

Desarrollo del pensamiento variacional y computacional a través del lenguaje Python en
Educación Básica Secundaria en Colombia

Eimy Adriana Rodríguez Vanegas

Milton Orjuela Díaz

Universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD

Escuela de Ciencias de la Educación - ECEDU

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, D.C., febrero de 2022

Resumen Analítico Especializado (RAE)	
Título	Desarrollo del pensamiento variacional y computacional a través del lenguaje Python en Educación Básica Secundaria en Colombia.
Modalidad de Trabajo de Grado	Monografía
Línea de Investigación	Pedagogías mediadas
Autores	Eimy Adriana Rodríguez Vanegas Milton Orjuela Díaz
Institución	Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD
Fecha	6 de febrero de 2022
Palabras clave	Dificultades de aprendizaje de las matemáticas, Tecnologías de la Información y Comunicación TIC, Pensamiento variacional, Educación Básica Secundaria en Colombia, Pensamiento computacional, Lenguaje de Programación Python.
Descripción	El documento presenta los resultados de trabajo de grado en la modalidad de Monografía, bajo la asesoría del profesor Víctor Manuel Mendoza y bajo la línea de investigación “Argumentación, pedagogía y aprendizaje”. Igualmente, se basó en la metodología de revisión, compilación y análisis de masas documentales, a partir de textos académicos, documentos de investigación, tesis de maestrías y artículos de revistas, producidos en el continente americano. El documento presenta una serie de referentes sobre autores, investigadores y académicos que han desarrollado los temas alrededor de lo que ha sido el desarrollo del pensamiento variacional y computacional a través del lenguaje Python en Educación Básica Secundaria en Colombia. La descripción del tema es una respuesta argumentada a la pregunta: <i>¿El desarrollo del pensamiento computacional es una herramienta didáctica que garantiza el desarrollo del pensamiento variacional y el aprendizaje significativo de las matemáticas?</i>

Fuentes	Para el desarrollo de la monografía se utilizaron las siguientes fuentes principales: Azaña, M. (2018). Programa virtual para mejorar el aprendizaje de matemáticas en alumnos del sexto ciclo de una Institución Educativa particular, Mala Perú. Cristancho, L. A. (2019). Uso de software educativo en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar. Farrell, Peter. (2019). Math Adventures with Python: An Illustrated Guide to Exploring Math with Code. San Francisco, USA. Saha, Amit. (2015). Doing Math with Python: Use Programming to Explore Algebra, Statistics, Calculus and more! San Francisco, USA. Solano, M. C. (2013). Un estudio sobre el aprendizaje de ecuaciones lineales en secundaria con apoyo en las TICs y la solución de problemas (Doctoral dissertation, Tecnológico de Monterrey)
Conclusiones	Los autores de la monografía evidencian que existe una fuerte relación entre el pensamiento variacional, el computacional y el matemático, teniendo en cuenta la identificación de cambios o variaciones en diferentes contextos por medio de patrones que pueden ser modelados para la resolución de problemas matemáticos y la cual es posible usar con fines pedagógicos. Python se puede convertir en una herramienta pedagógica significativa para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación básica secundaria debido al uso de una sintaxis simple, su acceso libre en la red, la facilidad en el manejo del entorno y las potentes librerías que contiene para la ejecución de programas con fines específicos.
Recomendaciones	El trabajo planteado en este documento sugiere la implementación de un proyecto aplicado que permita evidenciar cómo el lenguaje de programación Python facilita el proceso de enseñanza – aprendizaje de objetos matemáticos, tanto en la educación básica primaria como en la secundaria.

Índice General

Introducción	6
Justificación	8
Definición del Problema	12
Pregunta de Investigación	18
Objetivos de la Monografía	19
Objetivo General	19
Objetivos Específicos.....	19
Marco Teórico.....	20
Marco Referencial.....	20
Antecedentes	20
Aspectos Metodológicos.....	26
Base Teórica.....	33
Marco Conceptual	41
Pensamiento Variacional ¿Qué es y que no es?.....	41
Características del pensamiento Variacional	42
Pensamiento Computacional.....	43
Lenguajes de Programación.....	43
Lenguaje Python	44
Que es el software Sagemath y cómo utilizarlo en línea	45
SageMath como software matemático para la resolución de ecuaciones	45
Manual para el manejo de la calculadora gráfica Casio fx-CG50 versión 9 con Python	47
Tutorial de resolución de una Ecuación Cuadrática en Python	49
Resultados	55
Conclusiones y Recomendaciones.....	57
Referencias.....	60

Índice de tablas

Tabla 1	16
Tabla 2	28

Índice de figuras

Figura 1	9
Figura 2	27
Figura 3	33
Figura 4	46
Figura 5	47
Figura 6	48
Figura 7	49
Figura 8	50
Figura 9	51
Figura 10	51
Figura 11	52
Figura 12	52
Figura 13	52
Figura 14	53
Figura 15	54
Figura 16	54
Figura 17	54

Introducción

“Dime algo y lo olvidaré. Enséñame algo y lo recordaré. Involúcrame en algo y lo aprenderé”

Benjamín Franklin

La necesidad de plantear nuevas estrategias de aprendizaje en conceptos relacionados al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Educación Básica Secundaria, en los cuales se ha identificado por medio de la experiencia, dificultades en su comprensión, que posteriormente influirán en el aprendizaje de nuevos objetos matemáticos, da origen al estudio titulado “Desarrollo del pensamiento variacional y computacional a través del lenguaje Python en Educación Básica Secundaria en Colombia”.

El documento que se presenta a continuación profundiza en el lenguaje de programación Python como estrategia para el aprendizaje de conceptos matemáticos y el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes, principalmente de sexto y séptimo de bachillerato, mediante la recolección de fuentes documentales que describen el aprendizaje de dicho pensamiento por medio de herramientas computacionales, con el fin de proponer estrategias de solución a las necesidades de comprensión, a partir del uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC.

En una época caracterizada por el alto desarrollo tecnológico, conocida como era digital en el inicio de la cuarta revolución industrial, establecer estrategias de aprendizaje que superen las barreras motivacionales y cognitivas en los estudiantes acerca del aprendizaje de las matemáticas, se vuelve una prioridad. Es importante seguir superando la metodología de enseñanza tradicional, concientizar a docentes de Educación Básica Secundaria de aplicar un

aprendizaje más contextualizado a la realidad en la cual vivimos y hacer uso de las herramientas que nos brinda el desarrollo computacional.

Por ello, nuestro trabajo vamos a componerlo de cinco momentos. En el primero se plantearán el problema, la justificación y los objetivos. En el segundo, se establecerá el marco teórico, mencionando los antecedentes, los aspectos metodológicos, la base teórica y el marco conceptual. En la tercera, se hará el análisis y la interpretación de la información. Finalmente, en la cuarta y quinta, se mencionarán las conclusiones y referencias consultadas respectivamente.

Igualmente, la monografía contempla una de las doce líneas de investigación establecidas por la Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD, como un componente transversal, a la línea de investigación “Pedagogías mediadas”, según el Art. 24 del Estatuto de Investigación UNAD, con el objetivo de aportar nuevos conocimientos en el área de estudio y ser un elemento de consulta para futuras investigaciones.

