis final. Con esta prueba se identifica la estructura mental (APOE) en que se encuentran los estudiantes respecto a la comprensión de la función lineal y detectar dificultades en el paso entre registros gráfico, algebraico, numérico y verbal.

Estructura de la Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica consta de cinco preguntas que cubren los principales procesos de conversión entre registros de manera progresiva: reconocimiento visual de la pendiente (gráfico→verbal), cálculo de la pendiente desde dos puntos (numérico→algebraico), identificación de la ecuación desde una gráfica (gráfico→algebraico), construcción de tabla y gráfica a partir de una ecuación (algebraico→tabular→gráfico) y, como tarea de mayor exigencia, modelación de una situación cotidiana con función lineal e interpretación contextual de sus parámetros (verbal→algebraico). La prueba completa y la rúbrica de valoración correspondiente pueden consultarse en el Apéndice A.

Patrones de grupo anticipados y observados

Los patrones de error más frecuentes que se espera encontrar en el desarrollo de la evaluación diagnóstica son:

Tabla 5
Obstáculos anticipados para la prueba diagnóstica

Ítem	Proceso TRRS activado	Categoría	Obstáculo anticipado
Preg. 1	Gráfico → Verbal (efecto de m en la inclinación)	C1a/C1b	Confusión pendiente/verticalidad. Vocabulario exclusivamente cotidiano.
Preg. 2	Numérico → Algebraico (fórmula $m = \Delta y / \Delta x$)	C2	Inversión $\Delta x / \Delta y$. Error de signo con coordenadas negativas.
Preg. 3	Gráfico → Algebraico (leer m y b sin calcular)	C1b	Calcular punto a punto en lugar de identificar b directamente en el eje y .
Preg. 4	Algebraico → Tabular → Gráfico (cadena)	C1+C2	Bloqueo en el paso de tabla gráfico. Errores de escala. Puntos aislados sin percibir la recta.
Preg. 5	Verbal → Algebraico (modelación contextual)	C1b	Inversión m/b : tomar el valor constante como pendiente.

Resultados prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica fue aplicada al grupo completo de 32 estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, con una duración de 60 minutos. Los resultados obtenidos permiten contrastar los patrones de error anticipados con los patrones efectivamente observados en el grupo como primer resultado empírico de la investigación.

Figura 3*Desarrollo de la Evaluación Diagnóstica*

En la Pregunta 1 (Conversión de Gráfico \rightarrow Verbal, C1a), la gran mayoría de los estudiantes identificó correctamente la recta con pendiente negativa, seleccionando la opción C. Sin embargo, el registro del diario de campo y las producciones escritas evidencian que esta identificación se realizó con base en descripciones intuitivas: “*es la que baja*”, “*es la que baja de izquierda a derecha*” sin articulación con el concepto formal de pendiente ni con su expresión algebraica.

Figura 4*Cita textual adjunta del E8 en la pregunta 1*

A)	Una recta que sube de izquierda a derecha.	$E = 25 = 1 \quad (D)$
B)	Una recta completamente horizontal.	
<input checked="" type="radio"/>	Una recta que baja de izquierda a derecha.	<i>es la que baja</i>
D)	Una recta completamente vertical.	

Este patrón confirma plenamente el obstáculo anticipado: la conversión Gráfico \rightarrow Verbal opera en el grupo desde una codificación visual-intuitiva que no moviliza el lenguaje matemático. En términos APOE, la respuesta correcta en este ítem no implica estar en la estructura mental Proceso: el estudiante reconoce la dirección de la recta como una propiedad perceptual, sin acceder al parámetro m como razón de cambio. Este ítem permitió hacer la

distinción entre quienes describieron el fenómeno en lenguaje completamente cotidiano (estructura mental Acción en C1) y quienes incorporaron términos semitécnicos, aunque sin precisión formal.

En la Pregunta 2 (Conversión de Numérico \rightarrow Algebraico, C2), la mayoría de los estudiantes seleccionó la opción correcta ($m = 2$). A pesar de ello en las producciones escritas de los estudiantes se revela una heterogeneidad significativa: algunos estudiantes aplicaron correctamente la fórmula $m = \Delta y / \Delta x$, mientras que otros presentaron inversiones del numerador y el denominador o errores de signo al trabajar con las coordenadas. Este resultado confirma el obstáculo anticipado para la categoría C2: el tratamiento algebraico dentro del registro numérico-algebraico opera frecuentemente en la estructura mental Acción, con aplicación mecánica de la fórmula sin comprensión de qué representa la razón $\Delta y / \Delta x$. Aunque el resultado final coincide con la respuesta correcta no implica, que exista una comprensión real del proceso pues en varios casos se trató de una selección por descarte o por verificación numérica parcial.

Figura 5

Desarrollo y operaciones del E2 a la pregunta 2

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad \frac{13 - 5}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Pregunta 2. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (2, 5) y B (6, 13)?	
A)	$m = 3$
<input checked="" type="checkbox"/>	$m = 2$
C)	$m = 4$
D)	$m = \frac{1}{2}$

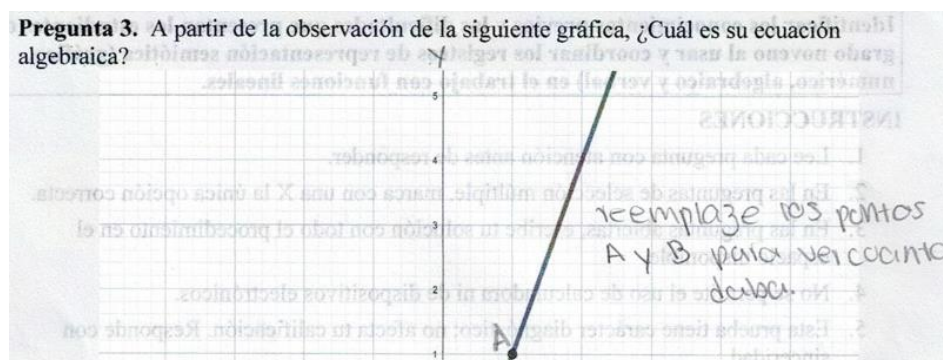
Nota: El estudiante selecciona la respuesta correcta, sin embargo, en sus producciones escritas se evidencia inversión de x y y en la fórmula de la pendiente

En la Pregunta 3 (Conversión de Gráfico \rightarrow Algebraico, C1b), la mayoría de los estudiantes identificó correctamente la ecuación $y = 3x - 2$. La estrategia predominante, documentada en las producciones escritas y en el diario de campo, consistió en sustituir los puntos visibles de la gráfica en cada una de las opciones hasta encontrar la que resultaba válida. Esta estrategia conduce al resultado correcto, pero indica que la mayoría se encuentran en la estructura mental Acción en la categoría C1b. Los estudiantes no leen directamente los parámetros m y b desde la gráfica como propiedades del objeto función lineal, sino que acuden a la verificación punto a punto, que es el tipo de operación que la teoría APOE describe como característica de la estructura mental Acción. Se confirma el obstáculo anticipado para C1b: la conversión no congruente Gráfico \rightarrow Algebraico no se realizó por identificación directa de m y b , sino por tanteo operativo dentro del registro algebraico.

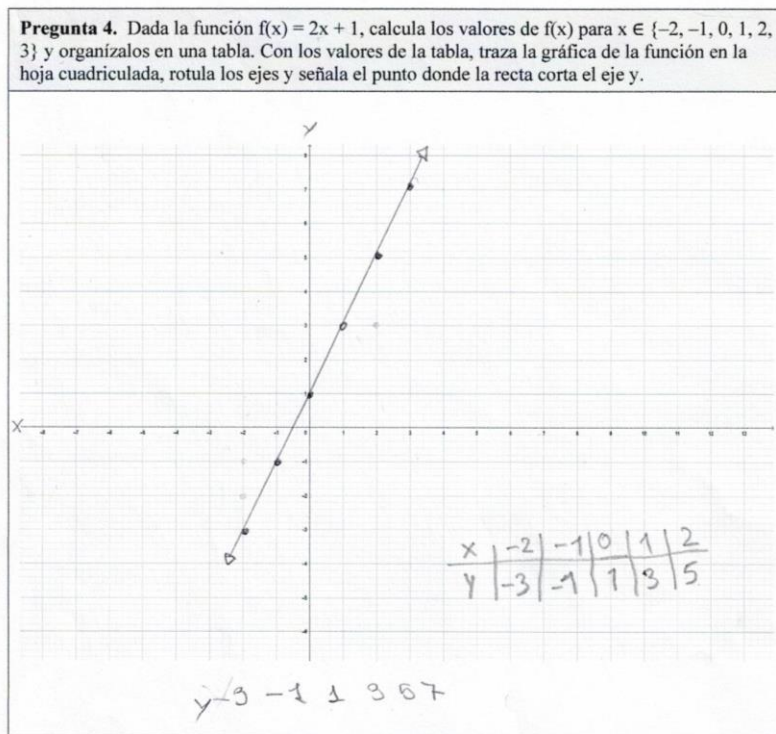
E5: “reemplazé los puntos A y B para ver cuanto daba”

Figura 6

Desarrollo de la pregunta 3 E5



En la Pregunta 4 (Conversión de Algebraico \rightarrow Tabular \rightarrow Gráfico, cadena C1+C2), la mayoría de los estudiantes logró construir la tabla de valores correctamente, sustituyendo los valores de x en la expresión $f(x) = 2x + 1$.

Figura 7*Desarrollo de la pregunta 4 E7*

A pesar de esto, la transición hacia la representación gráfica evidenció que algunos estudiantes graficaron únicamente dos puntos de los seis calculados, sin percibir la recta como una totalidad continua. Otros cometieron errores de escala en los ejes o ubicaron los puntos de manera aislada sin trazar la recta. Estas situaciones confirman lo señalado en la anticipación teórica: el tratamiento en cadena opera de manera mecánica (sustitución ítem a ítem), sin que el estudiante anticipe la forma global de la función antes de completar la tabla. La recta como objeto con sentido global no ha sido aún encapsulada.

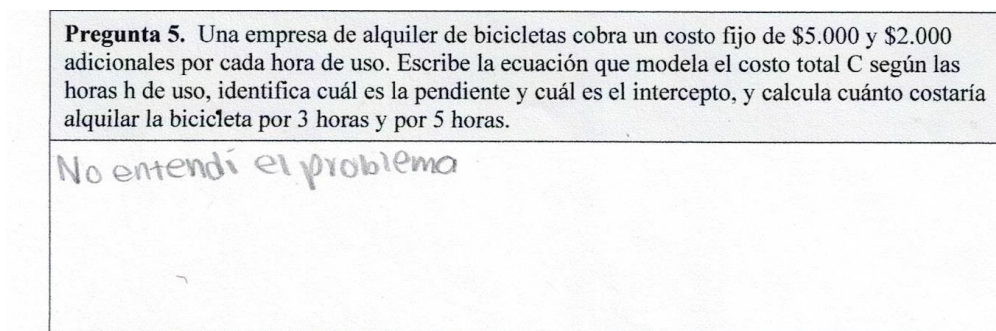
La Pregunta 5 (Conversión Verbal \rightarrow Algebraico, modelación contextual, C1b) produjo el obstáculo más generalizado de todo el diagnóstico. La gran mayoría de los estudiantes no logró plantear la ecuación que modelaba la situación del alquiler de bicicletas, y una proporción

considerable omitió el ítem completamente o escribió respuestas como “no sé cómo se hace”, “no sé” o “Profe no entendí”.

E5: “no entendí el problema”

Figura 8

Desarrollo pregunta 5 E7



Este bloqueo confirma el obstáculo anticipado para la conversión Verbal \rightarrow Algebraico: los estudiantes no logran identificar en el enunciado cuál cantidad corresponde a la pendiente (tasa de cambio, \$2.000 por hora) y cuál al intercepto (costo fijo, \$5.000). La dificultad radica en que la modelación verbal exige una articulación entre registros que no es viable en la estructura mental Acción. A diferencia de los ítems anteriores, aquí no existe posibilidad de recurrir a la sustitución o el tanteo para llegar a la respuesta.

La comparación entre los patrones anticipados y los observados es bastante consistente. Los tres obstáculos anticipados como relevantes se confirman empíricamente. En C1, la inversión m/b en la modelación verbal se verificó en la totalidad de los estudiantes que intentaron P5 con algún tipo de respuesta, y la estrategia de cálculo punto a punto (en lugar de lectura directa de m y b) fue la dominante en P3. En C2, los errores en la sustitución dentro de la fórmula de la pendiente se presentaron en una proporción significativa del grupo, aunque la corrección del resultado en muchos casos (por selección entre opciones) encubre la dificultad

subyacente. En C3, la ausencia de GeoGebra en la sesión diagnóstica impide la observación directa de este patrón, pero las estrategias de resolución documentadas (cálculo previo sin visualización dinámica) son coherentes con el uso verificador que la literatura anticipa para estudiantes en la estructura mental Acción o en transición hacia la estructura mental Proceso.

La diferencia más significativa con respecto a lo anticipado es la magnitud del bloqueo en P5, pues, aunque el análisis previo permitía anticipar dificultad en la modelación verbal, no se esperaba una omisión casi total del ítem por parte del grupo. revela que la ruptura entre el registro verbal y el algebraico es aún más profunda de lo que los antecedentes sugerían para grupos con este perfil. Este hallazgo tiene implicaciones directas para el diseño de la Sesión 2, que deberá contemplar una secuencia de andamiaje progresivo antes de exigir la modelación verbal autónoma.

Selección y caracterización de casos focales

Los resultados de la prueba diagnóstica revelaron un panorama de dificultades que resultó coherente con lo anticipado en el análisis teórico previo a la intervención. A nivel de la TRRS, los estudiantes mostraron una tendencia generalizada a operar cómodamente dentro del registro algebraico, pero evidenciaron obstáculos marcados ante conversiones que involucraban el registro gráfico o el registro verbal, especialmente cuando estas conversiones eran no congruentes, es decir, cuando el orden o la naturaleza de los elementos no se preservaba entre el registro de partida y el registro destino (Duval, 2006).

En términos de la teoría APOE, la mayoría de los estudiantes ejecutaban procedimientos algorítmicos sobre la función lineal como calcular la pendiente o sustituir valores en una expresión algebraica, sin haber interiorizado el proceso subyacente ni encapsulado la función

como un objeto cognitivo sobre el cual pudieran operar con flexibilidad (Arnon et al., 2014). La valoración de las producciones de los 32 estudiantes mediante la Rúbrica de la Prueba Diagnóstica (Apéndice A) reveló un perfil grupal homogéneo ubicado en su mayoría en la estructura mental Acción en todas o casi todas las categorías semióticas (C1 a C5), con sólo algunos casos de estudiantes que muestran indicios transición hacia la estructura mental Proceso y sólo un caso evidenciado de Proceso emergente o P no consolidado en algunas categorías, lo que confirma que el grupo en su mayoría opera con la función lineal como un conjunto de procedimientos ejecutables bajo instrucción explícita, sin evidencia de interiorización profunda del proceso ni de encapsulación de la función como objeto cognitivo.

Considerando estos resultados se realizó la selección de ocho casos focales mediante un muestreo intencional de variación máxima (Creswell y Poth, 2018), que se identificaron como EF1 a EF8. Dado que casi la totalidad del grupo se ubica en la estructura mental Acción o en estructuras mentales cercanas ésta, los perfiles de análisis no pueden definirse estrictamente por las estructuras mentales APOE tradicionales, sino que el análisis debe orientarse por los indicios de transición observados en cada categoría semiótica (C1 a C5). Este criterio es coherente con lo que la teoría APOE denomina estructura mental en transición (Arnon et al., 2014). Esta transición se observa como un proceso gradual en el que los indicios de interiorización aparecen de manera desigual en distintas categorías antes de consolidarse en la estructura mental siguiente.

La caracterización de los ocho casos focales permitió identificar tres estructuras mentales en las que operan los estudiantes del grado noveno del Centro de Educación El Recreo:

Tabla 6*Estructuras mentales asignadas a los casos focales seleccionados*

Estructura Mental	Estudiantes Focales
Acción (A) consolidada	EF1, EF2 y EF8
Acción (A) en transición hacia Proceso (P)	EF3, EF4, EF5 y EF7
Proceso (P) emergente	EF6

Estructura Mental A consolidado (EF1, EF2, EF8). Los estudiantes operan exclusivamente desde la percepción visual directa, sin acceder a la formalización algebraica ni numérica. Identifican la dirección de una recta en la gráfica, pero su descripción se limita al lenguaje cotidiano ("sube", "baja") y no logran articular los registros entre sí. La modelación contextual es completamente inaccesible, como lo evidencia las respuestas encontradas en la pregunta 5. No hay reflexión sobre el propio proceso ni uso de terminología matemática.

Estructura Mental A en transición hacia P (EF3, EF4, EF5 y EF7). Estos estudiantes han comenzado a operar dentro de los registros de representación, especialmente en el numérico y algebraico, pero su coordinación entre registros sigue siendo frágil. Aplican la fórmula de la pendiente en casos simples y construyen tablas de valores con pocos errores, pero la conversión desde el lenguaje verbal a la ecuación algebraica permanece bloqueada y el lenguaje matemático todavía no aparece de forma espontánea.

Estructura Mental P emergente (EF6). Este estudiante comienza a establecer relaciones estructurales entre registros, más allá de la percepción visual. Anticipan que con dos o más puntos de la tabla pueden construir un gráfico, lo que revela un primer control consciente sobre la conversión gráfico \rightarrow algebraico. La modelación contextual sigue siendo una barrera, pero la aproximación a las tareas es cualitativamente más reflexiva.

La tabla siguiente resume los rasgos diferenciadores de cada estructura mental en las cinco categorías de análisis.

Tabla 7

Rasgos característicos en cada estructura mental APOE establecido para la investigación

Categoría	A consolidada (EF1, EF2, EF8)	A en transición (EF3, EF4, EF5, EF7)	P emergente (EF6)
C1 Conversión	Identifica dirección visual. Sin lenguaje matemático.	Intuye relación inclinación-pendiente. Conversión parcial.	Relaciona pendiente con $\Delta y/\Delta x$. Lee m y b desde la gráfica.
C2 Tratamiento	No aplica fórmula o la aplica con errores graves.	Aplica fórmula en casos simples; errores de signo.	Aplica correctamente. Anticipa forma de la recta.
C3 GeoGebra	Sin uso digital. Representación intuitiva.	Sin uso digital. Representación manual básica.	Sin uso digital. Representación manual de mejor calidad.
C4 Verbal	Lenguaje cotidiano exclusivo.	Lenguaje cotidiano; no articula registros.	Inicia uso de términos matemáticos.
C5 Metacognición	Sin reflexión sobre el proceso.	Sin reflexión espontánea.	Reflexión limitada (reconoce dificultades).

El progreso entre estructuras mentales no es lineal ni homogéneo para todas las categorías. C3 (GeoGebra) permanece en la estructura mental A para todos los estudiantes, dada la ausencia de herramientas digitales durante la aplicación de la prueba diagnóstica. Las diferencias más significativas entre estructuras mentales se concentran en C1 y C2.

Las actividades propuestas se seguirán realizando para el grupo total de 32 estudiantes del grado noveno del Centro Educativo El Recreo, aclarando que para el análisis propuesto se documentará el seguimiento longitudinal a lo largo de las tres sesiones y la prueba final

únicamente para los 8 casos focales, constituyéndose en elementos centrales del análisis de resultados de esta investigación.

Implicaciones del Análisis de la Prueba Diagnóstica para el Diseño de las Secuencias

Didácticas

El análisis previo a la intervención es el mecanismo concreto que hace de la IAE un diseño orientado por la evidencia. Los obstáculos identificados desde el punto de vista semiótico y los identificados desde el punto de vista de construcción cognitiva se contrastan con el perfil diagnóstico para generar ajustes de diseño específicos para las tres sesiones. Las siguientes implicaciones son directamente derivables de esta comparación:

- **Para la Sesión 1.** El mayor énfasis debe estar en la construcción del vínculo entre el número m y la percepción visual de la inclinación (C1b, C3b). como el diagnóstico confirma que la mayoría de los estudiantes opera en la estructura mental Acción en C1, la actividad del deslizador debe introducirse antes del cálculo algebraico, no después.
- **Para la Sesión 2.** La fórmula de m debe trabajarse como razón de cambio interpretable (estructura mental P) antes de exigir la modelación verbal (C1b alta dificultad). Como el diagnóstico muestra dificultad es en la pregunta P2 (inversión $\Delta x/\Delta y$), la Sesión 2 debe incluir una actividad explícita de razonamiento sobre por qué Δy está en el numerador.
- **Para la Sesión 3.** El ciclo completo de registros y el paralelismo exigen que la mayoría de los estudiantes haya alcanzado al menos la estructura mental de transición $A \rightarrow P$ en C1 y C2. Si en el desarrollo de las Sesiones 1 y 2 no se perciben avances en los estudiantes que están en la estructura mental A consolidado, la Sesión 3 debe ajustar su nivel de exigencia inicial.

Secuencias Didácticas

La siguiente tabla condensa la información general de las sesiones a implementar durante la intervención pedagógica:

Tabla 8

Estructura de cada Sesión

Sesión	Contenido central (TRRS)	Foco cognitivo (APOE)	Modalidad de GeoGebra
Sesión 1 Exploración gráfica e inclinación	Gráfico \leftrightarrow Verbal (efecto de m). Gráfico \rightarrow Numérico \rightarrow Algebraico (cálculo de $m = \Delta y / \Delta x$).	Identificación de la estructura mental inicial (A predominante). Primeras indicaciones de interiorización.	GeoGebra como explorador: applet del ciclista + manipulación libre de rectas.
Sesión 2 De los puntos a la ecuación formal	Numérico \rightarrow Algebraico (fórmula de m). Algebraico \leftrightarrow Gráfico (deslizadores). Verbal \rightarrow Algebraico (modelación contextual).	Transición A \rightarrow P: fórmula de m como proceso, no como algoritmo. Primera modelación verbal.	GeoGebra como verificador y explorador. Deslizadores para la recta $y = mx + b$.
Sesión 3 Modelación y ciclo completo	Ciclo completo: Verbal \rightarrow Numérico \rightarrow Algebraico \rightarrow Gráfico. Paralelismo y perpendicularidad.	Primeras evidencias de estructura mental O (función como entidad). Metacognición semiótica.	GeoGebra como andamiaje en transición: verificar si la coordinación se sostiene sin él.

Sesión 1: Exploración Gráfica y Construcción de la Noción de Pendiente

El propósito de esta sesión es construir la idea de pendiente como inclinación y razón de cambio, vinculando visualmente el valor de m con el comportamiento de la recta.

Estructura de la Sesión 1

La sesión se estructura en torno a la exploración dinámica con GeoGebra, mediante la cual los estudiantes trazan rectas libremente, calculan la pendiente usando la razón $\Delta y / \Delta x$ e

identifican los cuatro tipos de pendiente: positiva, negativa, cero e indefinida. A partir de esa exploración, elaboran una explicación escrita sobre el significado de "más inclinada" y la revisan con apoyo de inteligencia artificial para ajustar la precisión del lenguaje matemático. Las actividades priorizan las conversiones del registro gráfico al verbal y constituyen el primer acercamiento exploratorio de los estudiantes al software. La secuencia didáctica desarrollada en la sesión 1 y su rúbrica de valoración pueden consultarse en el Apéndice B.

Análisis a priori

Objetivo didáctico de la sesión. Iniciar la construcción del vínculo entre la representación gráfica de la función lineal y su expresión algebraica, con énfasis en la percepción visual de la pendiente (C1a, C1b) y el primer uso exploratorio de GeoGebra (C3b).

Variables didácticas. Tipo de rectas presentadas (pendiente positiva, pendiente negativa, pendiente cero, pendiente indefinida), magnitud de la pendiente, uso libre/guiado de GeoGebra y uso de IA como mediador verbal.

Análisis teórico. Desde la perspectiva de Raymond Duval, la comprensión inicial de la función lineal exige coordinar el registro gráfico con el verbal y numérico, superando interpretaciones puramente perceptivas de la inclinación. En términos APOE, se espera predominio de la estructura mental Acción, donde el estudiante reconoce cambios visibles, pero aún no interioriza la pendiente como razón de cambio. El uso de GeoGebra se incorpora como mediador para favorecer esa transición inicial hacia procesos de interiorización.

Obstáculo anticipado prioritario. La conversión Gráfico→Verbal no congruente (C1a): el estudiante codifica la pendiente como ángulo visual y no como razón $\Delta y/\Delta x$. Se espera vocabulario cotidiano (“*sube*”, “*es inclinada*”) sin articulación con el parámetro m .

La sesión estuvo organizada en tres momentos articulados. El primero consistió en la exploración libre del applet del ciclista, donde los estudiantes debían manipular el deslizador m y registrar verbalmente lo que observaban. El segundo momento implicó la construcción de rectas en GeoGebra, con la tarea de trazar rectas de distinta inclinación y calcular Δy y Δx desde la cuadrícula para llegar al cociente $m = \Delta y / \Delta x$. El tercer momento fue de síntesis verbal mediada por inteligencia artificial, en el que los estudiantes debían formular en sus propias palabras qué es la pendiente y recibir retroalimentación de la IA sobre la precisión matemática de su explicación.

Episodios Semióticos Relevantes y Análisis TRRS–APOE en la Sesión 1

El análisis del diario de campo de la sesión 1 permite identificar seis episodios semióticos significativos que iluminan distintas dimensiones del proceso de aprendizaje de los ocho casos focales. Estos episodios son el núcleo del análisis cualitativo de la sesión y se leen a partir de las categorías de análisis TRRS–APOE.

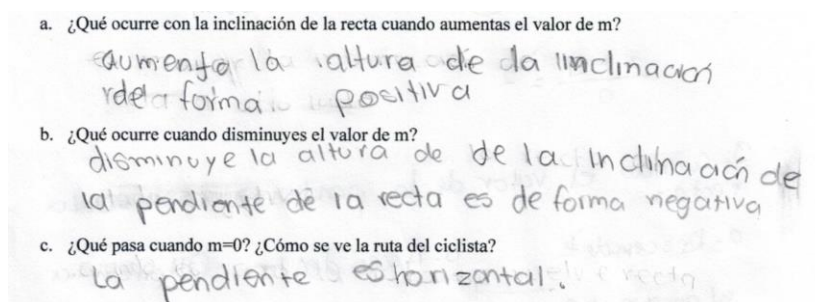
El primer episodio involucró a EF1 y EF8, quienes no lograban ubicar el deslizador m en el applet. Este bloqueo instrumental (C3a) les impidió inicialmente acceder al objeto matemático que se pretendía explorar, por lo que su interacción con GeoGebra en este momento fue de tipo puramente instrumental, sin interpretación del valor de m ni de su relación con la inclinación de la recta. Desde la perspectiva APOE, este episodio es coherente con la estructura mental A inicial: el estudiante requiere de instrucción explícita para ejecutar cada paso y no puede anticipar el efecto de su acción sobre la representación gráfica.

El segundo episodio, protagonizado por EF2, EF4 y EF7, evidenció una conversión congruente entre el registro gráfico y el registro verbal (C1a), aunque limitada al lenguaje cotidiano. Los estudiantes identificaron que al aumentar m la recta "*sube más rápido*", pero no

lograron explicar por qué ocurría ese efecto ni vincularlo con el cociente $\Delta y/\Delta x$. Este resultado es consistente con una transición incipiente de la estructura mental A hacia la estructura mental P: la regularidad es reconocida, pero el proceso subyacente no ha sido interiorizado. La cita de EF7 "La pendiente es horizontal" registrada en este momento refleja la persistencia de concepciones erróneas que el lenguaje cotidiano no permite superar sin una intervención didáctica que fuerce el tránsito hacia el lenguaje matemático formal.

Figura 10

Reflexiones del EF7 respecto a la actividad con el applet del ciclista



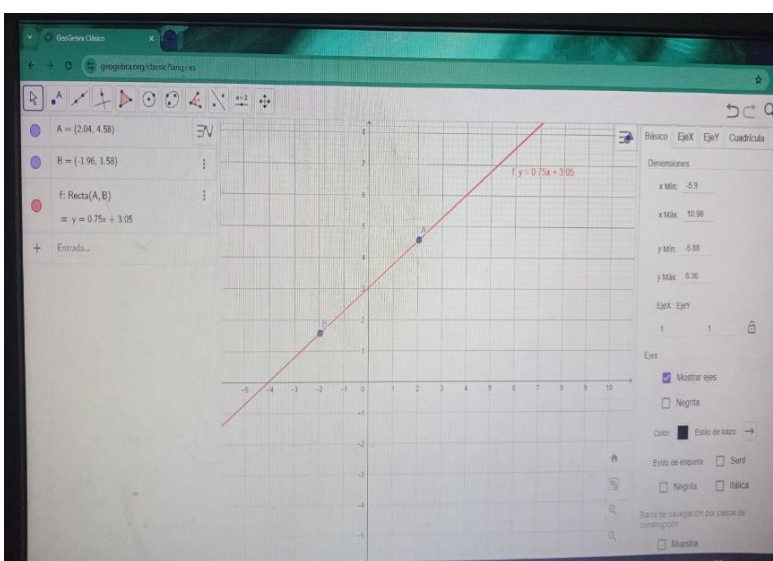
El tercer episodio documentó el trabajo de EF5, quien presentó dificultad inicial para ubicar las herramientas de GeoGebra, pero logró, tras superar el bloqueo instrumental, construir una recta y mover puntos sobre ella. Este trayecto (desde el bloqueo inicial hasta el éxito con el software) se puede catalogar en términos de la TRRS como un tratamiento dentro del registro gráfico (C2), lo que supuso el inicio de un aprendizaje instrumental, aunque aún no evidenciaba comprensión conceptual de la relación entre la forma de la recta y el valor numérico de m .

Los episodios cuarto y quinto mostraron los desempeños más avanzados durante la sesión. EF3 y EF6 lograron identificar correctamente Δy ("sube") y Δx ("avanza") utilizando la cuadrícula en GeoGebra, lo que supone una cuantificación dentro del registro gráfico que sienta las bases para el cálculo de m como razón de cambio (C2). EF3, realizó el recorrido completo desde el registro numérico hasta el algebraico y luego al gráfico (C2, C3b), calculando la

pendiente manualmente y verificando el resultado con la herramienta "*Pendiente*" de GeoGebra. Este episodio es el de mayor solidez de la sesión desde la perspectiva de la coordinación semiótica, ya que EF3 utilizó GeoGebra no como verificador pasivo sino como herramienta activa de contrastación entre dos registros (C3b), lo que anticipa una estructura mental P en consolidación.

Figura 11

Interacción con Geogebra de EF3 en el desarrollo de P2 Sesión 1



El sexto episodio involucró a EF2 y EF4 en la elaboración de una explicación verbal del concepto de pendiente. Su definición "*cuando la recta sube o baja*" evidenció un error parcial en la categoría C4: el registro verbal fue activado, pero sin articulación de la razón de cambio como elemento conceptual central. La comparación entre la versión inicial y la versión revisada con apoyo de la IA mostró una mejora léxica superficial, pero no una reorganización conceptual autónoma, lo que señaló que la dependencia de la validación externa era todavía alta en esta etapa.

Figura 12

Definición final del concepto de pendiente EF4

Discusión Grupal: ¿Qué es la Pendiente? *variar con respecto al eje horizontal*
Cambio del incremento vertical con respecto al horizontal.

Valoración APOE y uso de GeoGebra en la Sesión 1

Al término de la sesión 1, la valoración APOE por caso focal mostró el siguiente panorama: EF1 y EF8 permanecieron en la estructura mental A (sin lograr relacionar el valor de m con la inclinación de manera autónoma); EF2, EF4 y EF7 evidenciaron una transición incipiente A→P (reconocen cambios en la inclinación, pero sin formalización); EF5 se situó en la estructura mental A con aprendizaje instrumental pues muestra señales de interiorización, pero aún no integra comprensión conceptual. EF3 y EF6 se ubicaron en la estructura mental P en la categoría C3, diferenciándose del resto por su capacidad de identificar y cuantificar las variaciones Δy y Δx como elementos constitutivos de la pendiente.

En lo que respecta al uso de GeoGebra, la sesión 1 mostró una progresión desde un uso instrumental básico (C3a) hacia un uso exploratorio incipiente (C3b). La mayoría de los estudiantes comenzaron utilizando el software de manera reactiva (manipulaban sin intención definida) pero hacia el final de la sesión algunos pares, especialmente EF6, EF7 y EF3, comenzaron a usarlo como herramienta de exploración activa. No se evidenció aún el uso de GeoGebra como andamiaje consolidado (C3c), ni transferencia del aprendizaje sin el apoyo del software.

El registro verbal predominante durante la sesión 1 fue de carácter cotidiano, con expresiones como "sube", "baja" o "más inclinada". Solo algunos estudiantes incorporaron de manera espontánea términos como "pendiente" o "cambio", y únicamente EF3 mostró indicios de articulación entre el registro numérico y el verbal para dar cuenta del concepto. Esta

observación es coherente con la descripción que Duval (2006) hace del registro verbal como articulador: su activación depende de que el estudiante haya logrado previamente una coordinación mínima entre otros registros, condición que al final de la sesión 1 solo se cumplía parcialmente en los casos más avanzados del grupo.

Sobre la base de estos hallazgos, el análisis de la sesión 1 orientó los ajustes para la sesión 2: diseñar una inducción breve al uso de GeoGebra antes del inicio de las actividades, introducir situaciones que obliguen a los estudiantes a explicitar la relación $\Delta y/\Delta x$ de manera autónoma, y fortalecer progresivamente el uso del lenguaje matemático formal en las producciones escritas y verbales.

Sesión 2: De los Puntos a la Ecuación Formal de la Recta

El propósito de esta sesión es formalizar el concepto de pendiente y establecer conexiones entre puntos, ecuación y gráfica.

Estructura de la Sesión 2

La sesión parte de un repaso del concepto de pendiente para introducir formalmente la fórmula $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, cuyos resultados los estudiantes verifican en GeoGebra. A continuación, se presenta la ecuación lineal $y = mx + b$ y se explora el efecto de los parámetros m y b mediante deslizadores. El cierre de la sesión involucra situaciones de modelación contextual (alquiler de bicicletas y vaciado de un tanque de agua) a partir de las cuales los estudiantes elaboran una explicación escrita sobre el significado de la pendiente en contexto, que luego revisan con retroalimentación de inteligencia artificial.

La secuencia didáctica desarrollada en la sesión 2 y su rúbrica de valoración pueden consultarse en el Apéndice B.

Análisis a Priori

Objetivo didáctico de la sesión. Consolidar el tratamiento algebraico de m como razón de cambio interpretable (C2, estructura mental P) e iniciar la modelación verbal en contexto real (C1b), apoyados en la cadena algebraico→tabular→gráfico.

Variables didácticas. Puntos de coordenadas con diferentes valores (positivas, negativas, diferencias pequeñas, diferencias grandes), valores de m y b positivos y negativos, manipulación de deslizadores en GeoGebra.

Análisis Teórico. Teóricamente, esta sesión profundiza la conversión entre registros numérico, algebraico y gráfico, considerada por Raymond Duval como núcleo de la comprensión matemática. Desde APOE, el objetivo es que la fórmula de la pendiente deje de ser un procedimiento mecánico (Acción) y comience a operar como un Proceso interiorizado. La exploración dinámica en GeoGebra busca consolidar la comprensión de la relación entre pendiente, intercepto y comportamiento gráfico.

Obstáculo anticipado prioritario. La inversión $\Delta x/\Delta y$ en el cálculo de m (C2) y la inversión m/b en la modelación verbal (C1b): el estudiante toma el valor constante del enunciado como pendiente. Ambos errores son indicadores de prevalencia de la estructura mental A en el tratamiento algebraico.

Ajustes derivados de la Sesión 1. Considerando que la mayoría de los casos focales no logró la identificación directa de m desde la gráfica (C1b, estructura mental A persistente), la Sesión 2 se inicia con una actividad de revisión breve (10 minutos) antes de avanzar al tratamiento algebraico. Se incluye también un momento de razonamiento sobre por qué Δy ocupa el numerador antes de practicar el algoritmo para superar la dificultad evidenciada en la inversión $\Delta x/\Delta y$.

Indicador de avance esperado al cierre de la sesión. Reducción observable del error de inversión $\Delta x/\Delta y$ en los casos A consolidado; al menos un caso focal logra modelar un enunciado verbal en la ecuación $y = mx + b$ asignando correctamente m y b (C1b, estructura mental P).

Contexto y Desarrollo de la Sesión 2

Esta sesión espera promover la transición desde la comprensión gráfica de la pendiente hacia la formalización algebraica de la ecuación de la recta $y = mx + b$, articulando los registros numérico, algebraico y gráfico en un proceso de elaboración progresivamente más complejo.

La sesión se inició con un repaso del concepto de pendiente abordado en la sesión anterior, orientado a activar conocimientos previos y establecer un puente con la formalización algebraica. Posteriormente se introdujo la fórmula de la pendiente a partir de dos puntos $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$, estableciendo la transición del registro numérico al algebraico. En un segundo momento, los estudiantes exploraron el comportamiento de la ecuación $y = mx + b$ mediante deslizadores en GeoGebra, observando cómo la variación de m y de b afectaba de manera diferenciada la inclinación y la posición de la recta. En el tercer momento, se plantearon situaciones de modelación contextual (problemas relacionados con ciclistas y con un tanque de agua) que exigían la conversión desde el registro verbal hacia el registro algebraico, constituyendo la primera aparición sistemática de conversiones no congruentes en la intervención.

Episodios Semióticos Relevantes y Análisis TRRS–APOE en la Sesión 2

El primer episodio de la sesión 2 involucró a EF1 y EF8 en la aplicación de la fórmula de la pendiente a partir de coordenadas dadas. Ambos estudiantes lograron sustituir los valores en la fórmula, pero presentaron dificultades en el manejo de signos negativos y en la organización

correcta de la fracción. Este episodio fue codificado en la categoría C2 con errores operacionales: la conversión entre el registro numérico y el algebraico es incompleta porque el tratamiento algebraico no se realiza de manera autónoma y sin errores. Desde la perspectiva APOE, estos errores son indicadores de que la fórmula se usa como un algoritmo desde la estructura mental A, sin que los estudiantes hayan interiorizado el proceso de razón de cambio que la sustenta.

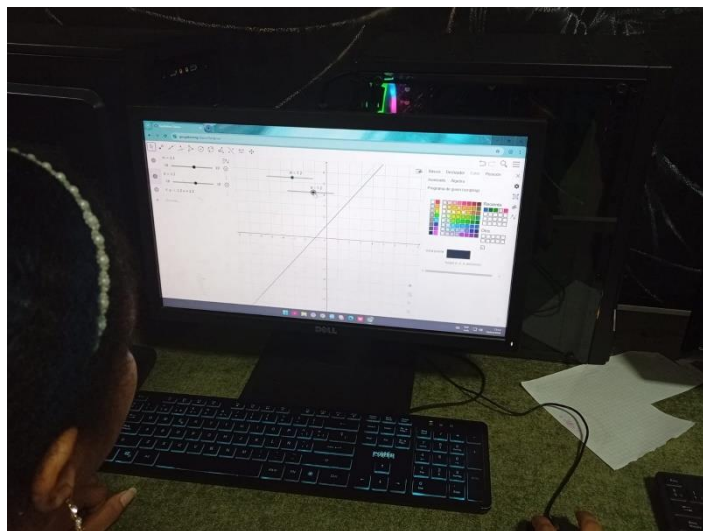
El segundo episodio documentó el trabajo de EF2 y EF7 con el trazado de la recta entre dos puntos en GeoGebra. Ambos estudiantes ubicaron correctamente los puntos y construyeron la recta, lo que supone un tratamiento exitoso dentro del registro gráfico. Sin embargo, no consolidaron la relación entre el valor numérico de la pendiente que habían calculado y la inclinación visible de la recta que habían trazado. Esta incongruencia entre el registro numérico y el gráfico (cada uno manejado con relativa competencia, pero sin coordinación efectiva entre ellos) es precisamente el tipo de dificultad que la TRRS identifica como uno de los obstáculos más frecuentes en el aprendizaje de la función lineal (Duval, 2006; Hernández, 2023).

El tercer episodio mostró el trabajo de EF3, quien utilizó la herramienta "Pendiente" de GeoGebra para contrastar el resultado de la fórmula con el obtenido en el software. Este episodio fue catalogado como C3b (uso de GeoGebra como verificador de resultados entre registros) y representa el tipo de coordinación mediada tecnológicamente que Artigue (2002) identifica como característica de un uso instrumentado avanzado del software. EF3, al contrastar los dos valores y confirmar su coincidencia, estaba realizando una operación semiótica de alto valor cognitivo: establecer la equivalencia entre una representación numérica-algebraica y una representación gráfica del mismo objeto matemático.

El cuarto episodio, protagonizado por EF4 y EF6, ilustró la exploración de los deslizadores m y b en la ecuación $y = mx + b$. Ambos estudiantes reconocieron que al variar m cambiaba la inclinación de la recta, mientras que b producía un desplazamiento vertical, aunque sus explicaciones seguían siendo de carácter intuitivo. Este nivel de comprensión fue codificado como C1b (conversión algebraico \rightarrow gráfico con interpretación parcial) y como estructura mental P en transición: los estudiantes coordinan los dos registros, pero aún no pueden argumentar formalmente el mecanismo de ese vínculo.

Figura 13

Manipulación de la pendiente a través de deslizadores en Geogebra EF6



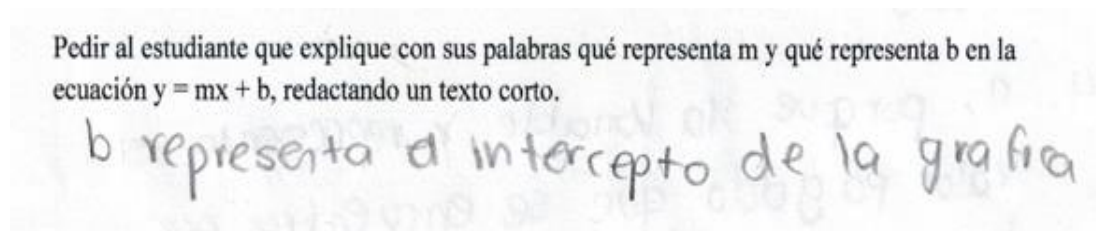
El quinto episodio documentó el trabajo de EF5 con la identificación de los parámetros m y b en la ecuación $y = 4x - 3$. EF5 reconoció correctamente los parámetros, lo que supone una conversión exitosa desde el registro algebraico hacia el verbal descriptivo (C4), aunque su explicación se mantuvo en términos cotidianos y no incorporó la noción de razón de cambio. Este episodio, leído junto con los episodios anteriores de EF5, sugiere un patrón de desempeño: la estudiante maneja bien los procedimientos de identificación, pero tiene dificultades para articular el significado conceptual de lo que identifica.

El sexto episodio involucró a EF2 y EF3 en la explicación del significado de m y b , con revisión mediada por IA. Ambos mejoraron la coherencia de sus explicaciones tras la retroalimentación de la IA, aunque requirieron apoyo externo para estructurar el lenguaje matemático formal. Se encontraron expresiones como las siguientes:

EF7: “ b representa el intercepto de la gráfica.”

Figura 14

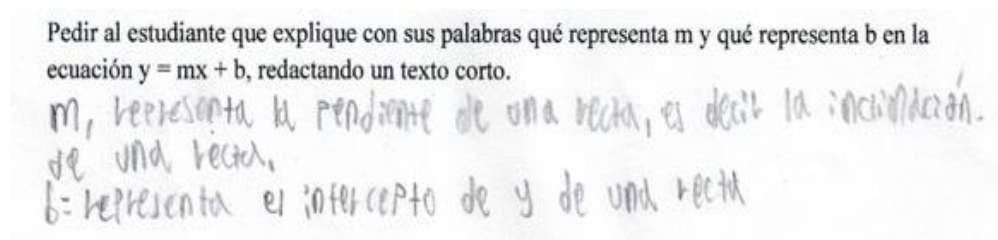
Definición de pendiente del EF7



EF4: “ m representa la pendiente de una recta, es decir la inclinación de una recta.”

Figura 15

Definición de pendiente de EF4



Más adelante se exploró la definición de pendiente dentro de una situación del contexto.

La cita de EF6 “En estos contextos, la pendiente es la variable que hace que el valor de (x) disminuya o aumente con relación a la (b) o al intercepto general”, ejemplifica el estado cognitivo predominante en este momento de la intervención: los estudiantes acceden a una comprensión intuitiva del papel de los parámetros, pero no han construido aún la distinción

conceptual entre tasa de cambio m y valor inicial b como nociones matemáticamente diferenciadas.

Figura 16

EF6 explica los parámetros de la función lineal en torno a un problema contextualizado

Después de resolver el problema contextual, el estudiante explica de forma escrita qué significa la pendiente en ese contexto.

En estos contextos, la pendiente es la variable que hace que el valor de (x) disminuya o aumente con relación a (b) o al intercepto general.

El séptimo episodio, protagonizado por EF4 y EF8, implicó la construcción de ecuaciones lineales a partir de problemas verbales. Ambos estudiantes lograron proponer ecuaciones para las situaciones contextuales planteadas, aunque con dificultades en la interpretación del significado de la pendiente como razón de cambio dentro del contexto. EF8 manifestó en su producción escrita la construcción de la función $y = 2000(x) + 5000$ para el problema del costo de alquiler de bicicletas, pero más adelante expresó el significado de pendiente relacionando que era \$2000 porque acompañaba la variable, situación que evidencia que aún no ha interiorizado la razón de cambio que representa la pendiente.

Figura 17

Solución de EF8 a la situación contextual

"Una empresa de alquiler de bicicletas cobra un costo fijo de \$5.000 y \$2.000 por cada hora de uso. Si y es el costo total y x son las horas, escribir una ecuación que sirva para modelar la situación. ¿Cuál es la pendiente y qué significa?"

$$Y = 2000x + 5000$$

$$y = mx + b$$

La pendiente es 2000 lo que significa que por cada minuto la penalización es por

"Un tanque de agua tiene 500 litros y se vacía a razón de 10 litros por minuto. Escribir la

Después de resolver el problema contextual, el estudiante explica de forma escrita qué significa la pendiente en ese contexto.

En el caso ①

La pendiente es 2000 ya que esta acompañado por una variable que son las horas.

Valoración APOE y Evolución Semiótica en la Sesión 2

La valoración APOE al término de la sesión 2 mostró una progresión generalizada respecto a la sesión 1. EF1 avanzó a la estructura mental P en C1 (aplica correctamente la fórmula, aunque con errores leves de estructura). EF2 alcanzó estructura mental P en C1 (realiza cálculos con comprensión limitada). EF3 se consolidó en estructura mental P en C2 (relaciona representación gráfica sin formalización completa). EF4 se mantuvo en la estructura mental P en C2 (comprende visualmente la inclinación). EF5 avanzó en C3 (verifica coherencia entre registros). EF6 y EF7 se consolidaron en estructura mental P en C3 (interpretan m y b de forma intuitiva y reconocen la variación de parámetros en la ecuación). EF8 mostró estructura mental A en transición hacia la estructura mental P en C3 con capacidad de modelar situaciones con apoyo conceptual básico.

La evolución del uso de GeoGebra fue notable: el software funcionó como herramienta central de transición entre registros, utilizado para construir rectas, verificar pendientes y explorar el comportamiento de $y = mx + b$ mediante deslizadores. Respecto a la sesión 1, se evidenció un avance desde el uso instrumental básico hacia un uso más exploratorio y de validación. Sin embargo, GeoGebra no se había consolidado aún como herramienta de argumentación matemática autónoma: los estudiantes dependían de él para validar sus afirmaciones, pero todavía no podían prescindir de él para razonar sobre las propiedades de la función.

El registro verbal mostró una mejora progresiva en la verbalización de los conceptos de pendiente e intercepto, aunque las explicaciones siguieron siendo predominantemente descriptivas. El uso de la IA como mediadora metacognitiva contribuyó a mejorar la estructuración del lenguaje matemático, especialmente en la explicación de conversiones entre registros, si bien la dependencia de la validación externa continuó siendo alta. Esta observación es relevante para el diseño de la sesión 3: se hace necesario introducir situaciones que redujeran la dependencia de la IA y promovieran la argumentación verbal autónoma por parte de los estudiantes.

Sesión 3: Modelación Matemática y Consolidación del Ciclo Completo de Registros

El propósito de esta sesión es que el estudiante logre coordinar autónomamente registros y construya las primeras nociones de función lineal como objeto matemático aplicando dicho concepto en contextos reales.

Estructura de la Sesión 3

La sesión 3 aborda las propiedades de rectas paralelas y perpendiculares mediante la comparación de pendientes, y plantea situaciones de modelación en contextos reales que exigen recorrer el ciclo completo verbal→numérico→algebraico→gráfico con verificación en GeoGebra. Los estudiantes elaboran y revisan explicaciones grupales con apoyo de inteligencia artificial, socializan sus resultados y cierran con una mesa redonda de reflexión metacognitiva, buscando consolidar una comprensión integrada de la función lineal y autonomía en el uso de sus registros de representación. La secuencia didáctica desarrollada en la sesión 3 y su rúbrica de valoración pueden consultarse en el Apéndice B.

Análisis a Priori

Objetivo didáctico de la sesión: completar el ciclo de coordinación entre los cuatro registros (verbal, algebraico, tabular, gráfico), iniciar el razonamiento sobre familias de rectas

paralelas (C1+C2, estructura mental O emergente) y activar la metacognición semiótica a través de la conversación de cierre (C5, I4).

Variables Didácticas. Contextos reales diversos, conceptos de paralelismo y perpendicularidad, tareas con y sin apoyo de GeoGebra, uso de lenguaje matemático en la socialización grupal.

Análisis Teórico. Desde la TRRS, la comprensión profunda se evidencia cuando el estudiante coordina autónomamente varios registros y transita entre ellos con flexibilidad. En clave APOE, esta sesión busca consolidar la estructura mental Proceso y propiciar primeras evidencias de Objeto, al reconocer propiedades generales de las funciones lineales como paralelismo y perpendicularidad. El retiro gradual del apoyo de GeoGebra permite valorar si la coordinación semiótica fue realmente interiorizada.

Obstáculo anticipado prioritario. La dependencia de GeoGebra (C3c), pues el estudiante coordina los registros con el software, pero no puede sostener esa coordinación sin él. La sesión debe incluir al menos una actividad sin apoyo de GeoGebra para verificar si la coordinación es autónoma o mediada.

Ajustes derivados de las Sesiones 1 y 2. El ciclo completo de registros y el razonamiento sobre paralelismo exigen que la mayoría de los casos focales haya alcanzado al menos la estructura mental en transición $A \rightarrow P$ en C1 y C2. La conversación de cierre (I4) se mantiene en todos los escenarios; su profundidad de cuestionamiento se ajustará al perfil metacognitivo observado: preguntas compatibles con estructura mental A ¿qué pasos seguiste? para los casos A consolidado; preguntas semejantes a ¿Por qué crees que esta recta es paralela a la otra sin necesidad de calcular? para los casos de estudiantes que operan en estructuras mentales en transición o emergentes hacia P.