Justificación

Considerando las necesidades en la comprensión de objetos matemáticos en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes que superan la Educación Primaria, en el año 2020 decidimos elaborar el documento que se presenta a continuación, implementado estrategias que generaran motivación por el aprendizaje de las matemáticas. Es por eso, que en el año 2021, optamos por la utilización del lenguaje de programación Python, teniendo en cuenta su influencia en diferentes áreas de estudio. Es así como en el transcurso de dos años se realizó la construcción de la propuesta.

Al respecto, el desarrollo del pensamiento variacional desde la Educación Básica Secundaria en Colombia, mediado por las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC representan un factor fundamental en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. El uso de los elementos tecnológicos como estrategia didáctica, genera en los estudiantes de secundaria motivación por el conocimiento de conceptos disciplinares y curiosidad en el manejo de elementos informáticos fundamentados en el pensamiento computacional.

Es por ello que para el análisis de la monografía, se establecieron tres dimensiones:

1. Desarrollo del Pensamiento Matemático Variacional en relación con el Pensamiento Computacional.
2. Desarrollo tecnológico.
3. Innovación.

Figura 1

Identificación de dimensiones para el análisis de la Monografía



Nota. El gráfico muestra la interrelación entre las tres dimensiones utilizadas para el análisis de la monografía.

A la par, no es desconocido que la gran mayoría de los estudiantes que superan la Educación Básica Primaria presentan problemas en el aprendizaje de conceptos, principalmente algebraicos, en la Educación Básica Secundaria. Al respecto, (J. D. Godino y Font, 2003) señalan la importancia de desarrollar conceptos algebraicos sólidos desde la educación primaria para evitar estas evidentes dificultades:

Ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato. En el “álgebra escolar” se incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos. (p. 9)

Igualmente, el desarrollo del pensamiento variacional proporciona a los estudiantes la comprensión del álgebra y el razonamiento lógico matemático, elementos que beneficiarán su capacidad intelectual, crítica y cognitiva. En efecto, el MEN señala:

Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006, p. 66)

Motivo por el cual se hace importante conocer nuevas estrategias pedagógicas y didácticas que fortalezcan los procesos del pensamiento variacional desde las Tecnologías de la Información y Comunicación TIC, a través de lenguajes de programación como Python, aplicado a los grados en los que se inicia la Educación Básica Secundaria. En este sentido, señalan Bricall (2000) y Marqués (2002) citados en Castro y otros (2007), que las funciones de las TIC desde la perspectiva de los estudiantes tienen la ventaja que:

propicia y mantiene el interés, motivación, interacción mediante grupos de trabajo y de discusión que se apoyen en las nuevas herramientas comunicativas: la utilización del correo electrónico, de la videoconferencia y de la red; desarrollo de la iniciativa, aprendizaje a partir de los errores y mayor comunicación entre profesores y alumnos. (Castro y otros, 2007, p. 221)

Igualmente, según García (2017), entre las características que hacen a Python como primera herramienta para el aprendizaje de la programación son la sintaxis simple, el entorno amigable de desarrollo, potentes librerías estándar y software libre:

No en vano es el lenguaje más popular en los cursos introductorios de programación de las universidades en Estados Unidos (Guo, 2014), el que más resultados devuelve en una

búsqueda de cursos introductorios de programación en plataformas de MOOC, y es el escogido por la Fundación Raspberry Pi para su programación principal. (Tollervey, 2015)

El objetivo no es sólo aumentar los conocimientos en el tema, también generar mayor motivación, aplicar los conceptos aprendidos a la vida real, mejorar los resultados que arrojan las pruebas de estado y formar una población estudiantil más inteligente, independiente, responsable de sus actos y con pensamiento crítico, que contribuya a la construcción de una sociedad cada vez mejor. Además, se espera que este trabajo sirva de base o contribuya para nuevas investigaciones en este tema.

Definición del Problema

En la actualidad, el tema de la pandemia ha demostrado que las instituciones de Educación Básica Secundaria en Colombia y principalmente los docentes, han tenido que enfrentar cambios importantes, considerando la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC y los nuevos lenguajes que representan. Por ello, se hace necesario la reflexión sobre lo que simboliza los avances y la innovación en materia tecnológica en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Diversos autores, como Espuny, Gisbert y Coiduras (2010) y Lozano (2011), afirman que lo que ahora se pretende es aprender con la tecnología más que aprender a usar la tecnología.

Al respecto, gran parte de niños y adolescentes, sino todos, se divierten con la variedad de elementos ofrecidos en internet, generándoles entretenimiento por largos periodos de tiempo. Es tanta la distracción, que incluso, tanto padres como profesores han debido controlar el gusto que produce dicha tecnología para evitar adicciones de este tipo.

El problema surge cuando el joven siente un deseo irrefrenable de adquirir los aparatos más novedosos, por alto que sea su precio, cuando es incapaz de salir a la calle sin el teléfono móvil o cuando da muestras de desasosiego más allá de lo razonable si no puede utilizar este dispositivo. (Echeburúa, 2012, p. 42)

¿Cómo aprovechar este uso inadecuado de la red para conocer el funcionamiento y construcción de estos dispositivos y aplicaciones, asociándolos al proceso de desarrollo y aprendizaje de las matemáticas?

Así mismo, como docentes, hemos identificado algunos problemas a los que se ven enfrentados los estudiantes, principalmente en los grados sexto y séptimo de bachillerato, cuando el aprendizaje de objetos matemáticos asociados al pensamiento variacional, aumentan la

dificultad. En efecto, surge un cambio fundamental en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas al superar el sistema aritmético, al cual venían acostumbrados, para adentrarse en el sistema algebraico, enfrentando nuevos conceptos, fórmulas y simbología que incluyen el álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio, además de su aplicación a situaciones de la vida real.

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. (MEN, 2006, p. 66)

Por lo cual, se vuelve importante para el docente conocer e implementar actividades que generen el desarrollo del pensamiento variacional y el aprendizaje ameno del sistema algebraico, con la aplicación de herramientas que produzcan interés y motivación en los estudiantes.

En este sentido, los lenguajes de programación se convierten en una propuesta interesante porque fomentan la creatividad en niños y jóvenes, estimulan la resolución de problemas de la vida cotidiana por su facilidad para representar por medio de pasos o instrucciones los sucesos a los cuales quieren darle solución y, además, se vuelve una herramienta útil para su desempeño profesional en el largo plazo.

De esta manera, entre las características del pensamiento variacional según el Ministerio de Educación Nacional MEN (2006) se encuentran: “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”. Igualmente, Vasco (2002) citado en Gómez

(2013) señala que: “el principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática”. Y finalmente, Bordignon e Iglesias (2020) citando a Wing (2006), definieron: “el pensamiento computacional implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano, basándose en los conceptos fundamentales de la informática” (Bordignon e Iglesias, 2020, p. 24).

En compensación, el Modelo Pedagógico Unadista establece el desarrollo tecnológico como una parte fundamental en el planteamiento de un proceso de enseñanza – aprendizaje efectivo por medio de las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC. Su importancia radica en que permite generar pensamiento crítico, participación solidaria en el desarrollo social, autonomía en el desarrollo intelectual y, autogestión del conocimiento, el cual, junto con el aprendizaje significativo y colaborativo, se convierte en la dimensión sobre la que giran el resto de los componentes que soportan este modelo.