Indicador de avance esperado al cierre de la sesión. Al menos la mitad de los casos focales completa el ciclo de cuatro registros sin bloqueo en la cadena tabular→gráfico; al menos uno o dos casos focales justifican el paralelismo sin graficar; la conversación de cierre revela diferencias cualitativas en la metacognición semiótica entre perfiles de casos.

Contexto y Desarrollo de la Sesión 3

Esta sesión estuvo orientada al cierre del proceso de aprendizaje, integrando el concepto de pendiente en contextos geométricos (paralelismo y perpendicularidad entre rectas) y en situaciones de modelación matemática con ciclo completo de registros. Fue también la sesión en la que se esperaba evidenciar los primeros indicios de la estructura mental O: el estudiante que comienza a operar sobre la función como un objeto y no solo como un proceso o una acción.

La sesión comenzó con la construcción de rectas paralelas y perpendiculares en GeoGebra, con el objetivo de analizar la relación entre sus pendientes. En un segundo momento, se introdujeron situaciones de modelación matemática en contextos reales (crecimiento de una planta, consumo de combustible, temperatura de una bebida) que requerían la construcción completa del ciclo: enunciado verbal → tabla de valores → ecuación algebraica → representación gráfica → respuesta a una pregunta concreta. En el tercer momento, una mesa redonda de cierre permitió documentar los niveles de metacognición semiótica (C5) que los estudiantes habían alcanzado a lo largo de las tres sesiones.

Episodios Semióticos Relevantes y Análisis TRRS–APOE en la Sesión 3

El primer episodio de la sesión 3 involucró a EF1 y EF2 en la construcción de rectas paralelas y la medición de sus pendientes. Ambos estudiantes observaron que las pendientes de las rectas paralelas eran iguales, aunque algunos requirieron verificación con la herramienta de GeoGebra antes de afirmarlo con seguridad. Este episodio fue codificado como C2 (tratamiento

gráfico con verificación numérica): los estudiantes reconocen la propiedad en el registro gráfico y la validan con un cálculo numérico, pero todavía no la pueden justificar algebraicamente de manera autónoma.

Figura 18

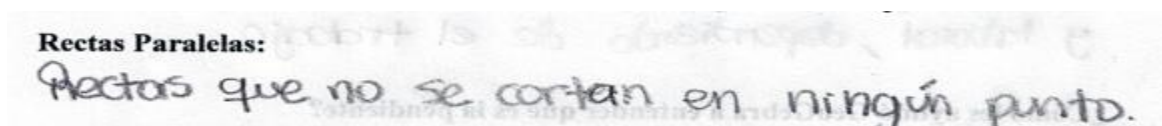
Exploración de paralelismo y perpendicularidad en Geogebra EF1 y EF2



En la articulación verbal EF3 definió las rectas paralelas con la expresión: "*Rectas que no se cortan en ningún punto*", que, aunque es correcta muestra un uso predominante del lenguaje cotidiano.

Figura 19

Definición de rectas paralelas EF3

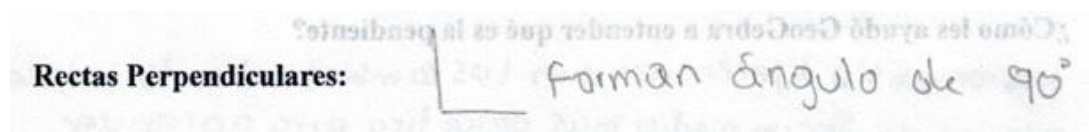


El segundo episodio documentó el trabajo de EF3 y EF4 con rectas perpendiculares. Identificaron correctamente que el producto de las pendientes es -1 , lo que constituye una conversión entre el registro gráfico y el registro algebraico (C2/C1b). Sin embargo, presentaron dificultad inicial para justificar algebraicamente por qué ese producto es siempre -1 , lo que revela que la relación había sido reconocida como un dato pero no comprendida como un

resultado necesario. En cuanto al registro verbal EF3 define la perpendicularidad en relación con el ángulo formado entre dos rectas, demostrando un nivel más elaborado de comprensión sustentado en una condición geométrica pero no directamente desde la observación de las pendientes que era el foco de la actividad.

Figura 20

Definición rectas perpendiculares EF1



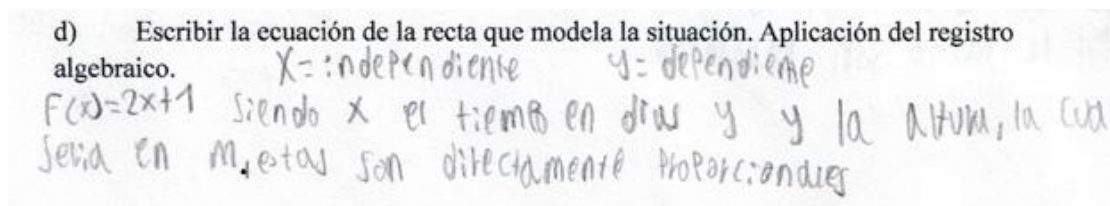
El tercer episodio mostró el trabajo de EF5, quien logró determinar correctamente si pares de rectas eran paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos mediante el cálculo del producto de pendientes. Este fue uno de los episodios más significativos de la sesión para el seguimiento individual de EF5, quien en las sesiones anteriores había mostrado dificultades persistentes con el tratamiento algebraico y con la coordinación entre registros. Su desempeño en este episodio sugirió que la acumulación de experiencias con el software y la formalización progresiva de los procedimientos habían comenzado a producir una consolidación genuina del proceso matemático subyacente.

El cuarto episodio, protagonizado por EF6 y EF7, implicó la elaboración de una explicación escrita sobre paralelismo y perpendicularidad con revisión mediada por IA. Ambos mejoraron la coherencia de sus explicaciones, aunque persistió el predominio del lenguaje descriptivo sobre el argumentativo. La cita de EF4 "*Estas son directamente proporcionales*" reveló una confusión conceptual que involucra el registro verbal: el estudiante usa una expresión matemática reconocible, pero la aplica en un contexto inapropiado, lo que es indicador de que el

registro verbal todavía no funciona como articulador genuino del conocimiento matemático sino como un compendio de frases parcialmente apropiadas.

Figura 21

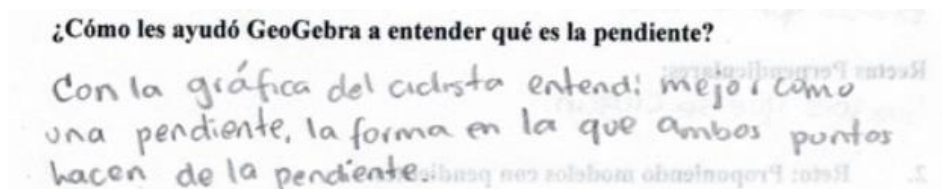
Explicación de paralelismo y perpendicularidad EF4



El quinto episodio fue grupal: EF1 a EF8 participaron en la construcción de modelos lineales a partir de contextos reales, con el ciclo completo de representación. Los grupos lograron construir ecuaciones lineales para las situaciones planteadas, aunque con dificultades en la interpretación del significado contextual de la pendiente. La respuesta de EF5 "*Con la gráfica del ciclista entendí mejor cómo una pendiente, la forma en la que ambos puntos hacen de la pendiente*" captura el tipo de comprensión que GeoGebra había mediado: la gráfica dinámica del ciclista en la sesión 1 había producido una imagen cognitiva que persistía y facilitaba la comprensión de situaciones nuevas.

Figura 22

Reflexión acerca de la mediación con GeoGebra EF5



El sexto episodio fue la mesa redonda de cierre. Los estudiantes reconocieron la utilidad del concepto de pendiente en situaciones reales y destacaron el papel de GeoGebra en la comprensión visual del concepto. La mesa redonda constituyó el principal espacio de activación

de C5 (metacognición semiótica) en toda la intervención: al verbalizar qué registros les resultaron más difíciles y cómo GeoGebra les había ayudado, los estudiantes comenzaron a operar sobre su propio proceso de aprendizaje como un objeto de reflexión.

Valoración APOE y Evolución Semiótica en la Sesión 3

Al finalizar la sesión 3, la valoración APOE de los ocho casos focales mostró un avance generalizado en la estructura mental P en la categoría C3 (coordinación mediada por GeoGebra). Todos los casos focales se situaron dentro o cerca de la estructura mental P en esta categoría, evidenciando la capacidad de coordinar registros gráfico, numérico y algebraico con el apoyo del software. Sin embargo, la pregunta crítica que se generó hacia la prueba final era si esa coordinación se sostendría sin el apoyo de GeoGebra, pues un avance real hacia estados de construcción cognitiva APOE más elevados se valida sólo cuando el estudiante puede operar sobre la función como un objeto cognitivo independientemente del mediador tecnológico.

En términos de C1 (conversión entre registros), se evidenció una consolidación progresiva del ciclo completo de representación en la mayoría de los casos focales, aunque con variaciones importantes entre ellos. EF3, EF6 y EF7 mostraron la mayor fluidez en las conversiones entre registros múltiples, mientras que EF5 y EF8 continuaron presentando dificultades ante las conversiones no congruentes y ante el ciclo completo sin apoyo externo.

El uso de GeoGebra en la sesión 3 evidenció el nivel de mayor consolidación en toda la intervención. El software funcionó como herramienta de validación conceptual y exploración geométrica. Los estudiantes lo utilizaron para construir rectas paralelas y perpendiculares, medir pendientes y verificar propiedades matemáticas. En esta sesión se documentó por primera vez un uso consolidado de GeoGebra como herramienta de análisis matemático que trascendía la mera verificación y avanzaba hacia la exploración de propiedades geométricas.

La evolución del lenguaje matemático fue el rasgo más significativo del cierre de la sesión 3. El lenguaje se consolidó progresivamente, especialmente en la interpretación de la pendiente como relación entre rectas y como razón de cambio en contextos reales. Sin embargo, la justificación teórica del paralelismo y la perpendicularidad seguía siendo débil, lo que señalaba que la estructura mental O donde la función lineal se entiende como objeto sobre el cual se pueden establecer propiedades formales, no había sido alcanzado por el grupo.

Evaluación Final

La evaluación constó de ocho preguntas diseñadas para valorar la consolidación del concepto de función lineal, la interpretación de la pendiente y el uso integrado de múltiples registros de representación semiótica, con mayor nivel de exigencia que la prueba diagnóstica. Una diferencia significativa respecto a la prueba diagnóstica fue que los estudiantes contaron con acceso a GeoGebra para la construcción y verificación de gráficas.

Estructura de la Evaluación Final

Retoma lo evaluado en la diagnóstica, pero con mayor complejidad, e incorpora:

- Relación pendiente /inclinación
- Cálculo de pendiente con casos más complejos
- Lectura de gráfica y ecuación
- Conversión registro algebraico \rightarrow tabular \rightarrow gráfico
- Modelación verbal
- Identificación de rectas paralelas
- Transferencia autónoma al resolver un escenario nuevo usando todos los registros.

Esta evaluación busca evidenciar si el estudiante pasó de ejecutar pasos (estructura mental Acción) a comprender la función como objeto matemático articulado.

La secuencia didáctica desarrollada en la evaluación final y su rúbrica de valoración pueden consultarse en el Apéndice C.

Resultados por episodio evaluativo

El primer episodio evaluativo (identificación de función lineal) mostró que la mayoría de los estudiantes identificó correctamente la estructura de la función lineal, incluyendo casos particulares como $y = 4$ (donde $m = 0$), lo que evidenció una consolidación del concepto de recta horizontal que no había estado presente en la prueba diagnóstica. La expresión escrita de EF4 "Porque $m = 0$ entonces $y = 0x + 4 = 4$ " ilustra elementos de la estructura mental P en la categoría C1b: el estudiante no solo identifica la función, sino que justifica algebraicamente por qué una expresión constante puede ser un caso particular relacionado con la función lineal.

Figura 23

Respuesta pregunta 1 EF4

Pregunta 1. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa una función lineal de la forma $y = mx + b$?	
A)	$y = x^2 + 2x$
<input checked="" type="checkbox"/>	$y = 4$ Porque $m=0$ entonces $y=0 \cdot x + 4 = 4$
C)	$y = 3/x$
D)	$y = \sqrt{x+1}$

Sin embargo, EF8 respondió a esta misma pregunta con "Profe no hay ninguna que se parezca", lo que reveló la persistencia de un obstáculo conceptual significativo: no pudo reconocer $y = 4$ como función lineal porque no había consolidado la encapsulación del concepto que permitiría ver la expresión constante como un caso particular de la forma $y = mx + b$. Este contraste entre EF4 y EF8 dentro del mismo ítem evidencia la heterogeneidad de

trayectorias de aprendizaje al interior del grupo y la necesidad de analizar los perfiles individuales y no solo los resultados grupales.

Figura 24

Respuesta pregunta 1 EF8

Pregunta 1. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa una función lineal de la forma $y = mx + b$?	
A)	$y = x^2 + 2x$
B)	$y = 4$
C)	$y = 3/x$
D)	$y = \sqrt{x+1}$

Profe no hay ninguna que se parezca.

El segundo episodio evaluativo (interpretación del parámetro m) mostró que los estudiantes reconocían que al aumentar m la recta se volvía más inclinada, pero varios mantuvieron explicaciones intuitivas sin formalización matemática completa. Esta es una de las conversiones que mayor progreso mostró respecto a la prueba diagnóstica (en la que la mayoría no lograba siquiera describir el efecto de m de manera sistemática) aunque todavía sin alcanzar el nivel de precisión conceptual que distingue la estructura mental O de la estructura mental P.

El tercer episodio evaluativo (cálculo de la pendiente) mostró un desempeño generalmente exitoso en la aplicación de la fórmula $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, con errores aislados en el manejo de signos negativos. EF3 demostró el mayor dominio en esta categoría, calculando la pendiente sin errores y justificando el procedimiento con precisión, lo que es coherente con la estructura mental O asignada en las categorías C2 y C3 de su rúbrica individual.

El cuarto episodio evaluativo (lectura de gráficas) mostró una mejora sustancial respecto al desempeño diagnóstico inicial. La mayoría de los estudiantes logró identificar pendiente e intercepto desde la representación gráfica, aunque persistieron errores en el signo del intercepto o en la dirección de la inclinación. La cita de la rúbrica de EF3 para este episodio (estructura

mental O en transición hacia E en C1) señala que este estudiante logró no solo leer la gráfica sino anticipar la ecuación con precisión, lo que constituye el tipo de operación que Duval (2004) describe como conversión no congruente exitosa.

El quinto episodio evaluativo (ciclo de representación tabular y gráfica) mostró que la mayoría de los estudiantes logró construir tablas de valores y representar las funciones en GeoGebra con corrección operativa. EF5, a pesar de las dificultades mostradas en sesiones anteriores con las conversiones no congruentes, logró en este episodio construir la tabla y la gráfica de manera autónoma, lo que representó un avance significativo respecto a su perfil inicial. La cita en su prueba "*La grafica la hice en GeoGebra*" muestra tanto el apoyo en la herramienta como la capacidad de usarla con intención.

Figura 25

Respuesta pregunta 6 EF6

Pregunta 6. Dada la función $f(x) = -2x + 4$:

a) Calcula los valores de $f(x)$ para $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y organízalos en una tabla.

b) Traza la gráfica en la hoja cuadrículada, rotula los ejes e identifica el punto donde la recta corta el eje y.

c) Escribe qué le ocurre al valor de y a medida que x aumenta y explica a qué se debe eso.

$f(x) = -2(-1) + 4 = 6$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>-1</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>y</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>-2</td> <td>-4</td> </tr> </tbody> </table>	x	-1	0	1	2	3	4	y	6	4	2	0	-2	-4	<p>Si x aumenta y disminuye * la gráfico lo hice en geogebra</p>
x		-1	0	1	2	3	4									
y		6	4	2	0	-2	-4									
$f(x) = -2(0) + 4 = 4$																
$f(x) = -2(1) + 4 = 2$																
$f(x) = -2(2) + 4 = 0$																
$f(x) = -2(3) + 4 = -2$																
$f(x) = -2(4) + 4 = -4$																

Y disminuye mientras que x aumenta

El sexto episodio evaluativo (interpretación verbal del comportamiento) mostró que la mayoría de los estudiantes logró describir tendencias generales (sube, baja, inclinación) pero que las explicaciones verbales continuaron siendo predominantemente descriptivas y poco formalizadas. La cita de EF6 "*Mientras x aumenta y disminuye ya que son inversamente proporcionales*" refleja un avance en el registro verbal: el estudiante incorpora terminología matemática "*inversamente proporcionales*", aunque la aplica de manera imprecisa

conceptualmente. Esta es precisamente la tensión que caracteriza la transición entre la estructura mental P y la estructura mental O: el lenguaje matemático comienza a ser movilizado, pero aún no de manera completamente correcta ni autónoma.

Figura 26

Respuesta pregunta 6 EF1

Pregunta 6. Dada la función $f(x) = -2x + 4$:

a) Calcula los valores de $f(x)$ para $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y organízalos en una tabla.

b) Traza la gráfica en la hoja cuadrículada, rotula los ejes e identifica el punto donde la recta corta el eje y.

c) Escribe qué le ocurre al valor de y a medida que x aumenta y explica a qué se debe eso.

x	-1	0	1	2	3	4
y	6	4	2	0	-2	-4

mientras x aumenta y disminuye ya que son inversamente proporcionales.

Resultados por caso focal de la Evaluación final

El cuadro siguiente sintetiza los resultados por perfiles de los ocho casos focales en las cinco categorías de análisis, evidenciados en la evaluación final:

Tabla 9

Estructuras mentales APOE alcanzadas en la prueba final

Caso	C1	C2	C3	C4	C5	Avance Global
EF1	P	A→P	A	A	A	A→P en consolidación
EF2	O	P	P	P	P	P consolidada
EF3	O→E	O	O	O	E	E emergente
EF4	P	P	A	A	A	P emergente
EF5	A	P	P	P	P	P consolidada
EF6	O	O	P	O	P	O emergente
EF7	P	A→P	P	P	A	P consolidada

EF8	A	A	A	A	A	A sin avance significativo
------------	---	---	---	---	---	----------------------------

Evolución de los casos focales en el aprendizaje de la función lineal

El resultado comparativo de los perfiles APOE-TRRS entre la prueba diagnóstica y la prueba final permite identificar trayectorias de aprendizaje diferenciadas para los ocho casos focales. La siguiente tabla sintetiza las estructuras mentales APOE asignadas en la prueba final para cada caso focal y cada categoría de análisis, así como la valoración de desempeño predominante:

Tabla 10

Perfiles finales APOE por caso focal al término de la intervención

Caso focal	Evaluación Diagnóstica	Avance global
EF1	A consolidada	A→P
EF2	A consolidada	P consolidada
EF3	A→P	E emergente
EF4	A→P	P emergente
EF5	A→P	P consolidada
EF6	P emergente	O emergente
EF7	A→P	P consolidada
EF8	A consolidada	A sin avance significativo

EF1: Avance parcial desde la estructura mental Acción

EF1 inició en la estructura mental Acción en todas las categorías y mostró un progreso limitado pero real. Su mayor ganancia se dio en C1 (conversión entre registros), donde alcanzó una estructura mental Proceso al finalizar, lo que sugiere que logró interiorizar parcialmente la correspondencia entre representaciones. Sin embargo, en C2, C3, C4 y C5 permaneció en Acción o en una transición incipiente $A \rightarrow P$, lo que indica que su comprensión de la función lineal sigue siendo predominantemente procedimental y dependiente de instrucciones externas. El incremento progresivo de resultados positivos en las sesiones refleja mejora sostenida, pero sin consolidación conceptual.

EF2: Consolidación en estructura mental Proceso

EF2 presenta una de las trayectorias más consistentes del grupo. Partiendo de la estructura mental Acción en el diagnóstico, alcanzó estructura mental Objeto en C1 y estructura mental Proceso en C2, C3, C4 y C5. Sus resultados durante las sesiones muestran una aceleración notable entre S1 y S2, lo que sugiere que la intervención con GeoGebra y la mediación verbal actuaron como catalizadores de la interiorización. En C5 (metacognición semiótica) alcanzó estructura mental P, lo que indica una capacidad incipiente para reflexionar sobre su propio proceso representacional, un avance significativo para un estudiante que partió de Acción.

EF3: El caso de mayor progreso finalizando en estructura mental Esquema emergente

EF3 es el caso más destacado de la intervención. Aunque partió de una estructura mental en transición de $A \rightarrow P$, alcanzó estructura mental Esquema emergente al final. En C1 llegó a $O \rightarrow E$, en C3 y C4 a Objeto, y en C5 a Esquema, lo que implica que no solo coordinó múltiples

registros con fluidez, sino que desarrolló capacidad metacognitiva semiótica y comenzó a articular la función lineal con estructuras matemáticas más amplias. Es el único caso que evidencia una comprensión del objeto matemático como entidad con propiedades relacionales, no solo como procedimiento.

EF4: Estancamiento relativo en la estructura mental Proceso emergente

EF4 inició con estructura mental en transición de $A \rightarrow P$ y concluyó en estructura mental Proceso emergente, pero con un perfil heterogéneo por categoría: alcanzó P en C1 y C2, pero permaneció en Acción en C3, C4 y C5. Esto revela que la coordinación mediada por GeoGebra no produjo en este estudiante una interiorización sostenida, y que su registro verbal y metacognitivo no evolucionaron al ritmo de las conversiones. Los resultados de las actividades realizadas en las sesiones muestran una progresión muy lenta, lo que sugiere que la intervención no logró movilizar su zona de desarrollo para las categorías semióticas más complejas.

EF5: Estructura mental Proceso consolidada

EF5 presenta el caso más llamativo de regresión puntual: en C1 (conversión entre registros) retrocedió de estructura mental P en la prueba diagnóstica a estructura mental A en la prueba final, lo que puede interpretarse como la desestabilización de una comprensión que era frágil desde el inicio. Sin embargo, en C2, C3, C4 y C5 alcanzó la estructura mental Proceso. El perfil general resultante es estructura mental P, con una inconsistencia interna que merece atención: este estudiante domina los tratamientos algebraicos e incluso la mediación con GeoGebra, pero perdió capacidad de conversión entre registros, lo que sugiere que su esquema conceptual aún no está integrado de manera coherente.

EF6: El caso más cercano a la estructura mental Objeto

EF6 partió de la estructura mental P en la prueba diagnóstica y es el único caso, junto con EF3, que alcanzó estructuras mentales compatibles con Objeto en múltiples categorías: C1, C2 y C4. En C3 y C5 quedó en estructura mental Proceso. Las respuestas a las actividades durante las sesiones muestran una mejora evidente en la sesión S3, consistente con la consolidación propia de la estructura mental Objeto. Que haya llegado a O en C4 (registro verbal) es especialmente significativo: significa que este estudiante puede articular con lenguaje matemático preciso la relación entre los registros, lo que constituye un indicador robusto de comprensión conceptual genuina.

EF7: Avance moderado y estructura mental Proceso consolidada

EF7 partió de estructura mental Acción en la prueba diagnóstica y alcanzó la estructura mental Proceso como perfil predominante, con una transición A→P en C2 y estructura mental P en C3, C4. Sin embargo, en C5 permaneció en Acción, lo que indica que la reflexión metacognitiva sobre los propios registros no fue movilizadora por la intervención en este caso. Sus resultados muestran una mejora acelerada en la sesión 3, lo que sugiere que la última sesión resultó especialmente productiva para este estudiante.

EF8: Ausencia de progreso permaneciendo en estructura mental Acción

EF8 es el único caso que permaneció en la estructura mental Acción en todas las categorías y en todos los momentos de la intervención. El desarrollo de las actividades durante las sesiones muestra un estancamiento total entre la sesión 2 y 3, lo que indica que ni la herramienta dinámica ni la mediación verbal lograron producir interiorización de ningún procedimiento. Este caso plantea preguntas sobre factores que la intervención no pudo controlar: motivación, acceso cognitivo a la abstracción, o condiciones externas al diseño pedagógico.

Uso de GeoGebra y registro verbal en la prueba final

El uso de GeoGebra en la prueba final fue predominante: la mayoría de los estudiantes recurrió al software para construir gráficas, lo que facilitó la comprensión visual de las funciones lineales y mejoró el desempeño en las tareas de conversión entre el registro algebraico y el gráfico. Sin embargo, este mismo hallazgo señala un obstáculo que la intervención no logró superar de manera generalizada: la coordinación entre registros aún dependía en muchos casos del apoyo del software, lo que indica que la coordinación sostenida sin GeoGebra (categoría C3c) solo fue alcanzada de manera sólida por EF3 y, en menor medida, por EF2 y EF6.

El registro verbal siguió siendo el más débil en términos de formalización matemática al finalizar la intervención. Aunque los estudiantes lograron describir tendencias y comportamientos de las funciones con mayor precisión que en la prueba diagnóstica, predominaron las expresiones intuitivas sobre el lenguaje matemático estructurado. Lo observado es coherente con lo que señala Duval (2006) sobre la dificultad del registro verbal como articulador: su activación plena requiere que el estudiante haya alcanzado una coordinación genuina entre al menos dos otros registros, condición que al final de la intervención solo se cumplía de manera sólida en el caso de EF3 y parcialmente, en EF6.

Análisis de Resultados

El análisis longitudinal de los tres momentos de la intervención (prueba diagnóstica, sesiones 1, 2 y 3, y prueba final) permite construir una interpretación integrada de las transformaciones producidas en los procesos semióticos y en las construcciones cognitivas de los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo. Para ello, se adopta la doble lente analítica que articula la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1993, 2004, 2006) con la teoría APOE (Arnon et al., 2014; Dubinsky, 1991), aplicada simultáneamente sobre el corpus de evidencias recogidas durante todo el proceso.

Se realizó una lectura interpretativa de los patrones semióticos y cognitivos que emergieron a través de los cuatro momentos de la intervención. El propósito es comprender qué transformaciones se produjeron, por qué se produjeron bajo las condiciones diseñadas, y qué obstáculos persistieron a pesar de la intervención.

Evolución de los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos (TRRS)

Estado semiótico inicial

La prueba diagnóstica confirmó el patrón documentado en contextos comparables (Hernández, 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2024): los estudiantes operaban con fluidez dentro del registro algebraico (calculando pendientes, identificando parámetros y construyendo tablas) pero mostraban una incapacidad generalizada para coordinar ese registro con el gráfico, el tabular o el verbal. Este estado es coherente con lo que Duval (2006) describe como disociación entre registros: el dominio del tratamiento interno no garantiza la capacidad de conversión hacia otro sistema representacional. La evidencia más clara fue la Pregunta 3, donde la estrategia dominante no fue leer m y b directamente desde la gráfica, sino el tanteo punto a punto,

confirmando que la gráfica no funcionaba aún como objeto semiótico con propiedades localizables sino como colección de puntos sobre los que operar algebraicamente, la paradoja cognitiva que Duval (2004) identifica como el obstáculo central del aprendizaje matemático.

El obstáculo de mayor magnitud fue la conversión verbal \rightarrow algebraico en contexto de modelación (Pregunta 5, C1b). A diferencia de los demás ítems donde los estudiantes cometían errores de ejecución como la inversión m/b (Hernández, 2023), la mayoría de los participantes dejó el ítem en blanco sin lograr siquiera identificar en el enunciado los elementos relacionados a la estructura $y = mx + b$. Duval (2006) explica este tipo de bloqueo desde la no congruencia, es decir, cuando el orden y la naturaleza de los elementos del registro de partida no se corresponden con los del registro destino, la conversión no puede iniciarse si el estudiante no dispone de un esquema de coordinación previo.

Evolución de la categoría C1: conversiones entre registros a lo largo de la intervención

La evolución de la categoría C1 a lo largo de las tres sesiones y la prueba final describe una trayectoria que es coherente con los postulados de la TRRS sobre la progresión de la comprensión matemática, pero que también revela los límites de lo que una intervención con tiempo limitado puede producir en términos de coordinación semiótica autónoma.

La conversión algebraico \leftrightarrow gráfico, mediada por GeoGebra, fue la que mostró mayor evolución en el grupo. Esta es una conversión que Vargas y García (2024) identifican como especialmente favorecida por los entornos de geometría dinámica, precisamente porque el software externaliza la correspondencia entre los parámetros de la ecuación y las propiedades geométricas de la recta: cuando el estudiante modifica el valor de m en la barra de entrada y observa en tiempo real cómo cambia la inclinación de la recta, está viendo la conversión algebraico \rightarrow gráfico materializada en la pantalla, antes de haberla interiorizado mentalmente.

Este proceso de externalización semiótica fue descrito por Artigue (2002) en términos de génesis instrumental y es el mecanismo mediante el cual GeoGebra crea las condiciones para que la conversión, que de otro modo permanecería como un acto mental opaco, se vuelva observable y manipulable. Los datos de las sesiones 2 y 3 confirman que esta externalización produjo avances reales que se visualizaron en la prueba final, en la cual la mayoría de los casos focales logró realizar la conversión algebraico \rightarrow gráfico de manera funcional, incluyendo casos de pendiente negativa que en el diagnóstico habían representado un punto de bloqueo.

Sin embargo, la congruencia de esta conversión en su dirección algebraico \rightarrow gráfico contrasta con la dificultad persistente en la dirección inversa cuando se presentó en situaciones nuevas. Duval (2006) advierte que la coordinación genuina entre registros exige que el estudiante pueda realizar la conversión en ambas direcciones con igual fluidez, sin depender de la dirección lógica o predecible. Los resultados de la prueba final mostraron que, para la mayoría de los casos focales, la conversión gráfico \rightarrow algebraico en contextos de pendiente negativa (Pregunta 4) seguía produciendo errores de signo o de interpretación del intercepto, lo que indica que la coordinación bidireccional no se había consolidado. Esta asimetría direccional en la coordinación de registros es, desde la TRRS, evidencia de que el proceso de comprensión está incompleto: el objeto matemático no ha sido reconocido como el mismo en ambos registros, sino que sigue siendo accesible de manera preferencial desde uno de ellos.

La conversión verbal \rightarrow algebraico fue durante toda la intervención, el obstáculo semiótico más resistente. La Sesión 2 introdujo situaciones de modelación contextual que exigían esta conversión, y la Sesión 3 la retomó en un ciclo completo de representación. Los datos del diario de campo y las rúbricas de síntesis muestran que, incluso después de tres sesiones de trabajo sistemático con estas situaciones, la mayoría de los casos focales seguía

enfrentando dificultades ante la conversión verbal \rightarrow algebraico cuando el enunciado era nuevo. Esta persistencia del obstáculo es teóricamente relevante, y confirma lo establecido por la TRRS que sostiene que las conversiones no congruentes son las que mayor dificultad presentan y las que más tiempo requieren para consolidarse (Duval, 2006; Hernández, 2023). La naturaleza no congruente de la conversión verbal \rightarrow algebraico en contextos de modelación (que en este caso corresponde a que el orden en que aparecen los datos en el enunciado no corresponde al orden en que aparecen en la ecuación) explica por qué esta conversión no pudo consolidarse en el tiempo de la intervención, y por qué su tratamiento sistemático requeriría de un diseño de mayor duración y gradualidad que el que fue posible implementar.

La categoría C1 mostró la mayor heterogeneidad entre los casos focales. EF3 alcanzó el grado de coordinación semiótica más sólido del grupo, completando ciclos completos de cuatro registros en la prueba final con autonomía y precisión. EF2 y EF6 lograron coordinar algebraico \leftrightarrow gráfico con fluidez, pero mostraron dificultades persistentes ante el ciclo completo sin apoyo de GeoGebra. EF1 y EF4 avanzaron en las conversiones congruentes, pero siguieron bloqueados ante las no congruentes. EF5, EF7 y EF8 no lograron completar el ciclo completo de registros de manera autónoma en la prueba final, lo que indica que la coordinación entre los cuatro registros de la función lineal seguía siendo, para estos estudiantes, un proceso parcial y dependiente de mediación externa.

Evolución de la categoría C2: tratamiento dentro del registro y su relación con la conversión

El tratamiento algebraico (que implica operar dentro del registro algebraico mediante la fórmula de la pendiente, el despeje de variables y la cadena algebraico \rightarrow tabular) mostró una evolución más uniforme que la categoría C1, a pesar de ello se encontraron obstáculos específicos que se pueden caracterizar con precisión desde la TRRS. Los datos confirmaron la

distinción establecida por Duval (1993) entre tratamiento y conversión: los avances en la ejecución correcta de tratamientos no se tradujeron automáticamente en avances equivalentes en conversión, resultado que la teoría ya anticipaba pero que fue empíricamente verificado en este grupo concreto.

El error más frecuente en la categoría C2 durante el diagnóstico fue la inversión $\Delta x/\Delta y$ en el cálculo de la pendiente, que Lizana & Antezana (2021) y Hernández (2023) identifican como uno de los errores más sistemáticos en el aprendizaje del álgebra escolar. Este error no es trivial desde la perspectiva de la TRRS porque indica que el estudiante no ha interiorizado la fórmula como una razón de cambio sino como una secuencia de pasos a seguir sin comprensión del significado de cada elemento. La inversión del numerador y el denominador revela que para el estudiante Δy y Δx son dos valores intercambiables dentro de un algoritmo, y no la representación de dos magnitudes con roles diferenciados que describen el comportamiento de la función.

La Sesión 1 abordó este obstáculo de manera directa mediante la cuantificación de Δy (variación vertical) y Δx (variación horizontal) sobre la cuadrícula de GeoGebra, antes de introducir la fórmula algebraica. Este orden de actividades en el que se realiza primero la operación sobre la representación gráfica, para luego generar la formalización algebraica, responde al principio didáctico que Duval (2006) formula en términos de la necesidad de hacer explícito el acto de conversión antes de exigir su automatización. El estudiante debe poder ver qué elemento del registro gráfico corresponde a qué elemento del registro algebraico antes de poder realizar la conversión de manera autónoma.

Los datos de la Sesión 2 muestran que esta secuencia produjo una reducción observable del error de inversión en los casos focales que al inicio de la intervención operaban en la estructura mental de transición $A \rightarrow P$: EF3 y EF4 no cometieron errores de inversión en los ejercicios de la Sesión 2, a diferencia de lo que habían hecho en el diagnóstico. Para EF1, EF2, EF7 y EF8 el error persistió con menor frecuencia que en el diagnóstico, pero no desapareció, lo que sugiere que la interiorización del proceso de la fórmula requería de más iteraciones que las que las tres sesiones pudieron ofrecer.

La congruencia semiótica permite predecir los avances

Un hallazgo que atraviesa todas las categorías de análisis semiótico es la relación entre el grado de congruencia de una conversión y la velocidad a la que los estudiantes lograron consolidarla durante la intervención. Las conversiones congruentes fueron las que mostraron mayor avance en menor tiempo. Las conversiones no congruentes (especialmente las que involucran el registro verbal como punto de partida o de llegada) fueron las que mostraron mayor resistencia y heterogeneidad entre los casos focales.

Este patrón es exactamente el que la TRRS predice (Duval, 2006; Arteaga et al., 2024), ya que la congruencia semiótica no es solo un descriptor del tipo de conversión, sino un predictor de su dificultad cognitiva. Cuando los elementos constitutivos de dos registros se corresponden en número, orden y naturaleza, el estudiante puede realizar la conversión apoyándose en la correspondencia directa sin necesidad de reorganizar su comprensión. Cuando esa correspondencia no es evidente (como ocurre en la conversión verbal \rightarrow algebraico en la modelación contextual), el estudiante debe construir un esquema de coordinación que exige una comprensión del objeto matemático que va más allá de cualquiera de sus representaciones individuales. Esta es la razón por la que la conversión del registro verbal al algebraico fue el

obstáculo más difícil de superar en la intervención, no porque los estudiantes no hubieran realizado esa conversión, sino porque su consolidación requiere una comprensión de la función lineal que no se logró construir en todo el grupo debido al límite temporal de la intervención.

Progresión en la construcción cognitiva de los estudiantes (Teoría APOE)

El hallazgo más robusto que emerge del conjunto de datos es que la intervención produjo un desplazamiento generalizado desde la estructura mental Acción hacia la estructura mental Proceso, al menos en las categorías más directamente trabajadas durante las sesiones. De los ocho casos focales, seis alcanzaron Proceso o una estructura mental superior como perfil predominante al finalizar, lo que representa una movilización cognitiva real y no trivial. Este desplazamiento es especialmente significativo en EF2, EF5 y EF7, quienes partieron de Acción y llegaron a Proceso en la mayoría de las categorías, sugiriendo que el diseño pedagógico fue efectivo para desencadenar la interiorización de procedimientos en estudiantes que aún no la habían logrado.

Sin embargo, la estructura mental Proceso alcanzada en varios casos es emergente o inestable, visible en el ritmo lento de los resultados obtenidos en las sesiones y en los perfiles categóricos heterogéneos que muestran Proceso en algunas dimensiones y Acción persistente en otras. Esto indica que el desplazamiento no fue uniforme ni implica necesariamente una comprensión integrada del objeto matemático; en varios estudiantes se trata más de una interiorización parcial, relacionada con ciertas conversiones o tratamientos, que de una reorganización conceptual completa.

Antes de describir la progresión observada en cada estructura mental, es pertinente evaluar en qué medida la descomposición genética propuesta en el Marco Teórico se evidenció en los datos empíricos de la intervención. Esa descomposición anticipaba que los estudiantes

construirían las estructuras A, P, O y E siguiendo una trayectoria en la cual la mediación de GeoGebra y la coordinación de los cuatro registros (algebraico, gráfico, tabular y verbal) serían los mecanismos centrales de avance.

Los datos de la intervención confirman parcialmente esa hipótesis: la descripción de la estructura mental A como dominio procedimental en el registro algebraico sin capacidad de conversión se corresponde de manera precisa con lo observado en el diagnóstico; la descripción de la estructura mental P como capacidad de anticipar el efecto de los parámetros y de invertir la conversión se corresponde con los avances documentados en las sesiones 1 y 2 para los casos EF3, EF4 y EF6; y la descripción de la estructura mental O como reconocimiento de la función en cualquier registro y capacidad de operar sobre ella como entidad se corresponde con los avances del EF3 en la prueba final. Sin embargo, hay aspectos de la DG inicial que la intervención no pudo confirmar: la estructura mental E tal como fue descrita (coordinación dinámica de todos los registros y selección estratégica del más adecuado para cada propósito) no fue alcanzada por ningún estudiante de manera completa, y los indicios de coherencia esquemática incipiente del EF3 sugieren que la descomposición genética inicial describió esa estructura con un nivel de complejidad que excede lo que una intervención de tres sesiones puede producir en estudiantes de noveno grado.

Esta evaluación retrospectiva de la descomposición genética inicial justifica, al cierre del análisis, la propuesta de una descomposición genética refinada que incorpore los hallazgos empíricos de la intervención.

Estructura Mental Acción Inicial Predominante en el Grupo

Como se documentó en el capítulo de implementación, la prueba diagnóstica confirmó que el grupo operaba predominantemente en la estructura mental Acción respecto a la función

lineal: los estudiantes ejecutaban procedimientos algebraicos bajo instrucción explícita pero eran incapaces de coordinar ese registro con el gráfico, el tabular o el verbal de manera autónoma.

Este punto de partida, caracterizado en detalle a través de los ocho casos focales en la sección de selección y caracterización, constituye la línea base desde la cual se interpreta la progresión cognitiva documentada a lo largo de las tres sesiones y la prueba final.

Trayectorias de transición: mecanismos activados por caso focal

La teoría APOE describe los mecanismos cognitivos que producen transiciones entre estructuras mentales. Arnon et al. (2014) identifican tres mecanismos centrales: interiorización ($A \rightarrow P$), encapsulación ($P \rightarrow O$) y coordinación ($O \rightarrow E$). Identificar cuáles se activaron, en qué casos y bajo qué condiciones, permite explicar *por qué* ocurrió el avance, no solo constatarlo.

Mecanismo de interiorización ($A \rightarrow P$): evidencias por caso

La interiorización convierte una acción externa en un proceso mental que el estudiante puede ejecutar internamente, anticipar e invertir (Dubinsky, 1991). Tres indicadores permitieron identificar su activación: la anticipación del efecto de los parámetros (presente en EF3 y EF4 desde la Sesión 1, y en EF6 desde la Sesión 2); la inversión espontánea del proceso de conversión (EF3 y EF6 razonaban de lo gráfico hacia lo algebraico, indicador que Dubinsky (1991) considera el más fiable de interiorización); y la formulación de generalizaciones, registrada en EF3 y EF6 en la Sesión 2, y en EF2 en la Sesión 3. En EF1 y EF7 el mecanismo se activó parcialmente, mientras que EF8 no mostró ningún indicador, lo que sugiere que las condiciones de la intervención no fueron suficientes para ese caso.

Mecanismo de encapsulación ($P \rightarrow O$): evidencias por caso

La encapsulación convierte un proceso mental en un objeto cognitivo sobre el cual el estudiante puede reflexionar y operar (Arnon et al., 2014). Es el mecanismo más exigente y los

indicadores fueron escasos. EF3 lo evidenció al justificar el paralelismo entre dos funciones sin graficarlas, tratando la igualdad de pendientes como propiedad del objeto. EF2 reconoció $y = 4$ como caso particular de función lineal con $m = 0$, y EF6 interpretó m como tasa de vaciado en contexto, operando sobre el parámetro como propiedad del objeto. Para EF1, EF4, EF5, EF7 y EF8 no se encontraron indicadores de encapsulación, resultado consistente con Trigueros y Hernández-Rebollar (2022) y Şefik et al. (2021): tres sesiones no pueden garantizar su activación generalizada.

Mecanismo de coordinación (O→E): evidencias incipientes

La coordinación articula dos o más objetos cognitivos para construir un esquema más complejo (Arnon et al., 2014). Ningún estudiante activó este mecanismo de forma completa. No obstante, EF3 mostró indicios de coherencia esquemática incipiente al conectar la pendiente de la función lineal con la razón de proporcionalidad directa. Estos indicios marcan el umbral desde el cual comenzaría a operar la coordinación y constituyen una referencia valiosa para el diseño de intervenciones futuras.

Estructura Mental en transición A→P

La progresión más frecuente documentada en la intervención fue la transición de la estructura mental A hacia la estructura mental P. Esta transición no se produce de manera uniforme en todas las categorías semióticas simultáneamente, sino de manera asimétrica: un mismo estudiante puede mostrar indicios de P en la categoría C1 (conversión algebraico → gráfico) mientras permanece en A en la categoría C4 (registro verbal como articulador). Esto es coherente con la observación de Arnon et al. (2014) sobre la naturaleza no lineal de la construcción cognitiva donde el avance en la comprensión de un objeto matemático no se da en

bloque, sino de manera diferenciada por categorías de análisis, según las experiencias del estudiante y los mecanismos de interiorización que se han activado.

Durante la intervención se observaron diferentes mecanismos de interiorización como la anticipación del efecto de los parámetros, es decir, lo que el estudiante podía predecir qué ocurriría en una situación con la inclinación de la recta antes de mover el deslizador de m , o anticipar que una pendiente negativa genera una recta descendente sin necesidad de hacer la gráfica. Esto demostró que la acción de observar detenidamente los parámetros producía un proceso mental autónomo. Este indicador de estructura mental P emergente fue documentado en los casos focales EF3, EF4 y EF6 desde la Sesión 1, y en EF1 y EF2 de manera más incipiente a partir de la Sesión 2.

Otro de los mecanismos de interiorización identificados fue la inversión del proceso, evidente cuando el estudiante estaba en capacidad de recorrer una conversión en la dirección contraria a la que fue trabajada inicialmente. En la Sesión 2, cuando se introdujeron los deslizadores en GeoGebra para explorar el efecto de m y b , algunos estudiantes comenzaron espontáneamente a hacer el recorrido inverso: en lugar de modificar m y observar el efecto en la gráfica (algebraico \rightarrow gráfico), modificaban la posición de la recta en la pantalla y razonaban sobre qué valor debía tener m para producir esa inclinación (gráfico \rightarrow algebraico). Desde la perspectiva de Dubinsky (1991), este tipo de inversión espontánea es el indicador más fiable de que una acción ha comenzado a interiorizarse en proceso, el estudiante puede realizar el proceso hacia atrás porque ya no lo percibe como una secuencia de pasos externos, sino como una transformación interna que puede controlar.

La formulación de generalizaciones es otro sistema de interiorización encontrado durante la intervención. Se da cuando al finalizar un ejercicio de cálculo de pendiente, un estudiante afirmaba espontáneamente que *“si m es negativa, la recta siempre baja”*. En este caso se construía una generalización que trasciende el caso particular y apunta hacia el proceso. Este tipo de enunciados fueron registrados en el diario de campo para los casos EF3 y EF6 en la Sesión 2, y para EF2 en la Sesión 3, lo que confirma que el mecanismo de interiorización había sido activado por las actividades diseñadas, aunque con diferente intensidad según el caso focal.

Estructura mental Objeto

La estructura mental Objeto (O) implica que el proceso mental construido en P ha sido encapsulado. El estudiante puede tratar la función lineal como un objeto matemático que le permite operar de diferentes formas, compararla con otras funciones, identificar sus propiedades generales y razonar sobre ella sin necesidad de activar el proceso subyacente (Arnon et al., 2014). La encapsulación es el mecanismo cognitivo más exigente en la construcción del concepto de función lineal, y los datos de la intervención confirman que fue también el más difícil de activar en el tiempo disponible.

Solo el EF3 alcanzó indicios sólidos de estructura mental O en la prueba final. Los indicadores más claros fueron que logró justificar el paralelismo entre las dos rectas $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 3x - 5$, sin necesidad de graficarlas, afirmando que *“si tienen la misma pendiente, nunca se van a cruzar porque siempre estarán a la misma distancia”*. Esta afirmación describe el paralelismo como consecuencia de la igualdad de pendientes, una propiedad que no puede derivarse del proceso de calcular una pendiente específica, sino que requiere que la función haya sido encapsulada como un objeto con propiedades formales. Por otro lado, el EF3 completó el ciclo completo de registros en la Pregunta 8 de la prueba final con autonomía y sin

GeoGebra eligiendo el escenario del consumo de gasolina, para lo cual planteó la función, construyó la tabla, trazó la gráfica y formuló una pregunta concreta con cálculo algebraico. Construir un modelo matemático completo en un escenario nuevo sin apoyo externo es el indicador más sólido de estructura mental O en el diseño de esta investigación.

Finalmente, el EF3 demostró una metacognición semiótica genuina (C5) en la conversación de cierre identificando con precisión qué registro le había resultado más difícil y por qué, para luego articular su explicación en términos de la relación entre los registros y no solo en términos de dificultad general.

Los casos EF2 y EF6 mostraron indicios parciales de estructura mental O en categorías específicas, sin haber alcanzado dicha estructura mental de manera generalizada. EF2 reconoció en la prueba final que $y = 4$ es un caso particular de la función lineal (con $m = 0$) y lo justificó algebraicamente, lo que implica tratar la función lineal como una entidad cuyas instancias particulares pueden ser reconocidas e identificadas. EF6 logró interpretar correctamente el significado contextual de la pendiente y el intercepto en la Pregunta 7 con precisión de unidades, lo que supone no solo aplicar la fórmula sino comprender qué representa m en el contexto de la situación (tasa de vaciado del tanque, en litros por minuto) lo cual exige tratar el parámetro como una propiedad del objeto y no como un resultado de un cálculo.

La ausencia de estructuras mentales de tipo Objeto en la mayoría de los casos focales es coherente con lo que Trigueros y Hernández-Rebollar (2022) y Şefik et al. (2021) reportan en investigaciones con APOE en bachillerato. La encapsulación es el mecanismo que más tiempo requiere para consolidarse, y tres sesiones de intervención no pueden garantizar su activación generalizada aun cuando estén bien diseñadas. Lo que la intervención sí pudo documentar son

los indicios iniciales de encapsulación y las condiciones bajo las cuales estos indicios emergen, que en este caso fueron las actividades que exigen operar sobre la función como entidad, hacer comparaciones entre funciones o justificar propiedades sin calcular.

Estructura mental Esquema

La estructura mental Esquema (E) implica la organización coherente y flexible de los objetos, procesos y acciones relacionados con la función lineal en una estructura cognitiva que el estudiante puede invocar para abordar situaciones nuevas, establecer conexiones con otros conceptos y transferir el conocimiento a dominios distintos (Arnon et al., 2014). Ningún estudiante alcanzó esta estructura mental durante la intervención, lo cual era esperado considerando que consolidar Esquema requiere no solo la encapsulación de la función lineal como objeto, sino su integración en un esquema conceptual que incluya otros objetos matemáticos como sistemas de ecuaciones, funciones cuadráticas, proporcionalidad directa, etc., lo que trasciende con creces el alcance de una intervención de tres sesiones centrada en el concepto de función lineal.

Un hallazgo muy significativo de la intervención es el hecho de que el EF3 mostró en la conversación de cierre indicios de lo que la teoría APOE describe como coherencia esquemática incipiente, es decir, la capacidad de establecer conexiones entre la pendiente y la razón de proporcionalidad, y de reconocer la función lineal como caso particular de un patrón más general de variación. Estos indicios sugieren que, con una intervención más extensa, el EF3 podría ser capaz de construir un esquema conceptual articulado en torno a la función lineal. La documentación de estos indicios es, un aporte del estudio pues señala qué condiciones favorecen el inicio de la construcción de la estructura mental E y qué tipo de actividades podrían acelerar ese proceso.

Límites de la intervención

Los casos EF3 y EF8 funcionan como analizadores de los límites del diseño pedagógico en sentidos opuestos. EF3 representa el techo del diseño: partió de una estructura en transición de A hacia P, y al final mostró Esquema emergente en C5, Objeto en C1, C2, C3 y C4, y puntaje máximo en S3. Su trayectoria sugiere que cuando un estudiante llega a la intervención con condiciones cognitivas mínimas de Proceso parcial, un diseño articulado con GeoGebra y énfasis en el registro verbal puede producir avances que superan la estructura mental Proceso y llegan a construir la estructura mental Objeto y conexión con la estructura mental Esquema. Este caso es el único que muestra evidencia de que la función lineal comenzó a ser tratada como objeto matemático con propiedades relacionales, y no simplemente como un procedimiento a ejecutar.

EF8, en cambio, representa el piso del diseño: permaneció en la estructura mental Acción en todas las categorías a lo largo de toda la intervención, con puntajes que se estancaron completamente entre S2 y S3 (10 en ambas sesiones). Este estancamiento no puede atribuirse exclusivamente al diseño, ya que otros estudiantes con puntos de partida similares (EF1, EF2, EF7) sí mostraron progreso. EF8 plantea la pregunta sobre qué factores motivacionales, contextuales, o relativos al punto de entrada cognitivo pueden determinar que una intervención pedagógica no logre producir ningún desplazamiento, y sugiere la necesidad de estrategias de acompañamiento diferenciado que el diseño actual no contempló.