Según (Guerra y otros, 2008, citado en Guerrero y García, 2016) señala la influencia de las TIC en los estudiantes indicando:

Ha sido significativa tanto en el modo en que estudian, aprenden, investigan, trabajan, se comunican e interactúan entre sí, así como en las estrategias que utilizan para la elaboración, producción, y construcción y adquisición de sus propios conocimientos. El propósito de las TIC es mejorar y transformar las prácticas pedagógicas, moviendo el proceso educativo hacia la pedagogía de índole constructivista, convirtiendo al alumno en un investigador activo y creador del conocimiento. (p. 164)

Un recurso fuertemente implementado y que promueve el uso de las TIC es el Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA). Estos utilizan el internet para crear espacios entre docentes y estudiantes con el fin de intercambiar experiencias y conocimientos por medio de plataformas

virtuales diseñadas para tal fin. En la UNAD, este ambiente contiene diferentes entornos y recursos que se caracterizan por su innovación y creatividad en búsqueda de potencializar el proceso de enseñanza – aprendizaje de los estudiantes.

En una sociedad globalizada y de cambios constantes, innovar en materia educativa crea nuevas estrategias educativas que permiten formar alumnos no solo con visión crítica, también altamente competitivos. Es así como los Ambientes Virtuales de Aprendizaje AVA constituyen un proceso que propone “una situación educativa centrada en el educando que fomenta su autoaprendizaje y el desarrollo de su pensamiento crítico y creativo mediante el trabajo en equipo cooperativo y el empleo o no de tecnología de la información y de las telecomunicaciones” (Ferreiro, 2006, p. 21).

Igualmente, este pensamiento crítico puede ser desarrollado por medio del pensamiento computacional el cual permite la resolución de problemas por medio de patrones y algoritmos que ayudarán a los estudiantes a tomar mejores decisiones en su vida diaria. Bonilla y Rubio (2014) delimitan el pensamiento algorítmico como un proceso mental, en el cual “se utiliza un razonamiento coherente para llegar a una conclusión, permitiendo a la persona organizar ideas, eventos, fenómenos y conceptos, atendiendo a los criterios establecidos para un ordenamiento, este proceso se hace considerando normas que exijan un orden lógico” (p. 23).

Por lo que el pensamiento computacional ha adquirido gran importancia durante los últimos años debido a que permite tanto en niños, jóvenes y adultos, pensar de una manera distinta, expresarse a través de múltiples medios, y aplicar estas competencias para resolver problemas del mundo real y cotidiano, siendo además necesario para el crecimiento económico dada su evidente conexión con las TICs, según el Informe Joint Research Center de la Unión Europea en 2016 (citado en Adell y otros, 2019).

Por lo tanto, se encuentra la aplicación de habilidades propias del pensamiento variacional, como la modelación, fuertemente ligadas al pensamiento computacional. Este último, se relaciona con el pensamiento matemático de una manera abstracta y práctica que se refleja en varios aspectos de la vida cotidiana, generando la posibilidad de utilizarlo con un enfoque pedagógico en diferentes áreas de estudio, como las matemáticas, para facilitar su aprendizaje de forma creativa, innovadora y didáctica.

Al respecto, Acevedo (2018) muestra algunos elementos matemáticos necesarios para el desarrollo de las habilidades del pensamiento computacional en la resolución de problemas y que se pueden relacionar con habilidades del pensamiento matemático, como se refleja en la siguiente tabla:

Tabla 1

Habilidades del pensamiento matemático necesarias para el desarrollo del pensamiento computacional

Habilidades del pensamiento matemático implementados	Elementos computacionales que facilitan el desarrollo de esta habilidad
Formular problemas de la vida cotidiana de manera simbólica para aplicarlos en computadoras y otras herramientas computacionales que permitan solucionarlos.	Representaciones abstractas y organización de procesos por medio de algoritmos que permitan plantear el problema, realizar lo solicitado y obtener una solución. En computación un reflejo de ello son pseudocódigos y diagramas de flujo para entender la forma en que el computador recibe, procesa y transmite la información.
Organizar datos de manera lógica para analizarlos.	El uso de variables y condicionales. Cuando se comprende y utiliza el manejo de variables se puede hacer uso de estas para clasificar y depurar información de una manera más ordenada y sencilla. Igualmente, el manejo de condicionales ayuda a entender la importancia que pueda tener el valor de algún dato en un determinado momento, permitiendo comprender

	que según este varié se puede o no ejecutar una u otra operación.
Representar datos mediante abstracciones, como modelos y simulaciones.	El uso de pseudocódigos y diagramas de flujo, no sólo son útiles para que los alumnos observen y desarrollen con mayor facilidad el uso de representaciones abstractas de la realidad, también brindan una base inicial para simular lo que puede llegar a ocurrir en el interior de un programa de computador cuando se somete a determinados escenarios mediante la implementación de pruebas que permitan corroborar el funcionamiento correcto de un determinado algoritmo.
Desarrollo del pensamiento algorítmico y el razonamiento numérico.	El manejo de ciclos repetitivos y solicitud de datos por teclado permite al alumno comprender y asimilar que algunos procesos que deben realizarse varias veces pueden ser definidos e implementados como ciclos repetitivos. Cuando se solicitan datos por teclado dentro de un ciclo repetitivo, no solo se comprende la ejecución de un proceso varias veces, sino que también se observa que sin importar las entradas o salidas de un proceso este puede llegar a ser generalizado y ejecutado por lo que el razonamiento numérico, ayuda en gran medida al desarrollo del pensamiento algorítmico.
Identificar, analizar e implementar posibles soluciones con el objeto de encontrar la combinación de pasos y recursos más eficiente y efectiva.	Con el uso de códigos como <i>If</i> y <i>Else</i> es posible observar y ajustar el comportamiento de un programa de computador según cambien los parámetros que este requiere, lo que ayuda a que el estudiante vea que recursos o secuencias son necesarios en la solución de un problema. De esta forma se optimizan los recursos usando solo los necesarios.
Generalizar y transferir el proceso de solución de problemas a otros de la misma índole.	Mediante la replicación de ejemplos en ejercicios similares con diferentes grados de dificultad, el estudiante puede afianzar el manejo de un tema y ver cómo es posible generalizar y adaptar una solución a diferentes problemas del mismo tipo.

Nota. Acevedo (2018, p. 22 - 24).

Pregunta de Investigación

¿El desarrollo del pensamiento computacional es una herramienta didáctica que garantiza el desarrollo del pensamiento variacional y el aprendizaje significativo de las matemáticas?

Objetivos de la Monografía

Objetivo General

Profundizar en el lenguaje de programación Python como estrategia para el aprendizaje de objetos matemáticos y el desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Secundaria mediante la recolección de fuentes documentales.

Objetivos Específicos

- Identificar las dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Educación Básica Secundaria a través de las fuentes documentales.
- Documentar el lenguaje de programación Python como estrategia de aprendizaje del pensamiento variacional.
- Construir el documento con la información más relevante relacionada al desarrollo del pensamiento variacional, apoyado en el lenguaje de programación Python.

Marco Teórico

Marco Referencial

Antecedentes

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC como herramienta de aprendizaje de las matemáticas se ha vuelto una necesidad a nivel mundial. Al respecto, considerando la brecha educativa entre países subdesarrollados y desarrollados, como el caso de Colombia y Estados Unidos, además de tener en cuenta los obstáculos en el aprendizaje de conceptos disciplinares que hacen parte del pensamiento variacional y el uso de recursos computacionales como estrategia pedagógica de enseñanza, se hará una descripción de los principales antecedentes consultados y analizados para el cumplimiento de los objetivos trazados.