El caso EF5 introduce una tercera lectura que merece atención: la posibilidad de regresión puntual en una categoría específica. El retroceso en cuanto a la estructura mental en C1 (de P diagnóstico a A en la prueba final) en un estudiante que sí progresó en otras categorías no es un simple error de medición, sino un indicador de que las comprensiones construidas durante la intervención pueden ser frágiles cuando el andamiaje desaparece, especialmente en las

conversiones no congruentes que demandan mayor esfuerzo cognitivo. Esta fragilidad es una señal de que el Proceso alcanzado en algunos casos es más una interiorización incipiente que una comprensión estable.

Evolución final del grupo de casos focales

A partir del conjunto de evidencias, es posible sostener cuatro afirmaciones analíticas sobre la evolución del grupo:

1. La intervención pedagógica produjo un desplazamiento real y documentable en las estructuras mentales predominantes del grupo, desde Acción hacia Proceso, en la mayoría de los casos focales y en las categorías más directamente trabajadas. Este es el hallazgo central y el más sostenido por los datos.

2. El desplazamiento fue desigual por categoría semiótica. Las conversiones y los tratamientos algebraicos respondieron mejor a la intervención que el registro verbal y la metacognición, lo que sugiere que el diseño fue más eficaz para movilizar el aprendizaje procedimental que para producir objetivación conceptual plena.

3. GeoGebra funcionó como catalizador del aprendizaje en los estudiantes que ya tenían condiciones cognitivas mínimas de Proceso, pero generó dependencia instrumental en quienes permanecieron en Acción, sin producir interiorización genuina. Esto implica que el valor pedagógico de la herramienta es condicionado por el nivel cognitivo de entrada del estudiante.

4. La distribución de estructuras mentales en la prueba final (Esquema emergente en un caso, Objeto en dos, Proceso en cuatro y Acción en uno) revela que la intervención no fue capaz de llevar al grupo completo a una estructura mental mínima de Proceso consolidado, y que la brecha entre los casos de mayor y menor progreso se amplió durante la intervención en lugar de reducirse. Esto plantea una tensión entre el diseño como propuesta colectiva y la necesidad de

acompañamiento diferenciado para los estudiantes cuyo punto de partida o condiciones de aprendizaje requieren estrategias que van más allá de lo que un diseño grupal puede ofrecer.

El Papel de GeoGebra como Mediador Semiótico-Cognitivo

La mediación tecnológica de GeoGebra no se planteó como un componente complementario de la intervención sino como un elemento constitutivo de su diseño, cuya función fue articulada desde dos perspectivas teóricas complementarias. Desde la TRRS, GeoGebra actúa como mediador semiótico que externaliza la coordinación de registros: hace visible, en la pantalla, la correspondencia entre los parámetros algebraicos de la función y sus propiedades geométricas, convirtiendo la conversión en un evento observable y manipulable (Artigue, 2002; Vargas y García, 2024). Desde la teoría APOE, GeoGebra crea condiciones para que las acciones se interioricen en procesos, al permitir que el estudiante vea en tiempo real el efecto de sus acciones sobre múltiples registros simultáneamente lo cual acelera la construcción de la relación causal entre el parámetro y su efecto representacional (Wondimuneh y Ayele, 2021).

Los datos de la intervención confirman que GeoGebra cumplió estas dos funciones de manera progresiva y diferencial según el caso focal y el momento de la intervención. En la Sesión 1, el uso predominante fue de tipo C3a (verificador): los estudiantes calculaban la pendiente manualmente y usaban el software para confirmar el resultado, sin establecer todavía una relación conceptual entre el cálculo numérico y la representación gráfica. En la Sesión 2, el uso evolucionó hacia C3b (explorador) para los casos focales más avanzados: EF3, EF6 y EF7 comenzaron a usar el software para anticipar efectos (modificar el deslizador antes de calcular, formular conjeturas sobre el comportamiento de la recta) lo que evidencia que la relación entre el registro algebraico y el gráfico había comenzado a interiorizarse como proceso. En la Sesión 3,

algunos casos focales mostraron avances hacia C3c (andamiaje en transición): podían razonar sobre las propiedades de la función sin depender completamente del software, aunque todavía lo necesitaban para verificar sus afirmaciones más complejas.

La prueba final confirmó que el uso de Geogebra como andamiaje en transición no había sido alcanzado de manera generalizada. La mayoría de los estudiantes siguió dependiendo del software para realizar las representaciones gráficas, lo que indica que la coordinación entre registros no se había interiorizado de manera suficiente como para prescindir del mediador tecnológico. Este resultado es teóricamente relevante desde la perspectiva de Wondimuneh y Ayele (2021), quienes señalan que el uso de GeoGebra sin momentos deliberados de trabajo autónomo sin el software puede generar lo que denominan dependencia del andamiaje. En este caso el estudiante construye la coordinación con la herramienta, pero no sin ella, porque la herramienta nunca fue retirada de manera progresiva para verificar si la comprensión se había interiorizado. La intervención incluyó algunos momentos de trabajo sin GeoGebra, pero la evidencia sugiere que esos momentos fueron insuficientes en número y en duración para producir la coordinación entre registros de manera autónoma y generalizada.

Se puede afirmar que GeoGebra modificó cualitativamente el tipo de errores que los estudiantes cometieron durante la intervención respecto a los del diagnóstico. Los errores del diagnóstico eran predominantemente de ejecución procedimental, mientras que los errores documentados en las sesiones y en la prueba final fueron, en mayor medida, errores de interpretación conceptual como confusión entre el valor de la función en un punto y la función en sí misma, dificultad para articular verbalmente el significado de m en un contexto nuevo, error de categorización semántica entre paralelismo y perpendicularidad. Este desplazamiento del error procedimental al error conceptual es, desde las perspectivas de la TRRS y la teoría APOE,

una señal de progreso: significa que los estudiantes han salido de la estructura mental de ejecución mecánica y han comenzado a operar con el objeto matemático en un grado de comprensión más profundo, aunque todavía impreciso.

Descomposición genética refinada de la función lineal

La confrontación entre la descomposición genética inicial y los patrones observados durante la intervención permite proponer una descomposición genética refinada de la función lineal para estudiantes de noveno grado en contextos de mediación tecnológica con GeoGebra. Esta descomposición genética refinada no reemplaza la inicial, sino que la ajusta a partir de la evidencia empírica, siguiendo el proceso cíclico que Trigueros y Hernández-Rebollar (2022) describen como inherente a toda investigación con APOE.

Estructura mental Acción (A) refinada: Los datos confirman que los estudiantes en estructura mental A no operan exclusivamente dentro del registro algebraico, como la descomposición genética inicial anticipaba, sino que también pueden producir representaciones tabulares por cálculo puntual. Sin embargo, esa producción tabular es igualmente de tipo Acción: no implica comprensión de la relación funcional sino aplicación repetida de sustitución. El indicador más preciso de estructura mental A en este contexto no es el tipo de registro que usa el estudiante, sino la dependencia de instrucción explícita paso a paso: si el estudiante se detiene cuando no hay una instrucción que le diga qué paso sigue, está operando en estructura mental A. GeoGebra en este nivel funciona exclusivamente como verificador.

Estructura mental Proceso (P) refinada: La descomposición genética inicial describía la estructura mental P como capacidad de anticipar el efecto de modificar m o b sobre la tabla sin calcular todos los valores. Los datos refinan esta descripción: la anticipación ocurre primero en la dirección algebraico \rightarrow gráfico (mediada por GeoGebra) y solo más tarde en las demás

direcciones. La estructura mental P emergente (que fue la más frecuente al final de la intervención) se caracteriza por la capacidad de invertir la conversión en la dirección algebraico \leftrightarrow gráfico con apoyo del software, pero no de manera autónoma sin él. Una transición $A \rightarrow P$ consolidada requeriría que esa inversión fuera posible también sin GeoGebra, lo cual no fue alcanzado de manera generalizada. La descomposición genética refinada distingue entonces entre Proceso emergente (con GeoGebra como condición necesaria) y Proceso consolidado (que se sostiene sin el andamiaje tecnológico).

Estructura mental Objeto (O) refinada: La encapsulación, tal como la describe la descomposición genética inicial, ocurrió de manera parcial y diferenciada por categorías semióticas. El dato más relevante para la DG refinada es que la encapsulación no se produce de manera simultánea en todos los registros: EF3 mostró O en las categorías C2, C3 y C4 pero no en C5; EF6 mostró O en C3 pero no en C1 ni C4. Esto sugiere que la función lineal no se encapsula como un único objeto, sino que se construyen encapsulaciones parciales por dominio de registro, y que una estructura mental O verdaderamente integrada requiere de la coordinación de esas encapsulaciones parciales. La descomposición genética refinada propone entonces que entre la estructura mental P consolidada y la estructura mental O integrada existe un estadio intermedio, que podría denominarse Objeto parcial o encapsulación diferenciada por registro, caracterizado por la capacidad de operar sobre la función como objeto en algunos registros, pero no en todos.

Estructura mental Esquema (E) refinada: Ningún estudiante alcanzó la estructura mental E durante la intervención. Sin embargo, los indicios de coherencia esquemática incipiente del EF3 permiten caracterizar las condiciones que parecen necesarias para iniciar la construcción de Esquema en este contexto: la capacidad de reconocer la función lineal como caso particular de

un patrón más general de variación proporcional, la capacidad de establecer conexiones entre la pendiente y la razón de cambio en contextos extraídos de otras áreas (física, economía), y la capacidad de elegir el registro más adecuado con intención explícita y justificada. Estos indicadores son más exigentes que los de la descomposición genética inicial, que describía la estructura mental E en términos de fluidez entre registros, un rasgo que algunos estudiantes mostraron de manera incipiente sin que eso implicara coherencia esquemática genuina.

Esta descomposición genética refinada es, en sí misma, una contribución de la investigación al campo de la educación matemática en secundaria: operacionaliza las estructuras mentales de la teoría APOE para la función lineal en un contexto específico (noveno grado, mediación con GeoGebra) y propone distinciones (como la de Proceso emergente vs. consolidado y la de encapsulación diferenciada por registro) que las descripciones generales de la teoría no contemplan pero que los datos de la intervención hacen necesarias.

La síntesis de la descomposición genética refinada se puede apreciar en la siguiente tabla:

Tabla 11

Descomposición genética refinada de la función lineal

Estructura mental APOE	Descripción operacional refinada	Indicador observable (evidencia empírica)	Mecanismo activado
A Acción	<ul style="list-style-type: none"> Opera con $f(x) = mx + b$ exclusivamente por sustitución directa o por cálculo punto a punto. También puede producir tablas por sustitución mecánica sin que eso implique comprensión de la relación funcional. El indicador de Acción no es el tipo de registro, sino la dependencia de instrucción explícita paso a paso. 	<ul style="list-style-type: none"> Calcula m sustituyendo sin saber qué representa Se detiene si falta la instrucción del paso siguiente Tanteo punto a punto sin percibir la recta como totalidad Inversión $\Delta x/\Delta y$ o errores de signo con coord. negativas No puede anticipar el efecto de cambiar m o b 	<p>Ninguno activado.</p> <p>Condición previa a la interiorización.</p>

Estructura mental APOE	Descripción operacional refinada	Indicador observable (evidencia empírica)	Mecanismo activado
Mecanismo de transición A → P: Interiorización			
Indicadores: anticipación del efecto de m y b antes de mover el deslizador · inversión espontánea de la conversión (gráfico → algebraico) · formulación de generalizaciones que trascienden el caso particular			
P Proceso	<ul style="list-style-type: none"> • P emergente: anticipa e invierte la conversión algebraico ↔ gráfico con apoyo de GeoGebra, pero no de manera autónoma sin él. • P consolidado: la anticipación y la inversión se sostienen sin el andamiaje tecnológico. La función es concebida como regla de correspondencia global. • La interiorización ocurre primero en la dirección algebraico → gráfico y solo más tarde en las demás direcciones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Anticipa efecto de m y b sin calcular ("si m es negativa la recta baja") • Invierte la conversión espontáneamente: modifica la recta y razona sobre el valor de m • Formula generalizaciones: "si $m_1 = m_2$ las rectas son paralelas" • Explora con deslizadores de GeoGebra sin instrucción paso a paso • Los errores son conceptuales, no solo procedimentales 	<p>Interiorización activada.</p> <p>La acción de calcular la pendiente se convierte en proceso mental que puede ejecutarse internamente, anticiparse e invertirse.</p>
Mecanismo de transición P → O: Encapsulación			
Indicadores: operar sobre la función como entidad (comparar, incluir en sistemas) · reconocimiento de caso particular sin cálculo · encapsulación diferenciada por registro (parcial antes de integrada)			
O Objeto	<ul style="list-style-type: none"> • Encapsulación parcial: la función es tratada como objeto en algunos registros, pero no en todos. Estadio intermedio entre P consolidado y O integrado. • Encapsulación integrada: la función es reconocida como objeto con propiedades en todos los registros simultáneamente. El estudiante puede operar sobre familias de funciones lineales sin activar el proceso de cálculo subyacente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Justifica paralelismo sin graficar (misma m → nunca se cruzan) • Identifica m como tasa de cambio en contexto (litros/min, \$por hora) • Reconoce $f(x) = 4$ como caso particular de $f(x) = mx + b$ con $m = 0$ • Detecta inconsistencias entre sus propios registros 	<p>Encapsulación activada.</p> <p>El proceso de calcular/operar con la función se convierte en objeto sobre el cual reflexionar, comparar y operar a un nivel superior.</p>

Estructura mental APOE	Descripción operacional refinada	Indicador observable (evidencia empírica)	Mecanismo activado
		<ul style="list-style-type: none"> • Compara familias de funciones según criterios propios 	
Mecanismo de transición O → E: <i>Coordinación</i>			
Indicadores: conexión con proporcionalidad directa · transferencia a dominios nuevos · elección intencional del registro más adecuado · argumentación que cruza registros sin apoyo externo			
E Esquema	<ul style="list-style-type: none"> • Coherencia incipiente: el estudiante establece conexiones entre la función lineal y estructuras más amplias (proporcionalidad, variación) pero esas conexiones no forman aún una red conceptual estable. • Esquema pleno (no alcanzado en la intervención): coordinación dinámica de todos los registros, selección estratégica con intención explícita, transferencia completa a situaciones nuevas sin ningún apoyo externo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Vincula pendiente con razón de proporcionalidad directa • Reconoce la función lineal como caso particular de variación proporcional • Elige el registro más adecuado con intención explícita y justificada • Argumenta cruzando registros sin apoyo de GeoGebra • Transfiere el concepto a contextos no trabajados en la intervención 	Coordinación activada (incipiente). Los objetos construidos comienzan a articularse en una red conceptual. En la intervención este mecanismo no se activó de manera completa en ningún caso.

Nota. Elaboración propia a partir de los datos empíricos de la intervención, en paralelo con las observaciones de Arnon et al. (2014), Dubinsky (1991), Trigueros y Hernández-Rebollar (2022) y Şefik et al. (2021).

Conclusiones

Las conclusiones de esta intervención pedagógica son interpretaciones construidas desde el análisis de un grupo concreto de estudiantes, durante una intervención acotada en tiempo y recursos en un contexto educativo colombiano. Su alcance desde lo que permite la IAE es la

comprensión en profundidad de lo que ocurre en la intervención pedagógica, y generar un antecedente investigativo que pueda orientar otras prácticas similares.

Sobre los procesos semióticos

La intervención confirmó que las dificultades más persistentes en el aprendizaje de la función lineal son de naturaleza semiótica y no procedimental. Los estudiantes del Centro de Educación El Recreo podían operar con relativa competencia dentro del registro algebraico (calcular pendientes, sustituir valores, identificar parámetros en la ecuación) pero fallaban de manera reiterada cuando se les exigía coordinar ese registro con el gráfico, el tabular o el verbal. Se identificó que la conversión más compleja para los estudiantes es la que va del registro verbal al algebraico en contextos de modelación matemática, al ser ésta una conversión no congruente que exige identificar en un enunciado los elementos que corresponden a m y a b sin que esa correspondencia sea directa.

Durante la implementación de las actividades se demostró que GeoGebra puede actuar como un mediador semiótico que externaliza la conversión entre registros y la hace visible y manipulable. Esta función descrita por Artigue (2002) en términos de instrumentación, fue documentada en las tres sesiones: los estudiantes que usaron el software con mayor intencionalidad fueron los que mostraron avances más sólidos en las conversiones entre el registro algebraico y el gráfico. Sin embargo, la investigación también documentó que la coordinación construida con GeoGebra no siempre se transfiere a la coordinación sin GeoGebra. La comprensión del concepto en la categoría C3c (comprensión que se sostiene sin el mediador tecnológico) fue alcanzado de manera sólida solo por un caso focal (EF3) y de manera incipiente por dos más (EF2 y EF6). Para el resto del grupo, GeoGebra siguió siendo una condición

necesaria para la coordinación entre registros y no un medio para comprender el objeto matemático de forma autónoma.

El registro verbal fue el más difícil de abordar durante toda la intervención. La mediación de la inteligencia artificial como herramienta de retroalimentación del lenguaje matemático produjo resultados ambivalentes. Aunque mejoró la precisión de las explicaciones escritas de varios estudiantes, pero no siempre implicó una reorganización conceptual genuina. La distinción entre mejora terminológica superficial y reformulación conceptual autónoma es metodológicamente relevante y debe ser incorporada en el diseño de futuros estudios que integren herramientas de IA en el proceso de aprendizaje matemático.

Sobre la construcción cognitiva

La teoría APOE demostró ser un marco analítico de alta precisión para caracterizar el grado de comprensión matemática de los estudiantes y para orientar el diseño de intervenciones que promuevan las transiciones entre estructuras mentales. La descomposición genética inicial cumplió su función como hipótesis de trabajo al orientar el diseño de las secuencias didácticas y anticipar con precisión las estructuras mentales predominantes del grupo. Sin embargo, los datos empíricos obligaron a dos ajustes sustanciales que se evidenciaron en una descomposición genética refinada más coherente con la realidad encontrada al implementar la intervención.

Se realizaron ajustes en torno a la estructura mental Proceso, haciendo una distinción de la estructura mental Proceso emergente, que depende de GeoGebra como condición necesaria para sostener la coordinación entre registros, y una estructura mental Proceso consolidada, que se mantiene de manera autónoma sin ese andamiaje. En cuanto a la encapsulación se señala que no ocurre de forma global y simultánea en todos los registros, sino de manera diferenciada por categoría semiótica, lo que la descomposición genética refinada denomina encapsulación parcial

o diferenciada por registro, evidenciada en el intermedio de la estructura Proceso consolidado y Objeto emergente que inicialmente no fue contemplaba.

Respecto a la estructura mental Esquema, la descomposición genética inicial la describía principalmente en términos de fluidez entre registros; la evidencia empírica sugiere que esa fluidez, aunque necesaria, no es suficiente pues la coherencia esquemática requiere además la capacidad de establecer conexiones entre la función lineal y estructuras matemáticas más amplias, como la proporcionalidad directa, la variación y los sistemas de ecuaciones, condición que solo el caso EF3 comenzó a mostrar de forma incipiente al cierre de la intervención. Estos ajustes no invalidan la descomposición genética inicial, sino que la precisan a partir de la evidencia, siguiendo el proceso cíclico que toda investigación con APOE exige.

Los datos de la intervención permitieron identificar con precisión las condiciones bajo las cuales se activaron los mecanismos de construcción cognitiva descritos por la teoría APOE. La interiorización se evidenció a través de tres indicadores observables: la anticipación del efecto de los parámetros sin ejecutar el cálculo, la inversión espontánea del proceso de conversión en sentido gráfico→algebraico y la formulación de generalizaciones que trascendían el caso particular. Este mecanismo se activó de manera asimétrica, primero en la dirección algebraico→gráfico mediado por GeoGebra y solo más tarde en las demás direcciones, lo que confirma que la interiorización sigue la secuencia de experiencias del diseño y no avanza de forma homogénea en todas las categorías semióticas.

La encapsulación, en cambio, fue el mecanismo más difícil de activar: solo EF3 mostró indicios sólidos, con evidencias parciales en EF2 y EF6, y sus indicadores más fiables fueron la justificación del paralelismo sin graficar y la interpretación contextual de la pendiente como tasa de cambio con unidades en un escenario nuevo. La ausencia generalizada de encapsulación no

señala un fallo del diseño sino un límite temporal que la literatura especializada ya anticipa: este mecanismo requiere más experiencias diversificadas de las que tres sesiones pueden garantizar.

La intervención produjo una progresión real de la estructura mental A hacia la estructura mental P en la mayoría de los casos focales, aunque con alcances y velocidades distintas. El avance más frecuente fue la interiorización de la fórmula de la pendiente como razón de cambio (no solo como algoritmo a aplicar) y la identificación directa de m y b desde la representación gráfica sin necesidad de calcular punto a punto. Estos dos avances son coherentes con la descripción que la teoría APOE hace de la estructura mental P donde el estudiante puede anticipar resultados, invertir el proceso y razonar sobre la función como una relación global entre conjuntos.

La estructura mental O fue alcanzada de manera parcial: EF6 la evidenció en las categorías C1, C2 y C4, mientras que EF3 la alcanzó en C2, C3 y C4 y además mostró indicios de Esquema en C5. Este resultado es consistente con la observación de Arnon et al. (2014) sobre la dificultad de la encapsulación: es el mecanismo cognitivo más exigente en la construcción del concepto y requiere de una cantidad de experiencias ricas y diversificadas que el tiempo acotado de la intervención (tres sesiones) no pudo garantizar para todos los estudiantes.

El caso EF3 representa el mayor progreso de la intervención: partiendo de una estructura mental inicial en transición de $A \rightarrow P$, fue el único estudiante que alcanzó a evidenciar aspectos de la estructura mental Esquema emergente al finalizar, con logro de estructura mental Objeto o superiores en todas las categorías semióticas y puntaje máximo en la Sesión 3. Que ese avance se haya sostenido sin GeoGebra en la prueba final y que haya alcanzado elementos de estructura mental E emergente precisamente en metacognición semiótica (la categoría más resistente del grupo) confirma que la reorganización cognitiva fue genuina y no dependiente del andamiaje

instrumental. Su trayectoria evidencia el potencial del diseño pedagógico para producir comprensión esquemática, aunque dado que la estructura mental alcanzada es emergente, un seguimiento longitudinal sería necesario para confirmar su estabilidad y transferibilidad.

Una de las conclusiones cognitivas más relevantes del estudio es la heterogeneidad de las trayectorias de aprendizaje dentro de un mismo grupo. Estudiantes con perfiles iniciales muy similares en la estructura mental A que tenían las mismas dificultades ante las conversiones no congruentes, desarrollaron trayectorias notablemente distintas a lo largo de la intervención. Esta heterogeneidad no puede explicarse únicamente por las características de la intervención pedagógica, pues también puede ser el reflejo de variables individuales como estilos cognitivos, experiencias matemáticas previas o disposición hacia el trabajo con el software.

Sobre la articulación TRRS–APOE como marco analítico

La articulación entre la TRRS y la teoría APOE demostró producir un análisis más completo y útil para la práctica pedagógica que el que cualquiera de los dos marcos podría generar por separado. La TRRS describe qué tipo de operaciones semióticas implica la comprensión matemática, mientras que la teoría APOE describe cómo se construyen mentalmente las estructuras que permiten esas operaciones. Al integrar ambas teorías es posible responder no solo qué falla en el aprendizaje de la función lineal en el contexto específico, sino por qué falla y qué tipo de intervención es necesaria para superarlo.

Esta articulación es coherente con los planteamientos de investigadores como Reyes-Santander et al. (2023), quienes señalan explícitamente la necesidad de complementar la TRRS con otros marcos cognitivos para alcanzar interpretaciones más completas de la comprensión matemática. El presente estudio aporta evidencia empírica de esa complementariedad en un

contexto de básica secundaria y ofrece un modelo de integración analítica que puede ser adaptado a otros conceptos matemáticos y otros niveles educativos.

La investigación también aportó evidencia sobre el valor pedagógico del análisis previo a la intervención como mecanismo de orientación del diseño didáctico. La anticipación sistemática de los obstáculos semióticos y cognitivos, fundamentada en la literatura y en la descomposición genética de la función lineal, permitió diseñar secuencias con una progresión de complejidad coherente y ajustar el diseño entre sesiones a partir de los datos del diario de campo. Este ciclo reflexivo es la condición que distingue a la IAE de calidad de la simple aplicación de actividades, y su documentación en este estudio es también una contribución metodológica al campo.

Recomendaciones

Las recomendaciones que se presentan a continuación se derivan directamente de los hallazgos de la investigación y de las limitaciones que el proceso evidenció.

Para la Práctica Pedagógica en el Aula

Se recomienda incorporar en la planificación regular actividades que trabajen explícitamente las conversiones no congruentes, especialmente las que involucran el registro verbal, avanzando de manera progresiva desde las congruentes hacia las no congruentes mediante situaciones de modelación cotidiana. El uso de GeoGebra debe complementarse con momentos deliberados de trabajo autónomo sin el software, que permitan verificar si la coordinación construida con la herramienta se ha interiorizado genuinamente. Finalmente, se sugiere incorporar el análisis a priori como herramienta habitual de planeación, preguntándose antes de cada actividad qué tipo de conversión exige y qué errores pueden anticiparse.

Para el Diseño de Actividades en la Institución Educativa

La incorporación de herramientas tecnológicas como GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas requiere condiciones institucionales que vayan más allá del acceso al espacio físico. Las sesiones mediadas por tecnología deben estar articuladas por una progresión de aprendizaje coherente, de modo que cada sesión retome y profundice lo trabajado en la anterior.

Además, se considera que la capacidad de interpretar los errores de los estudiantes como indicadores semióticos y cognitivos exige una formación docente que trasciende el dominio disciplinar de las matemáticas; por ello se recomienda que las instituciones consideren la formación en didáctica de las matemáticas como una inversión pedagógica prioritaria.

Se sugiere documentar y sistematizar la experiencia pedagógica como insumo institucional. Los instrumentos desarrollados en este estudio son herramientas de gestión pedagógica que las instituciones educativas pueden adaptar para el seguimiento sistemático del aprendizaje matemático de sus estudiantes. La sistematización de la experiencia docente como fuente de conocimiento, puede contribuir a generar escenarios para reflexionar sobre la práctica y fortalecer estructuras institucionales que valoren el conocimiento generado desde el aula.

Para Investigaciones Futuras

Se recomienda replicar este diseño con mayor número de sesiones para documentar con más profundidad los mecanismos de encapsulación y el alcance de la estructura mental Objeto. Sería valioso explorar la articulación TRRS–APOE en otros conceptos del currículo de secundaria, e investigar con mayor especificidad las condiciones bajo las cuales la mediación de inteligencia artificial produce reorganización conceptual genuina y no solo mejora terminológica. Finalmente, incluir entrevistas individuales con los casos focales a lo largo del proceso enriquecería el análisis al incorporar las interpretaciones que los propios estudiantes construyen sobre su aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Arteaga, B., Macías, J., & Pizarro, N. (2024). *Metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de secundaria*. *Revista Científica UISRAEL*, 11(3). <https://doi.org/10.35290/rcui.v11n3.2024.1159>
- Artigue, M. (2002). *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. <https://doi.org/10.1023/A:1022361927993>
- Baldovino, D., & Quigua, O. (2022). *Fortalecimiento de la competencia de interpretación de función lineal y función cuadrática a través del software graficador GeoGebra como estrategia pedagógica en los estudiantes del grado once de la Escuela Normal Superior Santa Clara del municipio de Almaguer Cauca [Trabajo de grado, Universidad de Cartagena]*. <https://repositorio.unicartagena.edu.co/handle/11227/15963>
- Bancayán, C., & Vega, P. (2020). *La investigación-acción en el contexto educativo*. *Paideia XXI*, 10(1), 233–247. <https://doi.org/10.31381/paideia.v10i1.2999>
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). *Development of the process conception of function*. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247–285. <https://doi.org/10.1007/BF02309532>

- Coy-Chacón, I. C., & García-Castro, L. I. (2023). *Conversiones semióticas del objeto matemático función lineal desde los objetos virtuales de aprendizaje*. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(5). https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i5.8200
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches (4th ed.)*. SAGE.
- Dávila-Araiza, T., Giacomone, B., & Herrera-García, K. (2023). *Diseño e implementación de una experiencia formativa para futuros profesores de matemáticas sobre variación lineal*. *Revista Uniciencia*, 37(1). <https://www.revistauniciencia.euna.ac.cr>
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Kluwer Academic Publishers.
<https://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf>
- Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). *The nature of the process conception of function*. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, Vol. 25, pp. 85–106). Mathematical Association of America.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275–282). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
<https://journals.openedition.org/adsc/2550>

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>
- Elliott, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Ediciones Morata.
<https://edmorata.es/producto/la-investigacion-accion-en-educacion/>
- Elliott, J. (2015). *Educational action research as a quest for virtue in teaching*. *Educational Action Research*, 23(1), 4–21. <https://doi.org/10.1080/09650792.2014.994017>
- García-González, M., & Martínez, A. (2021). *La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria*. *Uniciencia*, 35(1).
<https://opac5.scielo.sa.cr/j/uniciencia/a/S3CDyd3SXXG7R4yJ368cvLm/>
- Groundwater-Smith, S., & Mockler, N. (2009). *Teacher professional learning in an age of compliance: Mind the gap*. Springer.
- Hernández, M. R. (2023). *Función lineal y sus registros de representación semiótica: Diseño de una secuencia didáctica para el nivel secundaria [Proyecto de desarrollo profesional, Universidad Autónoma de Zacatecas]*.
<http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/bitstream/20.500.11845/3443/1/Hern%C3%A1ndez%2C%20M.%20R.%20%282023%29.pdf>

- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación (6.ª ed.)*. McGraw-Hill.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). (2021). *Informe de resultados nacionales Pruebas Saber 2021*. ICFES. <https://www.icfes.gov.co>
- Johnson, R. B., & Christensen, L. (2019). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches*. SAGE.
- Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). *The action research planner (3rd ed.)*. Deakin University Press.
- Kemmis, S., McTaggart, R., & Nixon, R. (2014). *The action research planner: Doing critical participatory action research*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-4560-67-2>
- Lizana, D., & Antezana, R. (2021). *Representación semiótica en el aprendizaje de conceptos básicos de la estructura algebraica de grupo*. *Horizonte de la Ciencia*, 11(20), 177–188. <https://www.redalyc.org/journal/5709/570967307013/html/>
- Macías Tejena, H. A., Durán Pico, U. C., & Rodríguez Álava, D. L. A. (2025). *Uso de GeoGebra en el aprendizaje de funciones lineales en el primer año de bachillerato*. *Revista Científica Sinapsis*, 27(2). <https://doi.org/10.37117/s.v27i2.1177>
- Mateus-Nieves, E., & Moreno, E. M. (2021). *Desarrollo del pensamiento variacional para la enseñanza de nociones preliminares de cálculo: Una experiencia de aula en la educación básica*. *Bolema*, 35(71). <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a26>
- Matindike, F., & Makonye, J. P. (2023). *An APOS analysis of Grade 11 learners' errors and misconceptions under hyperbolic functions*. *SAGE Open*, 13(3). <https://doi.org/10.1177/21582440231190348>

- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje — Matemáticas*. MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-381920_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2013). *Competencias TIC para el desarrollo profesional docente*. MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339097_archivo_pdf_competencias_tic.pdf
- Muñoz, E., Caicedo, J., & Pérez, H. (2021). *Efectos del software GeoGebra sobre la comprensión de la función lineal en estudiantes de 11° de la I.E.D. Antonio José de Sucre de la ciudad de Barranquilla [Tesis de maestría, Universidad del Norte]*. <https://manglar.uninorte.edu.co/handle/10584/11492>
- Nga, N. T., Dung, T. M., Trung, L. T. B. T., Nguyen, T. T., Tong, D. H., Van, T. Q., & Uyen, B. P. (2023). *The effectiveness of teaching derivatives in Vietnamese high schools using APOS theory and ACE learning cycle*. *European Journal of Educational Research*, 12(1), 507–523. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.507>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). (2023). *PISA 2022 results*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Pérez-Salamanca, V. A. (2025). *Estrategia didáctica mediante aprendizaje basado en problemas e integración de software matemático para visualización gráfica del pensamiento variacional*. *Praxis*, 21(4). <https://doi.org/10.21676/23897856.6824>

Pineda, W. (2021). *Registros de representación semiótica para la comprensión de la elipse usando GeoGebra [Trabajo de grado]*.

<https://repositorio.uptc.edu.co/bitstreams/73e26ba0-2e8d-4bcd-9e45-8148546755b8/download>

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. <https://hal.science/hal-01017462/document>

Rachmawati, D. A. (2020). *Impulsive and reflective students' understanding to linear equations system: An analysis through APOS theory*. *MATHEdunesa*, 9(1), 128–135.

<https://doi.org/10.26740/mathedunesa.v9n1.p128-135>

Reyes-Santander, P., Hernández, M., & Torres, J. (2023). *Una mirada a la teoría de representaciones semióticas de Duval desde el pensamiento manifestado por participantes en las olimpiadas colombianas de matemáticas*. *South Florida Journal of Development*, 4(3), 1433–1453.

<https://ojs.southfloridapublishing.com/ojs/index.php/jdev/article/download/2640/2062>

Rico Segura, A. (2024). *El aprendizaje y la enseñanza del cálculo diferencial: perspectivas desde las teorías APOE y ontosemiótica*. *Ciencia Latina Revista Científica*

Multidisciplinar. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1.9939

Rodríguez Ramírez, C. A. (2022). *EVA para el desarrollo del proceso cognitivo de conversión entre distintas representaciones de la función lineal*.

<https://repository.udistrital.edu.co/items/ce754706-816e-469e-964a-de229bccf48d>

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., & Ledezma, C. (2024). *High school Colombian students' variational thinking triggered by mathematical connections in a laboratory on linear functions*. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(4).

<https://www.iejme.com/article/high-school-colombian-students-variational-thinking-triggered-by-mathematical-connections-in-a-15649>

Şefik, Ö., Erdem Uzun, Ö., & Dost, Ş. (2021). *Content analysis of the APOS theory studies on mathematics education conducted in Turkey and internationally: A meta-synthesis study*. Necatibey Eğitim Fakültesi, 15(2), 404–428.

<https://doi.org/10.17522/balikesirnef.1020526>

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). *Geometrical representations in the learning of two-variable functions*. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3–19.

<https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5>

Trigueros, M., & Hernández-Rebollar, L. A. (2022). *Contributions to the characterization of the schema using APOS theory: Graphing with derivative*. *ZDM – Mathematics Education*, 56(1). <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6>

Umam, K., & Susandi, A. D. (2022). *Critical thinking skills: Error identifications on students with APOS theory*. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 9(1).

<https://doi.org/10.21831/jrpm.v9i1.41290>

Vargas, V., & García, E. (2024). *Uso de GeoGebra y registros de representación en problemas contextualizados para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales 2x2*. *RIDE*

Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 15(29).

<https://doi.org/10.23913/ride.v15i29.2042>

Villacis Montoya, D. I., Jácome Vélez, W. J., López Chica, J. A., & Córdova Alarcón, J. R. (2023). *Aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de funciones lineales con estudiantes de décimo año*. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(1), 9428–9445. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.5139

Wondimoneh, T. E., & Ayele, M. A. (2021). *Implementing GeoGebra integrated with multi-teaching approaches guided by the APOS theory to enhance students' conceptual understanding of limit in Ethiopian Universities*. *Heliyon*, 7(5), e07012.

<https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e07012>

Yiğit Koyunkaya, M., & Boz-Yaman, B. (2023). *Changes in students' mental constructions of function transformations through the APOS framework*. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(4), em0747. <https://doi.org/10.29333/iejme/13515>

Apéndice A

Evaluación Diagnóstica

Centro de Educación El Recreo Grado Noveno

Evaluación Diagnóstica

Funciones Lineales, Registros de Representación Semiótica (TRRS, Duval)

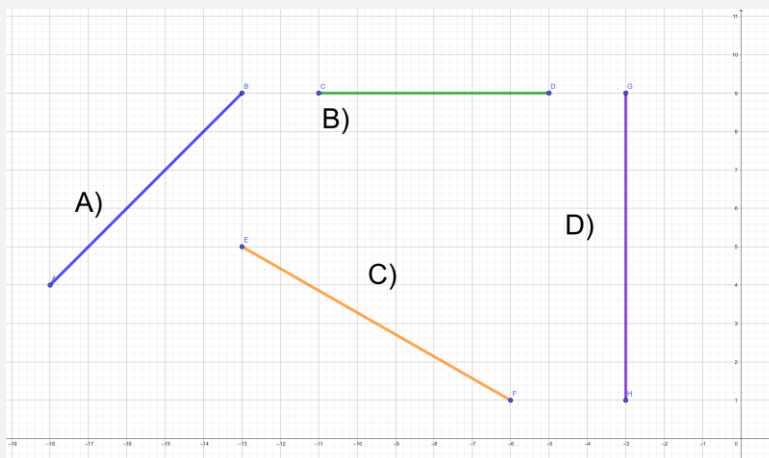
DATOS DEL ESTUDIANTE	
Nombre completo:	
Fecha:	Tiempo: 60 minutos

OBJETIVO
Identificar los conocimientos previos y las dificultades que presentan los estudiantes de grado noveno al usar y coordinar los registros de representación semiótica (gráfico, numérico, algebraico y verbal) en el trabajo con funciones lineales.

INSTRUCCIONES

1. Lee cada pregunta con atención antes de responder.
2. En las preguntas de selección múltiple, marca con una X la única opción correcta.
3. En las preguntas abiertas, escribe tu solución con todo el procedimiento en el espacio disponible.
4. No se permite el uso de calculadora ni de dispositivos electrónicos.
5. Esta prueba tiene carácter diagnóstico: no afecta tu calificación.

Pregunta 1. Observa las cuatro rectas graficadas a continuación ¿Cuál de las siguientes descripciones corresponde a una recta con pendiente negativa?



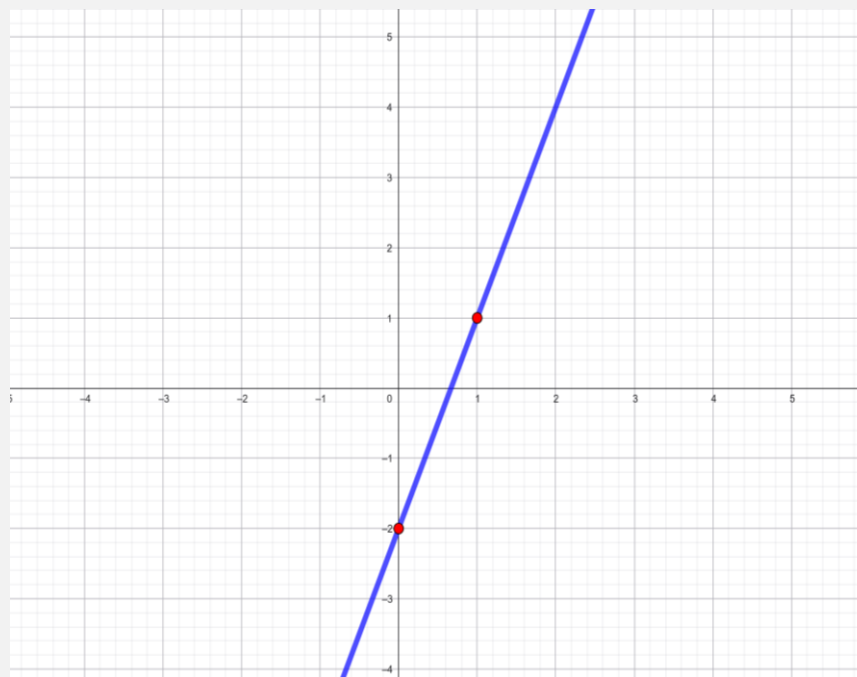
A)	Una recta que sube de izquierda a derecha.
B)	Una recta completamente horizontal.

C)	Una recta que baja de izquierda a derecha.
D)	Una recta completamente vertical.

Pregunta 2. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (2, 5) y B (6, 13)?

A)	$m = 3$
B)	$m = 2$
C)	$m = 4$
D)	$m = \frac{1}{2}$

Pregunta 3. A partir de la observación de la siguiente gráfica, ¿Cuál es su ecuación algebraica?



A)	$y = 3x + 2$
B)	$y = -3x - 2$
C)	$y = 3x - 2$
D)	$y = 2x - 3$

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = 2x + 1$, calcula los valores de $f(x)$ para $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y organízalos en una tabla. Con los valores de la tabla, traza la gráfica de la función en la

hoja cuadriculada, identifica y da nombre a los ejes y señala el punto donde la recta corta el eje y.

Pregunta 5. Una empresa de alquiler de bicicletas cobra un costo fijo de \$5.000 y \$2.000 adicionales por cada hora de uso. Escribe la ecuación que modela el costo total C según las horas h de uso, identifica cuál es la pendiente y cuál es el intercepto, y calcula cuánto costaría alquilar la bicicleta por 3 horas y por 5 horas.

Rúbrica de análisis Evaluación Diagnóstica

Al analizar la prueba diagnóstica se construye para cada caso focal un perfil de una sola línea: qué categorías activó, qué tipo de conversión falla, en qué estructura mental APOE opera predominantemente. Este perfil guía la selección de los casos focales.

Categoría de análisis	Ítem(s)	Proceso TRRS evaluado	Estructura Mental A predominante esperado	Estructura Mental P emergente	Error diagnóstico más frecuente	Estructura mental observada (A/P/O/E)
C1 Conversión entre registros	P1, P3, P5	P1: Gráfico → Verbal (efecto de m). P3: Gráfico → Algebraico (leer m y b). P5: Verbal → Algebraico (modelación contextual)	Describe 'sube/baja' sin lenguaje matemático. Calcula punto a punto sin identificar m ni b directamente. Confunde valor fijo con tasa de cambio.	Relaciona signo de m con dirección visual. Identifica m y b desde la gráfica sin calcular. Distingue m y b desde enunciado verbal.	Llama “mayor pendiente” a la recta casi vertical. Confunde b con un valor de x. Invierte m y b : toma el valor constante como pendiente.	
C2 Tratamiento dentro del registro	P2, P4	P2: Numérico → Algebraico (fórmula $m = \Delta y / \Delta x$). P4: Algebraico → Tabular → Gráfico (cadena de tratamientos)	Aplica la fórmula mecánicamente. Construye la tabla ítem a ítem. Comete errores de escala al graficar.	Razona por qué Δy está en el numerador. Puede anticipar la forma de la recta antes de graficar todos los puntos.	Inversión $\Delta x / \Delta y$. Error de signo con coordenadas negativas. Marca puntos aislados sin percibir la	

					recta como totalidad.
C3 Coordinación mediada por GeoGebra	Obs. durante P1–P4	Observación del comportamiento del estudiante al usar GeoGebra durante la aplicación: ¿verifica resultados (C3a) o los anticipa (C3b)?	Usa GeoGebra solo para dibujar, sin relacionar el resultado visual con los parámetros algebraicos.	Usa GeoGebra para verificar si su cálculo manual coincide con la representación gráfica.	No establece relación entre la manipulación del software y los valores numéricos o algebraicos.
C4 Registro verbal como articulador	Obs. durante P5	Calidad del lenguaje matemático usado al resolver P5 (modelación verbal): ¿usa términos precisos o cotidianos? ¿articula m y b con sus significados?	Usa lenguaje exclusivamente cotidiano (“el precio sube”, “empieza en”). No articula los registros verbal y algebraico.	Incorpora términos como “tasa de cambio” o ‘valor inicial’. Intenta conectar el enunciado con la ecuación.	Confunde la descripción del contexto con la estructura algebraica. No diferencia el significado de m del de b en el enunciado.
C5 Metacognición semiótica	—	No se evalúa con ítem específico en la diagnóstica. Requiere estructura mental	El estudiante no identifica sus propias dificultades ni las comenta.	El estudiante comenta espontáneamente en qué ítem tuvo dificultad o por qué	Ausencia total de autoconciencia sobre el propio proceso de resolución.

O/E. Se registra en el diario de campo si emerge espontáneamente durante la aplicación.

eligió cierta estrategia.

Apéndice B

Secuencias didácticas

Centro de Educación El Recreo Grado Noveno

Secuencia Didácticas

Funciones Lineales, Registros de Representación Semiótica (TRRS, Duval), APOE

Información general
Concepto matemático: Función lineal, pendiente de una recta y sus aplicaciones
Grado o Nivel: Grado Noveno 9° de básica secundaria
Objetivo general: Comprender el concepto función lineal, su relación con la pendiente de una recta y sus aplicaciones, a través de la conversión y tratamiento entre diferentes registros de representación semiótica (gráfico, algebraico, numérico y verbal), utilizando el recurso digital GeoGebra.
Objetivos Específicos: <ul style="list-style-type: none"> • Identificar el nivel de inclinación de una recta a partir de su representación gráfica, realizando una presentación intuitiva del concepto de pendiente (Registro Gráfico ↔ Verbal). • Calcular la pendiente de una recta a partir de dos puntos dados, transformando la información del registro numérico a la representación de la función en el registro algebraico, y viceversa (Registro Numérico ↔ Algebraico). • Relacionar el concepto de pendiente a partir de los parámetros de la ecuación de la recta $y = mx + b$ y aplicar dicho concepto para resolver de manera grafica problemas en contextualizados. (Registros algebraico, gráfico y verbal).

Sesión 1: Exploración gráfica y noción de inclinación
Duración: 120 minutos
Contenido a abordar: Presentación del concepto de pendiente como "inclinación" o "tasa de cambio", desde la exploración de la forma como los estudiantes los estudiantes perciben dicho parámetro en la representación gráfica de la función lineal y su utilidad en la descripción de fenómenos de aumento o disminución.

1. Actividad inicial: "¿Qué tan inclinada está la recta?" (15 minutos)

- a) Se pide a los estudiantes que ingresen al siguiente applet de Geogebra:
<https://www.geogebra.org/m/zzyncz83#material/umkhjtub>. Este applet presenta el movimiento de un ciclista cuya ruta puede ser modificada por el estudiante manipulando el deslizador m .
- b) El docente solicita a los estudiantes que modifiquen los valores para el deslizador m y observen los cambios generados en la trayectoria del ciclista.
- c) Se pide a los estudiantes responder las siguientes preguntas:
¿Qué ocurre con la inclinación de la recta cuando aumentas el valor de m ?
¿Qué ocurre cuando disminuyes el valor de m ?
¿Qué pasa cuando $m=0$? ¿Cómo se ve la ruta del ciclista?

2. Exploración guiada con GeoGebra: Jugando con la Inclinación (25 minutos)

- a) Se pide a los estudiantes ingresar al software GeoGebra
<https://www.geogebra.org/classic?lang=es> y utilizando las herramientas punto y segmento de recta, trazar una recta uniendo dos puntos cualesquiera (A y B).
- b) Mover el punto B (o A) y observar la forma en que varía la inclinación de la recta.
- c) Solicitar a los estudiantes que tracen varias rectas que "suban" mucho, "suban" poco, "bajen", sean "horizontales" y/o "verticales".
- d) Plantear a los estudiantes preguntas como: "¿Cómo se puede describir la dirección de la recta en cada caso? ¿Qué hace que la recta suba o baje más rápido?".
- e) Presentar el cambio de los valores en y como "variación vertical" y el cambio de los valores en x como "variación horizontal" de forma intuitiva. Pedir a los estudiantes que cuantifiquen estas variaciones utilizando la cuadrícula de GeoGebra.

3. Formalizar ideas: Sube/Baja y Avanza (25 minutos)

- a) Utilizando las rectas dibujadas en GeoGebra durante la actividad anterior, pedir a los estudiantes que identifiquen el cambio vertical y el cambio horizontal entre dos puntos de coordenadas.

- b) Introducir el concepto de pendiente como la razón entre el cambio vertical y el cambio horizontal: $m = \frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}}$.
- c) Calcular las pendientes de las rectas dibujadas con esta fórmula.
- d) Utilizar la herramienta "Pendiente" de GeoGebra verificar los valores calculados realizados manualmente.
- e) Identificar cuando una pendiente es positiva, negativa, cero e indefinida.

4. **Discusión Grupal: ¿Qué es la Pendiente?** (10 minutos)

El docente propicia un espacio de diálogo donde los estudiantes pueden compartir sus experiencias y apreciaciones sobre el concepto de pendiente de una recta y la forma en que condiciona la inclinación y dirección. Se retroalimenta a los estudiantes promoviendo el uso de vocabulario matemático.

5. **IA como mediador del aprendizaje en el registro verbal** (25 minutos)

- a) Solicitar al estudiante que escriba con sus propias palabras qué significa que una recta sea más o menos inclinada.
- b) Utilizar la IA para que cada estudiante pueda revisar su explicación. Para ello ingresará a: <https://chatgpt.com/> y escribirá el siguiente prompt: “Revisa mi explicación sobre la inclinación de una recta. Dime si es clara y correcta. Si es incompleta, dime qué idea debería agregar, pero NO me des la explicación final.”
- c) En el caso que la explicación deba mejorarse el estudiante la reescribe y vuelve a preguntar a la IA si la nueva redacción ha mejorado los puntos señalados utilizando el siguiente prompt: “Verifica nuevamente mi respuesta según lo que me sugeriste anteriormente”
- d) Posteriormente se solicita al estudiante que copie alguna de las descripciones realizadas en el punto 3 de la secuencia sobre una recta que “sube” o “baja” y pida a la IA que revise si esta descripción utiliza un lenguaje matemático adecuado. Para ello debe escribir el siguiente prompt: “Lee mi descripción de la recta. ¿Estoy usando términos matemáticos correctos? Dime qué palabras son poco claras y cómo podría mejorarlas, sin cambiar mi idea.”

Recursos Didácticos:

Proyector o tablero interactivo (televisor).

Computadores/tabletas con acceso a GeoGebra (descargado o versión web) y

<https://chatgpt.com/>.

Hojas cuadriculadas (para apoyo visual si es necesario).

Evaluación Interactiva en Geogebra (20 minutos):

Se pide a los estudiantes ingresar a la evaluación a través del siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/m/zzyxcz83#material/g4rycwed>. Se entrega una hoja de papel a cada estudiante donde debe registrar las operaciones, procedimientos o ideas que utilizó para llegar a la respuesta.

Observación directa: Registro de desempeño y observaciones relevante en el diario de campo.

Rúbrica: Se analiza el desempeño del estudiante desde el punto de vista semiótico en el uso de los RRSS de la función lineal y la estructura mental evidenciada el desarrollo de las actividades.

Sesión 2: Pasar de puntos en el plano a la ecuación formal de la recta
Duración: 120 minutos
Contenido a abordar: Se formaliza el concepto utilizando la fórmula de la pendiente a partir de coordenadas, la relación de la pendiente con la ecuación de la recta $y = mx + b$, y el significado de esta en la ecuación.
Actividades: <ol style="list-style-type: none"> 1. Retomando la actividad anterior: Fórmula de la Pendiente (30 minutos) <ol style="list-style-type: none"> a) El docente hace un repaso breve del concepto de pendiente tratado en la sesión 1. b) Se introduce formalmente la fórmula de la pendiente usando las coordenadas de dos puntos: $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ c) El docente propone diferentes ejemplos, dados dos puntos numéricos (Ej. (3,4) y (6,10)), solicita a los estudiantes aplicar la fórmula para calcular el valor de la pendiente.