En Colombia, uno de los aspectos para tener en cuenta en el proceso de enseñanza – aprendizaje del pensamiento variacional en estudiantes de educación básica – secundaria hacen referencia a los obstáculos epistemológicos en la comprensión de nociones algebraicas. Es así como Cristancho (2019) establece las dificultades que pueden presentar los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra, y como pueden ser usados los softwares educativos para solucionarlos.

Esta autora menciona el grupo Pretexto ¹ (2002) citado por Rojas (2010), señalando que al iniciar con el conocimiento de algunos conceptos algebraicos los estudiantes aún los relacionan con nociones aritméticas aprendidas sin tener en cuenta el cambio en situaciones numéricas concretas a unas más generales, considerando el contexto colombiano. Por ejemplo, en la interpretación del signo igual “lo continúan viendo como el encargado de dar un resultado

¹ Grupo de investigación de la Universidad Distrital, conformado por los docentes Pedro Rojas, Jorge Rodríguez, Jaime Romero, Eugenia Castillo y Luis Mora.

final y no como una relación de equivalencia entre las dos partes que están involucradas en él” (p. 22).

Igualmente, Cristancho (2019) clasifica estas dificultades teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- a) El cambio de convenciones respecto del referente aritmético. Por ejemplo, la diferencia entre la relación lógica de símbolos para la suma y la multiplicación; en aritmética se tiene que $15 = 1decena + 5unidades$, mientras que en álgebra significa $3b = 3 * b$.
- b) La interpretación de las letras. Cuando los estudiantes les dan a las letras diferentes significados: pueden ser consideradas como números, o como letras pero sin tener ningún significado, asumir distintos valores, entre otras.
- c) El reconocimiento y uso de estructuras. Por ejemplo, al entrar a operar con las letras en el contexto algebraico puede afectar las estructuras de las ecuaciones.

Por otro lado, el Grupo Pretexto menciona la generación de tres problemas puntuales ante las dificultades mencionadas anteriormente:

- 1. Permanencia de la dificultad: La dificultad puede transmitirse de generación en generación o permanecer en el estudiante sin superarla.
- 2. Presencia de la dificultad: Los problemas de incomprensión por parte de los alumnos, y las dificultades para hallar soluciones por parte de los profesores.
- 3. Determina incomprensión: Cuando no se comprende alguna de las temáticas abordadas en la aritmética y ello genera que ciertos conceptos algebraicos sean incomprensibles, generando desmotivación de los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas.

De la misma forma, en la búsqueda de alternativas didácticas y tecnológicas que aborden objetivamente la interpretación de la lógica variacional y computacional, se retoma el estudio investigativo de Solano (2013) realizado a estudiantes del grado octavo del colegio Alfonso López Michelsen de la localidad de Bosa al sur de la ciudad de Bogotá, D. C., quien aporta algunas soluciones para abordar las dificultades en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

Entre estas, indica que en la educación básica y media, surge la necesidad de impulsar una práctica docente que permita dinamizar y facilitar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos, así como desarrollar el pensamiento matemático y las competencias que requiere el estudiante para enfrentar a la sociedad. Enseñar las ecuaciones lineales apoyadas en estrategias como son las TIC y la resolución de problemas (2013, p. 5).

A la par, menciona la importancia de la resolución de problemas algebraicos con la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Solano (2013), retomando lo manifestado por Ortega, Pecharromán y Sosa (2011), indica que la resolución de problemas sigue jugando un papel fundamental como modelo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

“Para este proceso, los enunciados deben ser interesantes, atractivos y novedosos que permitan conseguir aprendizajes significativos en los estudiantes; deben establecerse conexiones de la matemática con la vida real, con la historia, con otras ciencias y entre otras ramas de la propia matemática”. (p. 35)

Este trabajo de tesis de grado de maestría en educación es un referente significativo y constructivista que invita a utilizar una metodología heurística que implica cambios en el proceso de enseñanza-aprendizaje del algebra tradicional caracterizado, entre otras, por una pedagogía

basada en la consulta de textos sin abordar otro tipo de estrategias. En respuesta, Solano (2013) plantea una propuesta basada en el uso de softwares computacionales para superar dichas dificultades.

Por otro lado, existen herramientas de carácter pedagógico y tecnológico, basadas en el lenguaje de programación Python con el propósito de superar las dificultades algebraicas descritas, entre éstas el uso del software de acceso libre SAGEMATH, “software que ha arrojado excelentes resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje del pensamiento variacional, en donde estudiantes del ciclo sexto de una Institución Educativa Particular, Mala Perú, aprendieron sobre el manejo de la base de datos estadísticos” (Azaña, 2018, p. 13).

En su investigación cuasi experimental, Azaña (2018) implementó la enseñanza del pensamiento variacional en temas de estadística descriptiva con el programa “SAGEMATH” concluyendo:

La aplicación del programa virtual tiene efecto significativo en números, relaciones y operaciones, en alumnos del sexto ciclo de una Institución Educativa particular.

Asimismo, se determina que las TIC permite a los alumnos un mejor análisis y operaciones de datos y tomar decisiones a partir de la interpretación de los datos.

En forma similar, Arias (2020) realizó un estudio en una institución educativa de carácter privado, también en Perú, con el propósito que los profesores y estudiantes se relacionaran un poco más con el aprendizaje algebraico de la ecuación cuadrática, implementando el uso de la calculadora de pantalla gráfica v 0.9 Casio fx - CG50, cuyo lenguaje de programación fue Python. Entre sus resultados encontró que:

la orquestación Instrumental promueve que los estudiantes de primer año del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional movilicen la noción de función cuadrática al

desarrollar una secuencia de actividades en la que utilizan la calculadora de pantalla gráfica v 0.9 Casio fx - CG50 en un lenguaje de programación en Python. (p. 3)

Arias (2020) evidencia como se puede propiciar la empatía por el aprendizaje algebraico por parte del docente y del estudiante, haciendo uso de emuladores que vuelven interesante y didáctico el aprendizaje matemático con un software de uso libre que se puede descargar de manera gratuita a cualquier PC.

Por otro lado, en Estados Unidos, Peter Farrell (2019) publicó “Math Adventures with Python: An Illustrated Guide to Exploring Math with Code” donde el autor busca generar motivación por el aprendizaje de conceptos disciplinares principalmente en álgebra, geometría y trigonometría por medio del lenguaje de programación Python, dando importancia a la exploración y creatividad de los estudiantes, o en otras palabras, aprender haciendo.

With this book, the students will use the newest, coolest tools out there to get creative and learn real computer skills like Python while discovering the connections between variational and computational thinking. Exploring math with programming allows for many ways to solve interesting problems with many unforeseen mistakes and opportunities for improvements along the way. Once a student has learned to automate a process, they can go further and deeper into a topic than was ever possible before.

[Con este libro, los estudiantes usarán las herramientas más nuevas y geniales para ser creativos y aprender habilidades informáticas reales como Python mientras descubren las conexiones entre el pensamiento variacional y computacional. Explorar las matemáticas con programación permite muchas formas de resolver problemas interesantes con muchos errores imprevistos y oportunidades de mejora en el camino. Una vez que un estudiante

ha aprendido a automatizar un proceso, puede profundizar más y más en un tema de lo que nunca fue posible] (Farrell, 2019).

Igualmente, Amit Saha (2015), publicó “Doing Math with Python. Use programming to explore algebra, statistics, calculus and more.”. En este libro, el estadounidense expone temas para estudiantes de secundaria relacionados con el álgebra, la probabilidad y la estadística, asociando la programación (lenguaje Python) con las matemáticas y la ciencia.

This book writes programs that takes number and formulas as input, do the tedious calculations needed, and spit out the solution or draw a graph. Also, it is useful to demonstrate the application of programming and math skills beyond the sometimes-abstract world of computer science. [Este libro contiene programas que toman números y fórmulas como entrada, hacen los cálculos necesarios y arrojan la solución o dibujan un gráfico. Además, es útil para demostrar la aplicación de habilidades de programación y matemáticas más allá del mundo a veces abstracto de la informática] (Saha, 2015).

Finalmente, Allen B. Downey en el año 2011 publicó el libro “Think Stats Probability and Statistics for Programmers” donde explica los conceptos básicos de la probabilidad y la estadística utilizando lenguaje de programación Python. Esto logra hacerlo por medio del análisis de un caso de estudio al cual se recurre en cada uno de los capítulos, usando datos de dos fuentes importantes para Estados Unidos: The National Survey of Family Growth (NSFG), del U.S. Centers for Disease Control and Prevention (CDC) y The Behavioral Risk Factor Surveillance System (BRFSS), del National Center for Chronic Disease Prevention and Health Promotion to “track health conditions and risk behaviors in the United States.”

The thesis of the book is that if you know how to program, you can use that skill to help you understand probability and statistics. These topics are often presented from a

mathematical perspective, and that approach works well for some people. But some important ideas in this area are hard to work with mathematically and relatively easy to approach computationally [La tesis del libro es que si se sabe programar, esa habilidad puede ayudar a comprender la probabilidad y la estadística. Estos temas a menudo se presentan desde una perspectiva matemática y ese enfoque funciona bien para algunas personas. Pero algunas ideas importantes en esa área son difíciles de trabajar de forma matemática y relativamente fáciles de abordar computacionalmente] (Downey, 2011).

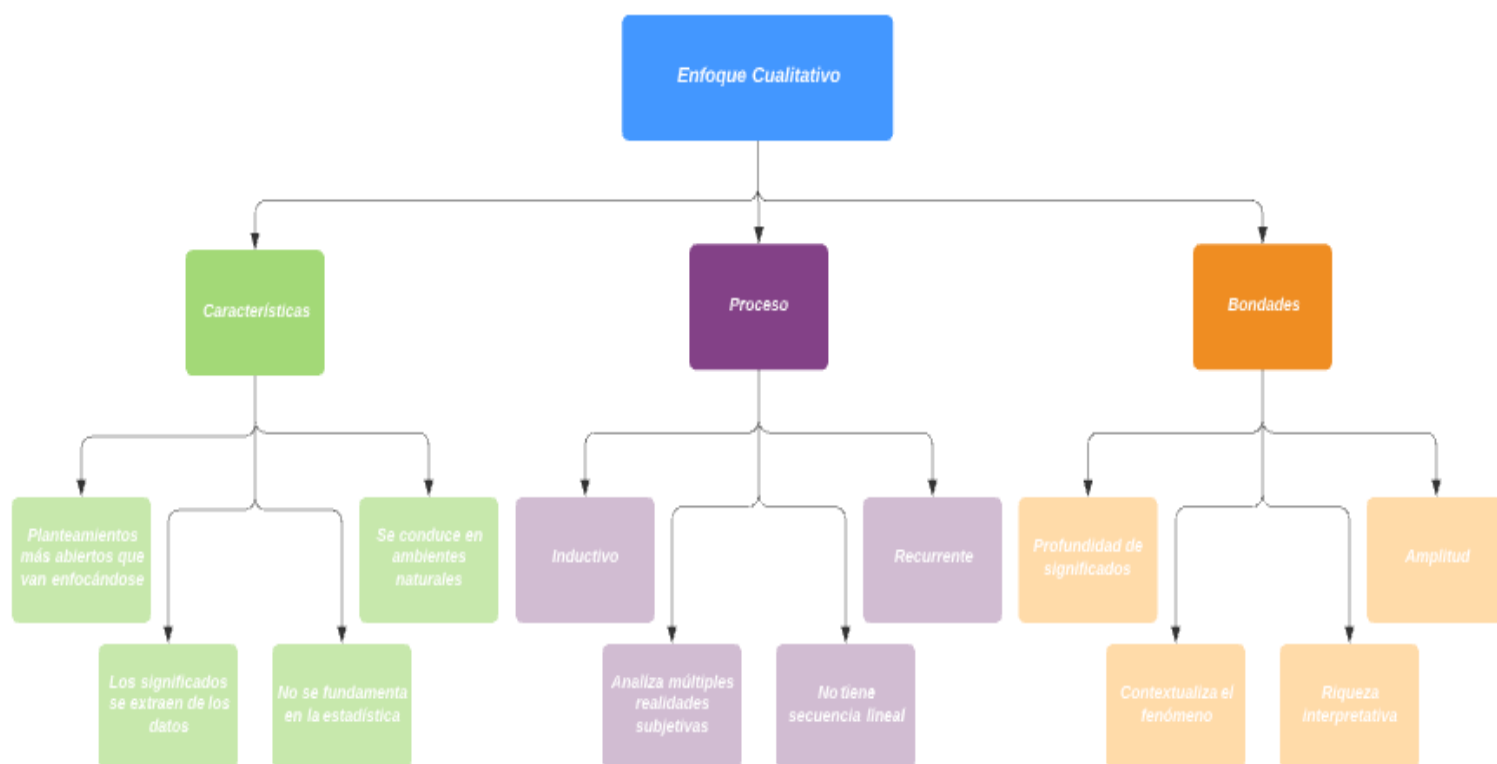
Aspectos Metodológicos

A continuación se describe el tipo de metodología empleada para el desarrollo de la presente Monografía.

Enfoque Metodológico

Se utilizará el método cualitativo de tipo inductivo. Este método consiste en “utilizar la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación” (Sampieri, 2014, p. 40).

En este tipo de enfoque se destacan los siguientes aspectos señalados en la Figura 2:

Figura 2*Método Cualitativo de Investigación*

Nota. La figura muestra un mapa conceptual sobre las características que describen el método de investigación cualitativa.

Participantes: Población y Muestra

La Población y la Muestra constituyen el objeto de la Monografía, siendo estos los elementos sobre los cuales se extrae la información requerida para el desarrollo del trabajo, es decir, el conjunto de documentos con características comunes, en función de la definición del problema y los objetivos del texto.