Actividades:**1. Retomando la actividad anterior: Fórmula de la Pendiente (30 minutos)**

a) El docente hace un repaso breve del concepto de pendiente tratado en la sesión 1.

b) Se introduce formalmente la fórmula de la pendiente usando las coordenadas de dos

puntos: $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

c) El docente propone diferentes ejemplos, dados dos puntos numéricos (Ej. (3,4) y

(6,10)), solicita a los estudiantes aplicar la fórmula para calcular el valor de la pendiente.

- d) Trazar la recta que une esos puntos en Geogebra, utilizar la herramienta “Pendiente” para obtener el valor en la aplicación y comparar con el valor calculado con la fórmula en el punto anterior.

IA para validar la conversión numérica → algebraico

- e) Después de calcular la pendiente con la fórmula y verificarla en GeoGebra, el estudiante explica con sus palabras (escrito corto) cómo paso de los puntos a la pendiente.
- f) Luego revisará su explicación con la IA. Para ello ingresará a: <https://chatgpt.com/> y escribirá el siguiente prompt: “Analiza mi explicación. ¿Estoy explicando correctamente cómo paso de los puntos a la ecuación? Dime si falta justificar algún paso.”

2. La Pendiente en la Ecuación de la Recta: $y = mx + b$ (35 minutos)

- a) Se presenta la ecuación de la recta: $y = mx + b$ señalando la relación entre la pendiente y el intercepto.
- b) El estudiante deberá introducir en la barra de entrada de la vista algebraica de Geogebra la ecuación $y = mx + b$ y observar lo que sucede en la vista gráfica.
- c) Pedir a los estudiantes que utilizando la herramienta deslizador, generen uno para la variable m y uno para la variable b .
- d) Manipular el deslizador de m y observar cómo cambia la inclinación de la recta, analizando si los cambios hacen que este más o menos inclinada, sube o baja. Discutir cómo el valor de m determina visualmente la naturaleza de la recta.
- e) Manipular ahora el deslizador de b . Analizar el desplazamiento vertical y enfatizar en que no hay cambios en la inclinación de la recta. Propiciar que los estudiantes intuitivamente identifiquen que ' b '. representa el intercepto con el eje y .
- f) Proponer ejercicios de ejemplo:
- A partir de la ecuación $y = 4x - 3$, identificar los valores de m y b , graficar en GeoGebra y verificar utilizando la herramienta pendiente.
 - Dada una gráfica en GeoGebra, identificar m y b y escribir la ecuación.

IA para identificar errores conceptuales

- g) Pedir al estudiante que explique con sus palabras qué representa m y qué representa b en la ecuación $y = mx + b$, redactando un texto corto.

- h) El estudiante solicitará a la IA que revise su explicación utilizando el siguiente prompt:
 “Revisa mi explicación sobre m y b. Si hay un error, dime en qué parte está, pero NO lo corrijas.”

En caso de necesitar ajustes, el estudiante corregirá y verificará nuevamente su respuesta.

3. Construyendo rectas: Pasar del Contexto a la Ecuación (35 minutos)

- a) El docente propone problemas sencillos en forma verbal donde la pendiente y el intercepto se pueden inferir. Por ejemplo:

"Una empresa de alquiler de bicicletas cobra un costo fijo de \$5.000 y \$2.000 por cada hora de uso. Si y es el costo total y x son las horas, escribir una ecuación que sirva para modelar la situación. ¿Cuál es la pendiente y qué significa?"

"Un tanque de agua tiene 500 litros y se vacía a razón de 10 litros por minuto. Escribir la ecuación que represente la cantidad de agua en el tanque (y) en función del tiempo (x). ¿Cuál es la pendiente y qué representa?"

- b) Solicitar a los estudiantes que propongan una ecuación que permita solucionar cada problema y realice la gráfica en GeoGebra para visualizar el comportamiento.

IA para estructurar y corregir la explicación del modelo matemático

- c) Después de resolver el problema contextual, el estudiante explica de forma escrita qué significa la pendiente en ese contexto.
- d) El estudiante pide a la IA que revise si tu interpretación es correcta utilizando el siguiente prompt: “Lee mi interpretación de la pendiente en este problema. ¿La estoy relacionando correctamente con el contexto?”

Recursos Didácticos:

Proyector o tablero interactivo (televisor).

Computadores/tabletas con acceso a GeoGebra (descargado o versión web) y

<https://chatgpt.com/>.

Guías de trabajo con ejercicios de cálculo de pendientes y escritura de ecuaciones.

Hojas cuadriculadas (para apoyo visual si es necesario).

Evaluación Interactiva en Geogebra: (20 minutos) Se pide a los estudiantes ingresar a la evaluación a través del siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/m/zzyxcz83#material/frgajdau>

Se entrega una hoja de papel a cada estudiante donde debe registrar las operaciones, procedimientos o ideas que utilizó para llegar a la respuesta.

Observación directa: Registro de desempeño y observaciones relevante en el diario de campo.

Rúbrica: Se analiza el desempeño del estudiante desde el punto de vista semiótico en el uso de los RRSS de la función lineal y la estructura mental evidenciada el desarrollo de las actividades

Sesión 3: Modelado matemático de la pendiente y aplicación en problemas reales

Duración: 120 minutos

Contenido a abordar: En esta última sesión se espera que el estudiante aplique el concepto de pendiente para identificar propiedades geométricas de las rectas como el paralelismo y perpendicularidad. También se proponen problemas en contextos variados que pueden ser resueltos con un modelo de función lineal, integrando todas las representaciones semióticas del concepto matemático.

Actividades

1. Pendiente en rectas paralelas y perpendiculares (25 minutos)

- a) **Rectas Paralelas:** Solicitar a los estudiantes que tracen una recta cualquiera en GeoGebra. Pedir que tracen otra recta paralela a la primera usando la herramienta "Recta paralela". Medir la pendiente de ambas rectas utilizando la herramienta "Pendiente". Plantear la siguiente pregunta: "¿Qué observan sobre las pendientes de las rectas paralelas?". Se busca que los estudiantes desde la observación identifiquen que las pendientes de ambas rectas tienen el mismo valor. $m_1 = m_2$
- b) **Rectas Perpendiculares:** Realizar el mismo proceso anterior con rectas perpendiculares utilizando la herramienta "Recta perpendicular". Medir las pendientes con

la herramienta “Pendiente”. Orientar a los estudiantes para que el producto de las pendientes de rectas perpendiculares es $m_1 * m_2 = -1$.

c) Proponer otros ejercicios sencillos: dados dos pares de puntos, determinar si las rectas que los unen son paralelas, perpendiculares o ninguna, aplicando el producto de pendientes.

IA para justificar paralelismo y perpendicularidad

- d) El estudiante escribirá una explicación de por qué dos rectas son paralelas o perpendiculares usando el concepto de pendiente.
- e) Luego revisará esta explicación con la IA utilizando el siguiente prompt: “Revisa mi justificación. ¿Es suficiente para demostrar que las rectas son paralelas o perpendiculares?”.

2. Reto: Proponiendo modelos con pendientes (60 minutos)

Se divide a los estudiantes en grupos de dos o tres. Se asigna a cada grupo alguno de los siguientes escenarios para ser modelado por una recta:

- Crecimiento de una planta: altura vs. días.
- Consumo de gasolina de un vehículo: litros en el tanque vs. kilómetros recorridos.
- Costo de un servicio de internet: costo mensual vs. velocidad contratada.
- Temperatura de un objeto enfriándose: temperatura vs. tiempo.

Actividades grupales para desarrollar:

- a) Lectura del problema: aplicación del registro verbal.
- b) Identificar los datos y el tipo de relación por ejemplo crecimiento, decrecimiento, variación constante.
- c) Determinar la pendiente y el intercepto: aplicación del registro numérico.
- d) Escribir la ecuación de la recta que modela la situación. Aplicación del registro algebraico.
- e) Graficar la recta en GeoGebra para visualizarla: aplicación del registro gráfico.

IA durante el trabajo grupal de modelación

- f) Interpretar el significado de la pendiente en el contexto del problema y escribir una explicación corta que puedan exponer a sus compañeros.

g) Antes de exponer, cada grupo debe revisar su explicación con la IA para asegurarse de que sea clara y coherente. Para ello utilizarán el siguiente prompt: “Revisa nuestro modelo matemático. ¿La ecuación, la gráfica y la explicación son coherentes entre sí?”

h) Exponer sus hallazgos al resto de la clase, explicando el proceso que aplicaron en la solución.

3. Reflexión final: Pendientes en el mundo real (15 minutos)

El docente propicia una discusión grupal si es posible de tipo mesa redonda en torno a las siguientes preguntas:

- ¿En qué situaciones de la vida real es útil conocer el concepto de pendiente?
- ¿Cómo les ayudó GeoGebra a entender qué es la pendiente?
- ¿Cuál es la forma más fácil o difícil (gráfica, numérica, verbal, ecuación algebraica) para representar una función lineal y por qué?”.

Recursos Didácticos:

Proyector o tablero interactivo (televisor).

Computadores/tabletas con acceso a GeoGebra (descargado o versión web) y

<https://chatgpt.com/>.

Guías de trabajo con los escenarios de problemas para cada grupo.

Evaluación Interactiva en Geogebra (Grupal): (20 minutos).

Se pide a los estudiantes ingresar a la evaluación a través del siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/m/zzyxcz83#material/hgvu7x6r>

Se trabajará una evaluación de tipo grupal en los mismos grupos organizados anteriormente.

El docente hace entrega de una hoja de papel a cada grupo donde deben registrar las operaciones, procedimientos o ideas que utilizó para llegar a la respuesta.

Observación directa: Registro de desempeño y observaciones relevante en el diario de campo.

Rúbrica: Se analiza el desempeño del estudiante desde el punto de vista semiótico en el uso de los RRSS de la función lineal y la estructura mental evidenciada el desarrollo de las actividades.

Rúbrica de Evaluación de la Secuencia Didáctica

Esta rúbrica captura la evolución semiótico-cognitiva sesión a sesión, no solo el resultado de las actividades. Cada criterio corresponde a una categoría TRRS y a un rango de estructuras mentales APOE esperadas o emergentes en esa sesión.

Escala de Valoración (aplica a las tres sesiones)

Nivel	Puntaje	Rango	Descripción cualitativa
Superior	4	90–100 %	Demuestra comprensión articulada del criterio sin errores conceptuales significativos. Evidencia de estructura mental O o E: puede operar sobre la función como entidad o coordinar registros con autonomía estratégica.
Alto	3	75–89 %	Comprensión adecuada con errores menores no conceptuales. Evidencia de transición A→P o consolidación de la estructura mental P: anticipa, puede invertir el proceso, articula globalmente.
Básico	2	55–74 %	Comprensión parcial. Avanza con orientación. Evidencia de estructura mental A consolidada con indicios esporádicos de P: ejecuta procedimientos pero no puede anticipar ni generalizar.
Bajo	1	0–54 %	No alcanza el criterio. Requiere refuerzo específico. Evidencia de estructura mental A sin indicios de interiorización: depende de instrucción explícita para cada paso.

Instrucciones de Uso

Cada rúbrica integra los tres instrumentos señalados en la secuencia didáctica correspondiente: Evaluación interactiva en GeoGebra se registra el porcentaje obtenido en el applet de cada sesión, observación directa el docente registra lo observado mientras circula durante las actividades en el diario de campo y rúbrica de evaluación que analiza el alcance de indicadores específicos y observables de cada sesión.

Rúbrica Analítica Sesión 1: Exploración gráfica y noción de inclinación

Objetivo analítico de la sesión: Identificar si los estudiantes construyen un vínculo genuino entre el número m y la percepción visual de la inclinación, o solo memorizan la regla m positivo = sube. Documentar la modalidad de uso de GeoGebra (C3a/b/c) y los primeros usos del registro verbal matemático (C4).

Categoría TRRS–APOE	Actividad / criterio evaluado	Superior (4) Estructura mental P/O emergente	Alto (3) Transición A→P	Básico (2) Estructura mental A consolidada	Bajo (1) Estructura mental A sin indicios de avance	Pts 1–4
C1 Conversión entre registros	Gráfico → Verbal: descripción de la dirección e inclinación de rectas (ascendente, descendente, horizontal, casi vertical) usando vocabulario matemático. Cuantificación de Δy y Δx en la cuadrícula.	Describe todos los tipos de rectas con vocabulario preciso (pendiente, inclinación, tasa de cambio). Cuantifica Δy y Δx correctamente.	Describe la mayoría de las rectas. Un error en casos límite (horizontal o casi vertical). Cuantificación con imprecisión menor.	Describe rectas ascendentes y descendentes. Dificultad con horizontales o verticales. Cuantificación imprecisa.	No puede describir la dirección con intención. No cuantifica las variaciones.	
C2 Tratamiento dentro del registro	Cálculo de $m = \Delta y/\Delta x$ desde rectas trazadas en GeoGebra (Act. 3). Incluye casos con pendiente positiva,	Calcula correctamente todas las pendientes, incluyendo	Calcula la mayoría de las pendientes. Uno o dos errores de	Aplica la fórmula pero invierte $\Delta y/\Delta x$ o comete errores frecuentes de	No aplica la fórmula correctamente. No establece relación entre	

	negativa, cero e indefinida.	valores negativos. Distingue los cuatro casos. Verifica en GeoGebra con resultados coincidentes.	signo o aritméticos. Verifica en GeoGebra.	signo. Verifica en GeoGebra sin analizar diferencias.	el cálculo manual y el resultado de GeoGebra.
C3 Coordinación mediada por GeoGebra	Modalidad de uso del applet del ciclista y GeoGebra Classic (Act. 1 y 2): ¿verifica (C3a) o anticipa y formula conjeturas (C3b)?	Manipula el deslizador m anticipando el efecto antes de moverlo. Usa GeoGebra para formular conjeturas (explorador, C3b). Verbaliza la relación número-inclinación.	Manipula el deslizador y describe el efecto correctamente. Usa GeoGebra como verificador (C3a). Vocabulario mixto.	Manipula el deslizador pero describe solo el resultado visual sin conectarlo con el valor de m. Vocabulario exclusivamente cotidiano.	No manipula el deslizador con intención. No establece relación entre m y la inclinación visible.
C4 Registro verbal como articulador	Explicación escrita de la inclinación revisada con IA (Act. 4–5): versión inicial vs. versión revisada con sugerencias de la IA.	La versión final usa términos precisos (pendiente, tasa de cambio, inclinación) y distingue rectas ascendentes de descendentes. La IA confirma claridad o el	Incorpora la mayoría de las sugerencias de la IA. La versión final es coherente con una imprecisión terminológica menor.	Incorpora solo algunas sugerencias. La versión final mejora respecto a la inicial pero persisten imprecisiones.	No usa las sugerencias de la IA efectivamente. La versión final no muestra mejoras significativas. No incorpora

		estudiante corrige el error señalado.			vocabulario matemático.
C5 Metacognición semiótica	No se evalúa con actividad específica en S1. Se registra en el diario de campo (I2) si el estudiante comenta espontáneamente en qué registro tiene dificultad.	El estudiante comenta espontáneamente y con precisión en qué tipo de conversión tiene dificultad (indicador temprano de estructura mental O/E).	El estudiante hace algún comentario general sobre su dificultad sin vincularlo a un registro específico.	El estudiante solo responde a preguntas directas del docente sobre sus dificultades.	Sin evidencia de autoconciencia sobre el propio proceso. No emerge en el diario.

Puntaje máximo por sesión: 20 pts (5 criterios × 4). El puntaje es una señal analítica que orienta la búsqueda de patrones en el diario de campo (I2); no se usa como nota.

Rúbrica Analítica Sesión 2: De los puntos a la ecuación formal de la recta

Objetivo analítico de la sesión: Documentar si los estudiantes interiorizan la fórmula de m como proceso (razón de cambio) o la usan como algoritmo mecánico. Verificar si la modelación verbal → algebraico (conversión no congruente de alta dificultad) evidencia avance.

Categoría TRRS–APOE	Actividad / criterio evaluado	Superior (4) Estructura mental P/O emergente	Alto (3) Transición A→P	Básico (2) Estructura mental A consolidada	Bajo (1) Estructura mental A sin indicios de avance	Pts 1–4
----------------------------	--------------------------------------	---	--------------------------------	---	--	----------------

C1 Conversión entre registros	Dos criterios: (a) Algebraico \leftrightarrow Gráfico con deslizadores (Act. 2): efecto de m y b . (b) Verbal \rightarrow Algebraico: modelación contextual bicicletas y tanque (Act. 3).	(a) Identifica con precisión el efecto de m (inclinación) y de b (desplazamiento vertical). Lee m y b desde gráfica y escribe la ecuación. (b) Identifica correctamente m y b desde el enunciado, escribe la ecuación con el signo correcto y explica el significado de m en contexto.	(a) Identifica m y b con un error menor en la lectura de b o el signo. (b) Formula la ecuación con un error menor. Explicación contextual de m adecuada.	(a) Identifica el efecto de m pero confunde el de b . Escribe la ecuación con errores en m o b . (b) Construye la ecuación de al menos uno de los problemas con errores en el signo.	(a) No diferencia el efecto de m del de b . No puede leer m ni b desde la gráfica. (b) No logra formular la ecuación desde el enunciado verbal. No identifica cuál valor es m y cuál es b .
C2 tratamiento dentro del registro	Cálculo de $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ desde dos puntos con verificación Numérico \rightarrow Algebraico \rightarrow Gráfico (Act. 1). Incluye valores negativos.	Aplica $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ sin errores en todos los ejercicios, incluyendo valores negativos. Distingue el orden correcto de los puntos. Traza y verifica en GeoGebra con resultados coincidentes.	Aplica la fórmula correctamente en la mayoría. Uno o dos errores de signo o aritmética. Traza y verifica en GeoGebra.	Invierte numerador/denominador o no respeta el orden de los puntos. Verifica en GeoGebra sin analizar diferencias.	No aplica correctamente la fórmula. No logra trazar la recta coherentemente en GeoGebra ni verificar el resultado.

C3 Coordinación mediada por GeoGebra	Uso del deslizador para explorar el efecto de m y b (Act. 2). Verificación bidireccional Algebraico ↔ Gráfico: ¿la coordinación es verificadora o exploradora?	Anticipa el efecto del deslizador antes de moverlo. Usa GeoGebra para explorar casos no propuestos (explorador, C3b). Identifica visualmente m y b sin calcular.	Usa GeoGebra como verificador (C3a): mueve el deslizador y confirma su cálculo. Describe el efecto con vocabulario matemático.	Usa GeoGebra pero no articula lo que ve con los valores algebraicos de m y b. Descripción principalmente visual.	No establece relación entre la posición del deslizador y el valor numérico del parámetro. No verifica con intención.
C4 Registro verbal como articulador	Explicación escrita de la conversión Numérico → Algebraico mediada por IA (Act. 1): ¿articula los registros o describe el procedimiento mecánicamente?	Explica con claridad y precisión los pasos de la conversión del registro numérico al algebraico. La IA confirma la claridad o el estudiante corrige el error señalado. Versión final usa lenguaje matemático correcto.	La explicación es adecuada con uno o dos pasos poco justificados. La IA señala la omisión y el estudiante la corrige satisfactoriamente.	La explicación describe el procedimiento mecánicamente sin articular los registros. La IA señala varias mejoras que el estudiante incorpora solo parcialmente.	La explicación no refleja comprensión de la conversión entre registros. La IA señala múltiples problemas que el estudiante no logra corregir.
C5 Metacognición semiótica	No se evalúa con actividad específica en S2. Se registra en el diario de campo (I2) si emergen indicios de autoconciencia sobre	El estudiante identifica espontáneamente qué conversión le resultó más difícil y por qué, sin que	El estudiante hace alguna observación sobre su proceso cuando el docente	El estudiante reconoce que tuvo dificultad pero no puede especificar en qué registro ni por qué.	Sin evidencia de autoconciencia. No emerge en el diario ni

dificultades propias durante el trabajo con los deslizadores o la modelación.	el docente lo pregunte (indicador de estructura mental O/E emergente).	pregunta indirectamente.	ante preguntas indirectas.
---	--	--------------------------	----------------------------

Puntaje máximo por sesión: 20 pts (5 criterios \times 4). El puntaje es una señal analítica que orienta la búsqueda de patrones en el diario de campo (I2); no se usa como nota.

Rúbrica Analítica Sesión 3: Modelado matemático y ciclo completo de registros

Objetivo analítico de la sesión: Identificar las primeras evidencias de estructura mental O (función como entidad: paralelismo como propiedad de los objetos-función) y documentar si la comprensión construida con GeoGebra se sostiene sin él. Observar la metacognición semiótica (C5) en la reflexión final.

Categoría TRRS–APOE	Actividad / criterio evaluado	Superior (4) Estructura mental P/O emergente	Alto (3) Transición A→P	Básico (2) Estructura mental A consolidada	Bajo (1) Estructura mental A sin indicios de avance	Pts 1–4
C1 Conversión entre registros	Dos criterios: (a) Ciclo completo grupal Verbal \rightarrow Numérico \rightarrow Algebraico \rightarrow Gráfico (Act. 2). (b) Paralelismo y perpendicularidad: Gráfico	(a) El grupo completa el ciclo completo sin errores: lee el enunciado, determina m y b, escribe la	(a) El grupo completa el modelo con todos los elementos requeridos con un error menor.	(a) El grupo construye la ecuación o la gráfica pero no completa el ciclo. La explicación no conecta todos los	(a) El grupo no logra formular la ecuación que modela la situación. El ciclo está	

	→ Numérico → Algebraico (Act. 1).	ecuación, grafica con escala adecuada y la IA confirma coherencia. Exposición clara. (b) Traza rectas paralelas y perpendiculares en GeoGebra, verifica $m_1 = m_2$ y $m_1 \times m_2 = -1$, justifica algebraicamente. La IA confirma que articula los registros.	La explicación es adecuada y la IA señala una imprecisión que se corrige. (b) Verifica el paralelismo y la perpendicularidad en GeoGebra y calcula el producto de pendientes con un error aritmético menor.	registros. (b) Identifica visualmente el paralelismo pero la justificación algebraica es incompleta.	incompleto. (b) No establece la relación entre pendientes iguales y paralelismo. No puede justificar la propiedad.
C2 Tratamiento dentro del registro	Verificación algebraica del paralelismo ($m_1 = m_2$) y la perpendicularidad ($m_1 \times m_2 = -1$) desde pares de puntos y desde ecuaciones dadas (Act. 1).	Calcula m_1 y m_2 desde pares de puntos sin errores. Verifica el producto $m_1 \times m_2 = -1$ para perpendicularidad. Resuelve correctamente todos los	Calcula correctamente la mayoría de los pares de pendientes. Un error aritmético menor en el producto $m_1 \times m_2$. Resuelve la mayoría de los	Calcula m_1 y m_2 pero comete errores frecuentes de signo. Calcula $m_1 \times m_2$ incorrectamente. No completa todos los ejercicios adicionales.	No puede calcular m_1 ni m_2 desde pares de puntos. No entiende la relación entre el producto de pendientes y la perpendicularidad.

C3 Coordinación mediada por GeoGebra	GeoGebra como andamiaje en transición (C3c): ¿el estudiante puede coordinar registros sin GeoGebra en la prueba final? Se documenta si la coordinación se sostiene cuando el software no está disponible.	ejercicios adicionales. Completa las actividades de paralelismo y perpendicularidad con GeoGebra y puede anticipar resultados. En la exposición grupal, coordina registros verbales y algebraicos sin depender del software.	ejercicios adicionales. Usa GeoGebra para verificar pero puede explicar las relaciones algebraicas sin el software cuando se le pregunta directamente.	Depende de GeoGebra para cualquier afirmación sobre paralelismo o perpendicularidad. Sin el software, no puede justificar las relaciones.	No logra usar GeoGebra con intención para verificar paralelismo o perpendicularidad. La coordinación no se ha consolidado ni con el software.
C4 Registro verbal como articulador	Interpretación oral de m y b en contexto: exposición grupal del modelo (Act. 2). ¿El grupo explica el significado de m (tasa de cambio con unidades) y de b (valor inicial) en el escenario asignado?	El grupo explica con precisión qué representa m (tasa de cambio con sus unidades) y b (valor inicial o fijo) en el contexto del escenario. Responde preguntas del grupo correctamente.	El grupo explica el significado de m en su contexto correctamente pero la diferenciación con b es parcial o usa lenguaje impreciso.	El grupo menciona que m es “la tasa de cambio” de forma genérica sin relacionarlo con las unidades o el contexto del escenario asignado.	El grupo no establece interpretación del significado de m o de b en el contexto. La exposición no menciona los parámetros.

C5 Metacognición semiótica	Conversación de cierre documentada (I4, mesa redonda, últimos 15 min): tres preguntas sobre qué registro resultó más difícil, cómo ayudó GeoGebra y qué aprendió que antes no sabía.	Participa activamente respondiendo las tres preguntas con argumentos concretos vinculados a las actividades. Identifica el registro más difícil con un ejemplo de las sesiones. Menciona cómo GeoGebra apoyó su comprensión. (Indicador de estructura mental O/E)	Participa respondiendo al menos dos preguntas con argumentos coherentes. Identifica el registro más difícil con justificación general.	Participa con respuestas cortas. Identifica el registro más difícil sin justificarlo con referencias a las actividades.	No participa activamente o sus intervenciones no tienen relación con las preguntas sobre registros semióticos o GeoGebra.
----------------------------------	--	---	--	---	---

Puntaje máximo por sesión: 20 pts (5 criterios \times 4). El puntaje es una señal analítica que orienta la búsqueda de patrones en el diario de campo (I2); no se usa como nota.