Pereira; Barboza, Luciano Vitória				
Generación de ejercicios de matemáticas con solución paso a paso: construcción en Phyton e implementación en Moodle	Iván Gutiérrez Rodríguez, Georgina Pulido Rodríguez, Ricardo López Bautista	Sin fecha	Artículo	https://www.esfm.ipn.mx/assets/files/esfm/docs/RNAFM/articulos-2020/XXVRNAFM048.pdf
Técnicas en Informática Educativa (TIE): LaTeX y Python (herramientas para la enseñanza de las ciencias)	Javier A. Orduz-Ducuara	2021	Artículo	http://ojs.unam.mx/index.php/rmbd/article/view/57383
Herramienta didáctica con Python para el aprendizaje de la lógica proposicional: LogicalPy	Ivan D. Buitrago, Juan E. Castano, Santiago Giraldo.	2019	Artículo	http://www.revistas.usb.edu.co/index.php/IngUSBmed/article/view/3877/3269
Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de polígono mediante el módulo turtle de python	Juan Manuel Jiménez Vega	2014	Trabajo de Grado para optar a título de Magister	https://docplayer.es/40372459-Propuesta-didactica-para-la-ensenanza-del-concepto-de-poligono-mediante-el-modulo-tortuga-de-python-juan-manuel-jimenez-vega.html
Python como primer lenguaje de programación textual en la Enseñanza Secundaria	José Carlos García Monsálvez	2017	Artículo	https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/133735/Python_como_primer_lenguaje_de_programac.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Think Stats. Probability and Statistics for Programmers	Allen B. Downey, publicado por O'Reilly Media	2011	Libro	https://greenteapress.com/thinkstats/thinkstats.pdf
Matemáticas Elementales con Sage	Tábara, J. L.	2009	Libro	https://docs.google.com/document/d/1RQIINIBD1FF6BPwAL-MgU7kkgXFeFVOr/edit
Sage: Una aplicación libre para matemáticas	F. Botana, J. Escribano, M. Á. Abáñdes	2011	Libro	https://docplayer.es/491737-Sage-una-aplicacion-libre-para-matematicas.html
Un estudio sobre el aprendizaje de ecuaciones lineales en secundaria con apoyo en las TIC y la solución de problemas	Martha Cecilia Solano Wilches	2013	Tesis	http://funes.uniandes.edu.co/11113/1/Solano2013Un.pdf
Fomento del software libre en los estudios de matemáticas mediante el uso de SAGE	Escribano Martínez, J., Carmona Ruber, J., Valdés Morales, A., Baro González, E., Caravantes Tortajada, J., Claramunt Pérez, J. A., ... & Bellido	2017	Monografía	https://eprints.ucm.es/id/eprint/43579/1/memoria_finalPIMCD2017.pdf
Programa virtual para mejorar el aprendizaje de matemáticas en alumnos del sexto ciclo de una Institución Educativa particular, Mala, 2017	Máximo Azaña Manrique	2018	Tesis	https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/12740/Aza%c3%b1a_MM.pdf?sequence=1&isAllowed=y
Python con la calculadora gráfica Casio fx-CG50	Dr. Joan Verdagueri Codina	2020	Libro	https://www.edu-casio.es/wp-content/uploads/2021/07/CasioPython_web.pdf
Una orquestación instrumental con la mediación de la calculadora gráfica para movilizar la noción de la función cuadrática en	Alfredo Henry Manrique Arias	2020	Tesis	https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/17211/MANRIQUE_ARIAS_ALFREDO_HENRY2.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fuentes de Información

La fuente de información son los diversos tipos de documentos que contienen datos útiles requeridos para satisfacer un requerimiento. En el desarrollo de la presente Monografía provino de repositorios institucionales de diferentes universidades a nivel nacional e internacional como tesis de grado, artículos científicos y libros obtenidos a través de la herramienta Google Academy principalmente.

De esta manera, en la búsqueda de información se consideraron las dificultades y/o necesidades en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de Educación Básica Secundaria en Colombia principalmente en el desarrollo del pensamiento variacional, teniendo como referencia las fuentes documentales que describían el aprendizaje del pensamiento variacional por medio de herramientas computacionales, enfatizando la implementación del lenguaje de programación Python en la comprensión de dichos objetos matemáticos.

Instrumento de recolección de datos

Es el recurso del cual se valen los investigadores para obtener información. En este caso, el método utilizado en la recolección de información fue el análisis documental que sirvió para obtener los conocimientos previos para el desarrollo de la Monografía. Así, el instrumento utilizado para la recopilación de los datos fueron las fichas de Resumen Analítico Especializado (RAE), las cuales sirvieron para registrar, ordenar y almacenar dicha información.

Estrategia de análisis

La estrategia de análisis permite producir información que ayude a abordar el tema planteado. En la elaboración del documento, la estrategia que permitió obtener la información fue la observación y consulta bibliográfica, a partir de la cual se revisaron libros, artículos, revistas y trabajos de grado.

Procedimiento de desarrollo

El procedimiento de desarrollo consiste en exponer el paso a paso que el autor propone para la realización de un trabajo de investigación. De esta manera, el proceso que se siguió para el desarrollo de la monografía se realizó en cinco fases:

1. Idea: es el inicio del trabajo de la monografía y fue lo que nos permitió visualizar los objetivos que se querían alcanzar como resultado de vivencias cotidianas y profesionales.
2. Planteamiento del problema: conformado por tres elementos esenciales en el desarrollo de la monografía: los objetivos, la pregunta de investigación y la justificación del tema a tratar.
3. Revisión documental: constituido por los artículos, documentos, libros y trabajos de grado consultados para la fundamentación del trabajo.
4. Análisis de la información: consiste en la extracción de los datos y conclusiones significativas de las masas documentales consultadas para el logro de los objetivos propuestos en la monografía.
5. Interpretación de resultados: la cual a partir de los datos analizados busca responder la pregunta planteada.

Figura 3*Proceso de desarrollo de la monografía*

Nota. La figura muestra el paso a paso seguido para el desarrollo de la presente monografía.

Base Teórica

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC en los últimos años se han involucrado de manera representativa en las actividades cotidianas de los seres humanos y el área de la educación no podía ser ajena a ello. Ante la facilidad de acceso a internet para todo tipo de población, se vuelve importante para los docentes utilizar esta herramienta para el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, a las cuales gran parte de los estudiantes, principalmente niños y jóvenes, les tienen cierta resistencia debido a factores relacionados con la escasez de recursos educativos, la metodología de enseñanza, poca motivación, entre otros.

Estos problemas se vuelven representativos al pasar de la educación básica primaria a la educación básica secundaria, según las pruebas saber y el informe nacional de resultados PISA 2018, para los grados quinto y noveno, cuyos resultados manifiestan que en Colombia son pocos los alumnos que alcanzan un nivel de desempeño Avanzado. Gran parte de los estudiantes está en un margen entre Insuficiente y Mínimo, y lo más grave es que si se compara el desempeño

académico con los países de la Organización y Cooperación de Desarrollo Económico OCDE, el país aún se encuentra en un nivel muy bajo, a pesar de mostrar mejoría con respecto a los años anteriores.

En ese marco, según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas dictados por el Ministerio de Educación Nacional, el pensamiento variacional envuelve nociones referentes a cambios y variaciones en diferentes contextos, generando con su representación dificultades, ya sean simbólicas, gráficas o algebraicas, en su comprensión. Por lo cual, el correcto aprendizaje de conceptos y procedimientos del sistema aritmético en la Educación Primaria genera una efectiva comprensión del cálculo algebraico de la Educación Básica Secundaria, lo que a su vez representa un aprendizaje significativo del cálculo diferencial e integral en la Educación Media.

De esta manera, las TIC se convierten en una herramienta educativa que fomentan el interés de los estudiantes en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, porque evidentemente tanto niños como jóvenes, sienten una gran satisfacción al usar las herramientas que les brinda el internet. En este sentido, los programas informáticos permiten diseñar, a partir de las necesidades de los estudiantes, problemas que los encaminen a mejorar la comprensión y aplicación de objetos matemáticos en los cuales tengan dificultad, aprovechando la novedad de su uso y contextualizando los temas a casos de la vida real.

Actualmente, existen dos formas en las cuales los jóvenes y niños tienen posibilidades de aprender nociones de programación: la primera es la Programación Visual por Bloques, que combina entretenimiento y aprendizaje con un fuerte componente gráfico, y, la segunda es la Programación no Visual, donde se encontrarían los lenguajes de programación utilizados frecuentemente por los profesionales, pero que pueden resultar asequibles para estudiantes de

secundaria. Entre estos se destaca HTML como una buena alternativa para empezar a crear páginas web de forma muy agradable, y sobre todo, Python.