Apéndice C

Evaluación Final

Centro de Educación El Recreo Grado Noveno

Prueba Final

Funciones Lineales, Registros de Representación Semiótica (TRRS, Duval), APOE

DATOS DEL ESTUDIANTE	
Nombre completo:	
Fecha:	Tiempo: 90 minutos

OBJETIVO
Evaluar los aprendizajes alcanzados tras la intervención pedagógica basada en la TRRS (Duval) y GeoGebra, verificando el avance en cada habilidad evaluada en la prueba diagnóstica: (1) relación pendiente - inclinación, (2) cálculo de m desde puntos, (3) lectura de gráficas, (4) cadena de conversiones algebraico \rightarrow tabular \rightarrow gráfico, (5) modelación verbal \rightarrow algebraico, más las habilidades nuevas trabajadas en la Sesión 3: (6) rectas paralelas y (7) ciclo completo de registros con transferencia autónoma.

INSTRUCCIONES

1. Lee cada pregunta con atención antes de responder.
2. En las preguntas de selección múltiple, marca con una X la única opción correcta.
3. En las preguntas abiertas, muestra todos los procedimientos. Las respuestas sin procedimiento no serán valoradas.
4. No se permite el uso de calculadora ni de dispositivos electrónicos.
5. Tiempo: 90 minutos. Trabaja de forma individual.

Pregunta 1. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa una función lineal de la forma $y = mx + b$?	
A)	$y = x^2 + 2x$
B)	$y = 4$
C)	$y = 3/x$
D)	$y = \sqrt{x + 1}$

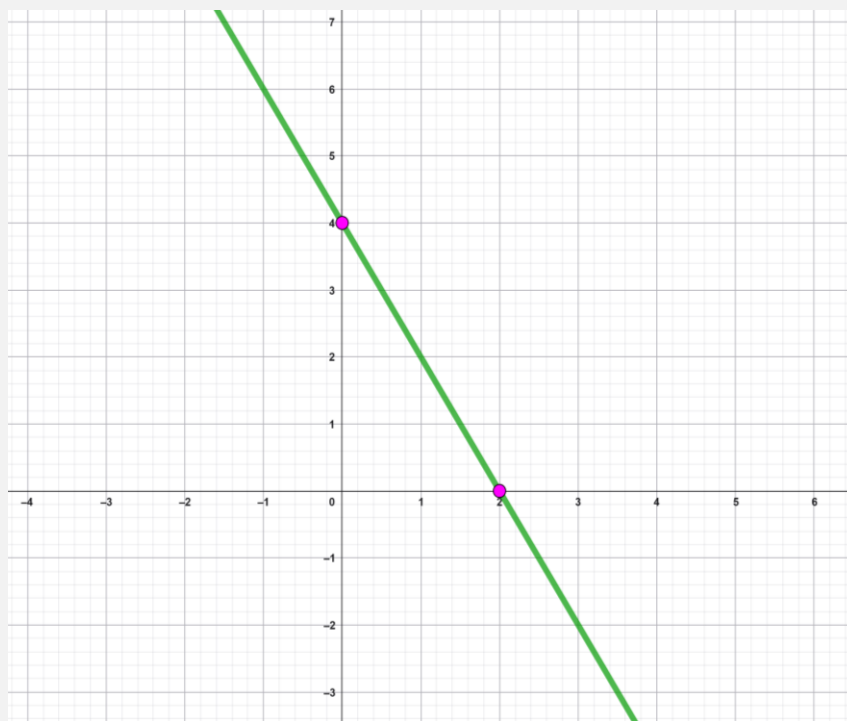
Pregunta 2. En GeoGebra escribe la función $y = mx + b$ usando deslizadores para los parámetros m y b . Si mantienes $b = 3$ fijo y mueves el deslizador de m de 1 a 4, ¿Qué ocurre con la gráfica de la función?
--

A)	La recta se desplaza hacia arriba sin cambiar su inclinación.
B)	La recta se vuelve más inclinada (más empinada) y continúa pasando por el mismo punto en el eje y.
C)	La recta se vuelve más plana y tiende a ser horizontal.
D)	La recta se desplaza hacia la derecha manteniendo la misma inclinación.

Pregunta 3. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos C $(-1, 7)$ y D $(3, -1)$.
¿Cuál es el valor correcto?

A)	$m = 2$
B)	$m = -2$
C)	$m = \frac{1}{2}$
D)	$m = -\frac{1}{2}$

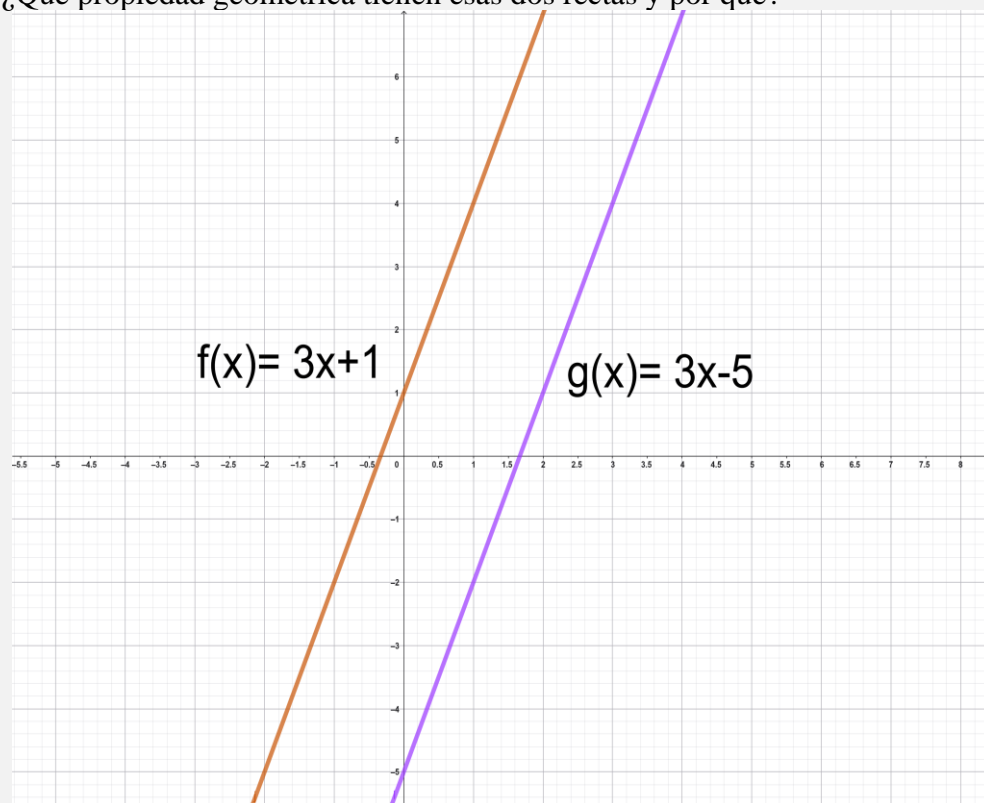
Pregunta 4. ¿Cuál es la ecuación algebraica que representa la siguiente gráfica?



A)	$y = 2x + 4$
B)	$y = -2x - 4$
C)	$y = -2x + 4$

D)	$y = 4x - 2$
----	--------------

Pregunta 5. Analiza las funciones $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = 3x - 5$ en la siguiente grafica. ¿Qué propiedad geométrica tienen esas dos rectas y por qué?



A)	Son perpendiculares, porque el producto de sus pendientes es -1 .
----	---

B)	Son paralelas, porque tienen la misma pendiente ($m = 3$).
----	--

C)	Se cortan en el punto $(0, 1)$, porque tienen el mismo intercepto.
----	---

D)	Son la misma recta, porque tienen la misma pendiente.
----	---

Pregunta 6. Dada la función $f(x) = -2x + 4$:

- Calcula los valores de $f(x)$ para $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y organízalos en una tabla.
- Traza la gráfica en la hoja cuadrículada, rotula los ejes e identifica el punto donde la recta corta el eje y .
- Escribe qué le ocurre al valor de y a medida que x aumenta y explica a qué se debe eso.

Pregunta 7. Un tanque de agua contiene 500 litros y se vacía a razón de 10 litros por minuto.

- Escribe la función que modela la cantidad de agua Q (en litros) en el tanque según el tiempo t (en minutos).
- Identifica la pendiente y el intercepto e indica qué representa cada uno en esta situación.
- Construye una tabla con los valores para $t = 0, 10, 20, 30$ y 40 minutos.
- Traza la gráfica en la hoja cuadriculada y determina algebraicamente en qué momento el tanque quedará vacío.

Pregunta 8. Elige uno de los siguientes escenarios (el que más te llame la atención) y construye un modelo matemático completo:

- crecimiento de una planta en función de los días
- consumo de gasolina de un vehículo según los kilómetros recorridos
- temperatura de una bebida caliente que se enfría con el tiempo.

Escribe en tus propias palabras el enunciado del problema con los datos que asumas. Escribe la función lineal que lo modela e identifica m y b con su significado en el contexto. Construye una tabla con cinco valores. Traza la gráfica en la hoja cuadriculada con ejes rotulados. Responde una pregunta concreta que tú mismo formules.

Rúbrica de la Prueba Final

Categoría TRRS-APOE	Actividad / criterio evaluado	Superior (4) Estructura mental P/O emergente	Alto (3) Transición A→P	Básico (2) Estructura mental A consolidada	Bajo (1) Estructura mental A sin indicios de avance	Pts 1-4
C1 Conversión entre registros	PF2, PF4, PF6, PF7, PF8	<p>PF2: Describe con precisión el efecto de m según su signo y magnitud; anticipa el deslizador. PF4: Lee m y b desde la gráfica con pendiente negativa y escribe la ecuación. PF6: Cadena Algebraico → Tabular → Gráfico → Verbal sin errores, describe la pendiente negativa como razón de disminución. PF7: Ciclo completo Verbal → Algebraico → Tabular → Gráfico con m negativa; determina algebraicamente cuándo el tanque</p>	<p>Realiza correctamente la mayoría de las conversiones con uno o dos errores menores (ej. escala de la gráfica o signo de m en pendiente negativa). El ciclo de PF8 es casi completo con una conversión débil.</p>	<p>Realiza las conversiones congruentes (PF2, PF4) pero muestra dificultad con las no congruentes (PF7) o con la cadena completa (PF6). El ciclo de PF8 está incompleto.</p>	<p>No logra completar las conversiones no congruentes. El ciclo de PF6 o PF7 está incompleto. No produce el ciclo autónomo de PF8.</p>	

		quede vacío. PF8: Ciclo completo autónomo en escenario nuevo elegido por el estudiante, sin GeoGebra.			
C2 Tratamiento dentro del registro	PF3, PF5	PF3: Aplica $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ correctamente con valores negativos, sin errores de signo. PF5: Identifica y justifica algebraicamente el paralelismo ($m_1=m_2$) y lo diferencia del caso en que las rectas son la misma ($m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$).	PF3: Calcula m correctamente en la mayoría de los casos; errores de signo ocasionales. PF5: Identifica el paralelismo correctamente pero la justificación algebraica es incompleta.	PF3: Aplica la fórmula pero invierte numerador/denominador o comete errores frecuentes de signo. PF5: Reconoce que las rectas son paralelas sin justificar con las pendientes.	PF3: No logra calcular la pendiente desde coordenadas de puntos dados. PF5: No establece relación entre pendientes iguales y paralelismo.
C3 Coordinación mediada por GeoGebra	PF2, PF8	PF2: Anticipa correctamente el efecto del deslizador de m en GeoGebra para un escenario no visto (transferencia). PF8: Produce el ciclo completo autónomo sin GeoGebra, lo que	PF2: Describe el efecto del deslizador con un error menor en casos límite ($m = 0$ o m muy grande). PF8: Produce la mayoría del ciclo sin GeoGebra pero necesita el software	PF2: Asocia m positiva con recta ascendente pero no distingue $m = 0$ ni m negativa con claridad. PF8: Solo puede completar el ciclo con apoyo de GeoGebra.	No establece relación coherente entre el valor de m y la dirección de la recta. No puede coordinar registros sin GeoGebra.

		confirma que la coordinación se sostiene sin la herramienta (superación de C3c).	para verificar algún paso.		
C4 Registro verbal como articulador	PF6, PF7	PF6: Descripción verbal coherente que explica la pendiente negativa como razón de disminución de y cuando x aumenta. PF7: Interpretación contextual de m (tasa de cambio con unidades) y b (valor inicial) con precisión. Calcula algebraicamente cuándo el tanque queda vacío.	PF6: La descripción verbal es adecuada pero no explica la pendiente negativa con precisión. PF7: La interpretación contextual de m es adecuada pero la diferenciación con b es imprecisa o el cálculo final tiene un error menor.	PF6: Construye tabla y gráfica correctamente pero no produce descripción verbal. PF7: Confunde m y b al leer el enunciado pero propone una función con estructura válida.	PF6: No logra completar la cadena de conversiones. PF7: No logra formular la función que modela la situación verbal.
C5 Metacognición semiótica	PF8	PF8: El estudiante elige un escenario nuevo, formula una pregunta concreta con cálculo algebraico y produce el ciclo completo con autonomía sin GeoGebra. Este nivel de transferencia autónoma es el	PF8: El ciclo es casi completo con una conversión débil (ej. la descripción verbal o la escala de la gráfica). La pregunta planteada es imprecisa pero relacionada con el modelo.	PF8: Produce algunos registros pero el ciclo está incompleto o hay inconsistencias entre ellos. No formula una pregunta concreta con cálculo.	PF8: No logra producir autónomamente un modelo con ciclo completo de registros en un escenario nuevo.

indicador más sólido
de estructura mental
O/E: el estudiante
opera sobre la
función como
entidad.

Uso del instrumento: la estructura mental APOE (A/P/O/E) se asigna por categoría considerando el patrón predominante entre los ítems que la cubren. La comparación entre la estructura mental de la diagnóstica y la de la prueba final, categoría por categoría, constituye el análisis comparativo central del Objetivo Específico 3. Los ítems PF5 y PF8 son habilidades nuevas no evaluadas en la diagnóstica; se leen solo en la prueba final.

Tabla de trazabilidad prueba diagnóstica → secuencias → prueba final

Esta tabla garantiza la coherencia vertical de la evaluación: cada habilidad evaluada en la diagnóstica es trabajada en una sesión específica y reevaluada en la prueba final con mayor nivel de exigencia.

Habilidad evaluada en la diagnóstica	Ítem Diagnostico	Sesión y actividad que la trabaja	Habilidad reevaluada en la final (con mayor exigencia)	Ítem final	Categoría TRRS
Efecto de m en la inclinación (Gráfico ↔ Verbal)	P1	S1 Act. 1–2 (applet ciclista + trazado libre)	Efecto de m al mover deslizador en GeoGebra: gráfico → verbal (escenario no visto)	PF2	C1a/b, C3
Calcular m desde dos puntos (Numérico → Algebraico)	P2	S1 Act. 3 ($m=\Delta y/\Delta x$) y S2 Act. 1 (fórmula formal)	Calcular m con coordenadas negativas	PF3	C2
Leer m y b desde una gráfica (Gráfico → Algebraico)	P3	S2 Act. 2 (deslizadores y lectura bidireccional)	Leer m y b con pendiente negativa y escribir la ecuación	PF4	C1b
Construir tabla y gráfica desde ecuación (Alg. → Tab. → Graf.)	P4	S2 Act. 1–2 (ciclo bidireccional con GeoGebra)	Ciclo completo con descripción verbal del comportamiento de la pendiente negativa	PF6	C1, C4
Modelar situación verbal con función	P5	S2 Act. 3 y S3 Act. 2 (bicicletas, tanque, reto grupal)	Modelar ciclo completo con pregunta contextual concreta	PF7	C1b

lineal (Verbal → Alg.)						
(No trabajado en prueba diagnóstica)	—	S3 Act. 1 (rectas paralelas: $m_1=m_2$)	Identificar paralelismo desde ecuaciones algebraicas		PF5	C1+C2
(Transferencia autónoma)	—	S3 Act. 2 (reto grupal: ciclo completo)	Ciclo completo autónomo en escenario nuevo elegido por el estudiante		PF8	C1b, C5

Matriz de seguimiento longitudinal por caso focal

Esta matriz integra los puntajes de las tres sesiones y permite rastrear la evolución de cada estudiante a lo largo de la intervención. Los puntajes no se usan como medida estadística sino como señales que orientan la búsqueda de patrones en el diario de campo (I2), la rúbrica de síntesis (I3) y las fuentes documentales analizadas dentro de esos instrumentos.

Categoría de análisis	Diagnóstica (perfil APOE)	Criterio S1	Puntos 1-4	Criterio S2	Puntos 1-4	Criterio S3	Puntos 1-4	Prueba final (perfil APOE)
	Estructura mental A/P/O/E	Sesión 1		Sesión 2		Sesión 3		Estructura mental A/P/O/E
C1 Conversión entre registros	A / P / O / E	Gráfico → Verbal: descripción de inclinación y		Númérico → Algebraico → Gráfico (bidireccional con deslizadores)		Ciclo completo: Verbal → Numérico → Algebraico → Gráfico. Paralelismo y		A / P / O / E

		dirección de rectas	. Verbal → Algebraico (modelación)	perpendicularidad	
C2 Tratamiento dentro del registro	A / P / O / E	Cálculo de $m = \Delta y / \Delta x$ desde rectas trazadas en GeoGebra	Cálculo de $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ desde dos puntos con valores negativos	Verificación algebraica de paralelismo ($m_1 = m_2$) y perpendicularidad ($m_1 \times m_2 = -1$)	A / P / O / E
C3 Coordinación mediada por GeoGebra	A / P / O / E	Modalidad de uso: verificador (C3a) o explorador (C3b) con applet del ciclista y rectas libres	Uso del deslizador para explorar efecto de m y b. Verificación bidireccional Algebraico ↔ Gráfico	GeoGebra como andamiaje (C3c): ¿se sostiene la coordinación sin la herramienta?	A / P / O / E
C4 Registro verbal como articulador	A / P / O / E	Explicación escrita de la inclinación revisada con IA (versión inicial vs. revisada)	Explicación de la conversión numérico → algebraico mediada por IA	Interpretación oral de m y b en contexto: exposición grupal del modelo	A / P / O / E
C5 Metacognición semiótica	A / P / O / E	No se evalúa en S1 (estructura	No se evalúa en S2 (se registra en	Conversación de cierre (I4, mesa redonda):	A / P / O / E

mental O/E
requerido; se
registra solo
si emerge
espontáneam
ente en el
diario)

diario si hay
indicios de
autoconcienc
ia sobre
dificultades)

identifica
registro difícil,
justifica con
ejemplos,
menciona rol de
GeoGebra

**PUNTAJE
TOTAL
POR
SESIÓN**

Nota sobre los puntajes: S1 y S3 evalúan 5 criterios (máx. 20 pts). S2 evalúa 4 criterios, C5 no aplica en S2 porque requiere estructura mental O/E, emergente solo en S3 (máx. 16 pts). C5 aparece en la diagnóstica y la prueba final solo como perfil APOE (A/P/O/E), no como puntaje. Los puntajes son señales analíticas que orientan la búsqueda de patrones en I2 e I3; no se suman para generar una nota.

Apéndice D*Formato Consentimiento informado para la institución educativa*

Cartagena, 16 febrero de 2026

Señor (a)

Jorge Guardo González
Coordinador Académico
Institución Educativa El Recreo
Ciudad

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación titulado “Procesos semióticos y construcción cognitiva en torno al aprendizaje de la función lineal: una investigación mediada por GeoGebra en noveno grado”, cuyo objetivo principal es “Analizar la evolución de los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos y las estructuras de construcción de pensamiento matemático (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) de los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, durante la implementación de secuencias didácticas mediadas por GeoGebra para el aprendizaje de la función lineal”. Este proyecto estará bajo la dirección de la Magister María Alejandra Solano Delgado, docente de la Escuela de Educación de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD y de aprobarse la presente solicitud se desarrollará en el grado noveno de la Institución Educativa.

Adjunto a la presente comunicación se describen las características principales de la investigación a desarrollar.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,

Víctor Luis Lora Carrasquilla

C.C. 1.052.084.173

Yenny Katherine Santamaría Medina

C.C. 63.557.046

Estudiantes de Maestría en Educación Matemática
Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD

Título del proyecto: Procesos semióticos y construcción cognitiva en torno al aprendizaje de la función lineal: una investigación mediada por GeoGebra en noveno grado.

Institución donde se realizará el estudio: Centro de Educación El Recreo, Cartagena – Bolívar

1. Presentación del estudio

Se espera desarrollar el proyecto de investigación titulado “Procesos semióticos y construcción cognitiva en torno al aprendizaje de la función lineal: una investigación mediada por GeoGebra en noveno grado.”, el cual se realiza como requisito académico del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD).

El estudio tiene como propósito analizar la evolución de los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos y las estructuras mentales de los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, durante la implementación de secuencias didácticas mediadas por GeoGebra para el aprendizaje de la función lineal.

2. Descripción de la participación de la institución

La participación de la institución educativa consistirá en:

- Autorizar la aplicación de una prueba diagnóstica y una prueba final a los estudiantes de grado noveno.
- Permitir la implementación de secuencias didácticas durante las clases regulares de matemáticas.
- Facilitar el uso de recursos institucionales (aula, sala de informática u otros espacios necesarios).
- Autorizar la recolección de producciones escritas y digitales de los estudiantes, con fines exclusivamente académicos.

La duración aproximada del estudio será de 12 semanas, distribuidas en sesiones de clase previamente acordadas con la institución.

3. Riesgos y beneficios

La investigación no implica riesgos físicos ni psicológicos para los estudiantes. Las actividades hacen parte del proceso regular de enseñanza de las matemáticas. Los beneficios esperados incluyen: Fortalecimiento de la comprensión de las funciones lineales, desarrollo del pensamiento

variacional, integración pedagógica de herramientas tecnológicas y aporte a la mejora de la práctica docente en el área de matemáticas.

4. Confidencialidad y uso de la información

La información recolectada será utilizada únicamente con fines académicos e investigativos. Se garantiza que en cumplimiento de la Ley 1581 de 2012 sobre protección de datos personales: Los nombres de los estudiantes y de la institución no serán divulgados en informes públicos, los resultados serán presentados de manera grupal y anónima, los datos serán tratados conforme a los principios éticos de la investigación educativa.

5. Carácter voluntario

La participación de la institución en este proyecto es voluntaria. La institución podrá retirar su autorización en cualquier momento, sin que ello genere consecuencias académicas o administrativas.

6. Declaración de consentimiento institucional

Habiendo sido informado(a) sobre los objetivos, metodología y alcances del estudio, la institución educativa:

AUTORIZA NO AUTORIZA

la realización del proyecto de investigación anteriormente descrito en la institución bajo su supervisión.

Nombre del directivo(a) o representante institucional:

Cargo:

Fecha:

Firma:

Apéndice E. Consentimiento informado padres de familia y/o acudientes

Consentimiento informado para padres de familia y/o acudientes

Cartagena, 16 febrero de 2026

Estimado padre de familia o acudiente:

Somos estudiantes del Programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD y nos encontramos llevando a cabo la investigación titulada: “Procesos semióticos y construcción cognitiva en torno al aprendizaje de la función lineal: una investigación mediada por GeoGebra en noveno grado”, cuyo objetivo principal es “Analizar la evolución de los procesos de conversión y tratamiento entre registros semióticos y las estructuras de construcción de pensamiento matemático (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) de los estudiantes de grado noveno del Centro de Educación El Recreo, durante la implementación de secuencias didácticas mediadas por GeoGebra para el aprendizaje de la función lineal”.

Por tanto, nos dirigimos respetuosamente solicitando su autorización para que su hijo participe en este proceso. Se desarrollarán una serie de actividades que constan de tres (3) sesiones de clase con una duración máxima de 120 minutos cada sesión, donde el estudiante desarrollará actividades de fortalecimiento de pensamiento variacional y algebraico. El proceso será estrictamente confidencial y ni su nombre ni el de su hijo (a) se verá afectado de ninguna manera; es decir su identidad será preservada confidencialmente.

Por otro lado, la participación o no participación en el desarrollo de esta investigación no afectará de ninguna manera la nota del estudiante. La participación es voluntaria. Usted y su hijo (a) tienen derecho de retirar el consentimiento para desistir en cualquier momento. El estudio no conlleva ningún riesgo. No recibirá ninguna compensación por participar. Si tiene alguna pregunta o desea ampliar información sobre esta investigación, se puede comunicar con los docentes investigadores a los siguientes correos: yllorac@unadvirtual.edu.co o yksantamariam@unadvirtual.edu.co

Si desea que su hijo participe, favor llenar la autorización y devolverla. Preguntas o dudas sobre los derechos de su hijo(a) pueden ser resueltas en cualquier momento.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,

Víctor Luis Lora Carrasquilla

C.C. 1.052.084.173

Yenny Katherine Santamaría Medina

C.C. 63.557.046

Estudiantes de Maestría en Educación Matemática
Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD

Declaración de consentimiento

Yo, _____ identificado(a) con cédula No. _____ como padre, madre o acudiente del estudiante:

Nombre del estudiante: _____

Grado: Noveno (9°), Centro Educativo El Recreo. Declaro que:

He leído y comprendido la información proporcionada.

Autorizo voluntariamente la participación de mi hijo(a) en el proyecto de investigación descrito.

Nombre del padre/madre/acudiente:

Número de identificación:

Teléfono de contacto:

Firma: _____

Fecha: _____