De esta manera, se logran identificar tres dimensiones básicas que constituyen los cimientos para la construcción del trabajo investigativo: el desarrollo del pensamiento matemático variacional asociado con el pensamiento computacional, el desarrollo tecnológico y la innovación.

Dimensión del desarrollo del Pensamiento Matemático Variacional en relación con el Pensamiento Computacional

Según los Estándares de Competencias en Matemáticas el Pensamiento Variacional se fundamenta en “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (MEN, 2006, p. 66).

Su desenvolvimiento se encuentra fuertemente ligado con los otros pensamientos matemáticos (numérico, métrico, espacial, aleatorio) y otros tipos de pensamiento que se aplican en diferentes áreas: “en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos” (MEN, 2006, p. 66).

Igualmente, el desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Secundaria no es sencillo y necesita de la implementación de estrategias didácticas por parte del profesor que genere motivación y aprendizaje significativo. El pensamiento variacional, dadas sus características es “lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación, tales como: lo que cambia y lo que permanece constante, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre las variables” (MEN, 2006, p. 68).

Por lo tanto, el pensamiento variacional no se reduce aprender fórmulas y realizar ejercicios instrumentales, consiste en la modelación de situaciones o procesos de la vida cotidiana que impliquen que el estudiante analice y saque sus propias conclusiones luego de hallar patrones de variación que lo lleven a la solución del problema. Para Vasco (2002), el principal propósito del pensamiento variacional es la modelación matemática: “para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional” (p. 4).

Este seguimiento de patrones de variación o modelación por medio del cual los estudiantes se plantean un problema y buscan una solución, puede ser visto como una secuencia de instrucciones que pueden ser ejecutadas por medio de un programa o lenguaje computacional.

En el año 2006, La profesora del Departamento de Computación de la universidad de Carnegie Mellon de Estados Unidos, Jeannette M. Wing, fue una de las primeras personas en utilizar el término pensamiento computacional, definiéndolo como “el proceso de pensamiento envuelto en formular un problema y sus soluciones de manera que esas son representadas de una forma en que pueden ser llevadas a un agente de procesamiento de información” (Wing et al., 2006).

Según Wing (2006), este tipo de pensamiento es un proceso de resolución de problemas que incluye las siguientes características:

- Formular problemas de forma que se permita el uso de un ordenador y otras herramientas para ayudar a resolverlos.
- Organizar y analizar lógicamente la información.

- Representar la información a través de abstracciones como los modelos y las simulaciones.
- Automatizar soluciones haciendo uso del pensamiento algorítmico (estableciendo una serie de pasos ordenados para llegar a la solución).
- Identificar, analizar e implementar posibles soluciones con el objetivo de lograr la combinación más efectiva y eficiente de pasos y recursos.
- Generalizar y transferir este proceso de resolución de problemas para ser capaz de resolver una gran variedad de familias de problemas.

De esta forma, el pensamiento variacional traducido como la modelación en la resolución de problemas, puede ser ejecutado por programas computacionales que dan paso a su desarrollo, generando que con el pensamiento computacional se logren aplicar habilidades propias de las matemáticas, la tecnología y el pensamiento crítico.

Dimensión del Desarrollo Tecnológico

Durante los últimos años el desarrollo tecnológico ha sido fundamental para la evolución y progreso de las sociedades en diferentes campos. En aspectos laborales, económicos y sociales, desde la medicina, la psicología, la administración, etc. La transversalidad en el desarrollo del pensamiento matemático en cada una de ellas es evidente y se puede decir que no fue sino hasta principios de los años 2000 donde en la educación tomo importancia real la elaboración de estrategias didácticas de aprendizaje.

A pesar de los beneficios que su uso generaba, no era implementado en las instituciones educativas básicamente porque no se contaba con los recursos físicos y humanos “siendo todavía frecuente el uso de metodologías tradicionales y la realización de procesos mecánicos, descontextualizados que no generan reflexiones importantes en los estudiantes sobre la utilidad

que tienen los conceptos estudiados en su formación académica y en su vida cotidiana” (Vega y otros, 2015).

La pandemia por COVID – 19 declarada a nivel mundial a principios del año 2020 y que aún continúa afectando a la población, generó en el área educativa, la cual ha sido una de las más lesionadas, la necesidad de implementar las TIC como herramienta para los procesos de enseñanza – aprendizaje en diferentes áreas y de esta manera evitar que se hubieran paralizado.

Dunham y Dick (1994), manifiestan que, con el uso apropiado de la tecnología, los estudiantes pueden aprender más matemáticas y con mayor profundidad; la versatilidad y potencialidad de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deberían aprender los alumnos, además de cómo aprenderlas mejor. Reconociendo su uso como un medio de instrucción para los profesores, más no como un fin y su importancia como motivador en los estudiantes, debe ser implementado siguiendo lineamientos que consideren los objetivos del aprendizaje y no de forma arbitraria.

Este tipo de estrategias son útiles cuando logran un enriquecimiento del aprendizaje matemático sin llegar a considerarlas como sustitutos de la labor y el acompañamiento docente quien debe jugar un rol, más como facilitador del aprendizaje que como el de dueño absoluto del conocimiento. (Ramírez, 2015, p. 67)

Igualmente, viviendo en plena sociedad del conocimiento y la información, implica el desarrollo de habilidades en el manejo de las TIC, además de volver competitivos a los estudiantes en este aspecto. García y Benítez (2011) establecen algunas competencias relacionadas con el uso de las TIC, considerándolas una forma alternativa de interactuar con el mundo y resolver las tareas que se presentan en la cotidianidad de forma efectiva y eficiente: “capacidad de análisis y síntesis; capacidad de aprender; habilidad para resolver problemas;

capacidad de aplicar el conocimiento; habilidad para manejar tecnologías digitales; destrezas para manejar la información y capacidad de trabajar autónomamente y en grupo”.

De esta manera, el desarrollo tecnológico se ha vuelto una herramienta en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, tanto para estudiantes como profesores, de crear diferentes representaciones de diversas tareas, además de ser un medio para formular sus propias preguntas y problemas (Barrera y Santos, 2001).

Esto permite plantear una nueva metodología de enseñanza de las matemáticas por medio de tecnologías computacionales que con el uso de software especializado facilitan la comprensión de conceptos disciplinares de dos maneras diferentes. La primera, hace referencia a la forma como las computadoras procesan grandes cantidades de datos; y la segunda como un recurso para potenciar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, aunque la tecnología permita explorar otras formas para la resolución de problemas en matemáticas, no es un sustituto del conocimiento. La interacción con la tecnología permite al profesor determinar las actividades a plantear, cómo dirigirlos y los objetivos que se pueden lograr con ellas para que el estudiante logre construir sus propias ideas; es un medio más no un fin en sí mismo.

Dimensión de la Innovación

La enseñanza de la matemática, según Gutiérrez (2000), debe estar enfocada en tres tópicos: utilizar la matemática conocida como herramienta para resolver problemas cotidianos; aprender a enseñar matemáticas, lo cual provee al estudiante herramientas necesarias para solucionar problemas nuevos y al mismo tiempo mantiene vivo su saber; por último, crear matemática novedosa, adoptando modelos

conocidos a las necesidades del estudiante, de modo que los apliquen en situaciones nuevas. (Gutiérrez, 2000)

De esta manera, se plantea la innovación como otro de los aspectos a considerar en el desarrollo del trabajo investigativo. De Pablos (1998) afirma: “la innovación debe ser entendida como el cambio producido en las concepciones de la enseñanza y en los proyectos educativos; en la manera de pensarlos y de llevarlos a la práctica” (p. 34).

Por otro lado, Cros (2009, citado por Ramírez, 2012, p. 42) señala que “la innovación puede tener cuatro poderosos atributos internos no contingentes: la idea de lo nuevo, el fenómeno de cambio, la acción final y el proceso”. Estas características que fundamentan la definición de innovación educativa son a su vez elementos que describen y diferencian a las innovaciones educativas.

En el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas los planes curriculares planteados en las instituciones educativas han sido las bases en la adquisición de conceptos matemáticos sin ser este el único fin del proceso formativo; es esencial el desarrollo de recursos innovadores que respalden dicho proceso. En este sentido Triana (2016) plantea la necesidad de que se desarrollen habilidades de reflexión y discusión en torno a los temas que se estudian y que van más allá de lo memorístico y mecánico.

En la mayoría de las ocasiones, el uso de las TIC en el aula se ha relacionado con procesos innovadores. Pero de nada sirve la innovación si la metodología implementada por el docente no es la apropiada. Por ello, los docentes deben adquirir competencias profesionales no sólo en el uso de las herramientas a implementar sino en las técnicas que le permitirán alcanzar los objetivos propuestos.

Al respecto, el Premio Nobel de Física, Carl Wieman (2001), presentó en la revista *Science* sus hallazgos sobre el uso de actividades interactivas indicando que:

Resulta que la manera en que se enseña es más importante que el profesor, hallando que en casos casi idénticos, estudiantes canadienses aprendieron mucho más de asistentes jóvenes que empleaban herramientas interactivas, que de un profesor que daba una cátedra magistral.

En este sentido el uso de software especializado podría ser un buen aliado del docente por su versatilidad y posibilidades de creación. Muchos de estos no requieren un gran conocimiento de lenguaje computacional e innumerable información puede ser encontrada en la red acerca de su manejo y diseño de propuestas educativas. Tal es el caso de Geogebra, Mathlab y Python.

Por lo tanto, la innovación en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas muestra nuevas estrategias y metodologías para la adquisición de conocimientos en esta ciencia, estableciendo una relación significativa entre las matemáticas y las tecnologías de la información y la comunicación TIC, mostrando igualmente un potencial uso del lenguaje de programación Python en la educación matemática en todos los niveles, principalmente en la educación básica secundaria.

Marco Conceptual

Pensamiento Variacional ¿Qué es y que no es?

Posso (2020) citando a Vasco (2002) brinda una visión clara acerca de lo que es y que no es el pensamiento variacional:

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de

cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Posso, 2020, p. 51)

Igualmente, Gómez et al, (2013) citando a Vasco (2002) menciona la modelación como el principal propósito del pensamiento variacional, dejando a un lado la resolución de ejercicios: “Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional” (p. 3).

Finalmente, para una mayor comprensión, Posso et al, (2020) citando a Vasco (2002) indica: “El pensamiento variacional no consiste en saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no se mueven ni hacen nada” (p. 14).

Características del pensamiento Variacional

Sánchez (2013) indica como principal característica del pensamiento variacional el reconocimiento de patrones y regularidades que permiten la generalización de procesos que impliquen la variación y el cambio haciendo uso de símbolos: “el álgebra deja de ser una interpretación de las reglas de la aritmética a través de letras, para transformarse en una nueva manera de pensar la matemática: la expresión de la generalidad” (p. 17).

Igualmente, hace referencia a la interpretación de ciertos aspectos en los lineamientos curriculares, como es el relacionado con la contextualización de actividades que promueven la modelación a partir del análisis de una situación con diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico, verbal y la expresión simbólica. Un análisis en tal sentido implica la coordinación e interrelación entre los diferentes sistemas de representación a fin de lograr una construcción conceptual compleja.

También es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su definición está determinada por la existencia de una expresión algebraica (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Pensamiento Computacional

En la actualidad, en los procesos de enseñanza - aprendizaje es de vital importancia tener un gran conocimiento de la tecnología que nos rodea, haciendo indispensable, entre otras, el desarrollo del pensamiento computacional. Al respecto, Adell, J. S., Llopis, M. A. N., Esteve, M. F. M., y Valdeolivas, N. M. G. (2019), quienes retoman a Denning, (2017), dan una definición asertiva del concepto:

El pensamiento computacional es el proceso de pensamiento involucrado en la formulación de los problemas de modo que sus soluciones se representan como pasos computacionales y algoritmos que pueden ser efectivamente llevados a cabo por un agente de procesamiento de la información. (p. 35)

Lenguajes de Programación

González, C. Romo y González, F. (2012) describen las principales características de los lenguajes de programación, brindando una idea de su concepto:

La informática no queda excluida del uso de lenguajes, ya que estos son la manera de especificar las acciones que se desea sean realizadas en la computadora. En otras palabras, son la interface entre el programador y la computadora. A través de ellos podemos desarrollar programas o aplicaciones, que se componen por un conjunto de instrucciones que luego se ejecutarán en la computadora haciendo uso de sus recursos (CPU, memoria, disco, etc.). Los lenguajes de programación tienen una estructura compleja que se compone de varias partes: sintaxis, semántica, elementos del lenguaje,

nivel de abstracción, paradigma, estructuras de control para ordenar la ejecución de los programas, tipos de datos (números, letras, etc.), y funciones o procedimientos (unidades) que contienen un conjunto de instrucciones, entre otras. No hay un único tipo de lenguajes, sino que se clasifican según las características que posean y según el paradigma y conceptos que soporten. (p. 2)

Lenguaje Python

De acuerdo con García, (2017) “Python es lenguaje de propósito general y ha ido ganando popularidad en varios ámbitos como el desarrollo rápido de aplicaciones web, administración de sistemas, ciencia de datos, computación científica (donde domina con diferencia), inteligencia artificial, internet de las cosas, etc” (p. 150).

Este autor, citando a su vez estudios realizados por Grandell, 2006, Ateeq, 2014, Koulori, 2014; Mézárosóvá, 2015; Peña, 2015, señala características del lenguaje Python que permiten facilitar su uso en el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de básica secundaria, como lo son:

- Sintaxis simple.
- Alta legibilidad (sangrado obligatorio).
- Entorno amigable de desarrollo (intérprete interactivo).
- Abstracciones de más alto nivel (mayor nivel de expresividad).
- Potente librería estándar y gran cantidad de módulos de terceros (actualmente son más de 100.000).
- Multiparadigma (imperativo, POO y funcional).
- Disponibilidad de recursos educativos abiertos.
- Software libre y comunidad entusiasta

Que es el software Sagemath y cómo utilizarlo en línea

Python es un lenguaje de programación con diferentes usos y aplicaciones, entre las cuales se encuentra el uso de software matemático. Al respecto, Sagemath constituye un importante software de uso libre que puede ser utilizado como estrategia didáctica en el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación básica secundaria, pues permite ser modificado para adaptarse a las necesidades que se requieran en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, Escribano (2017) brinda una descripción de los aspectos que caracterizan a esta herramienta indicando que Sage es un sistema de cálculo simbólico (CAS) de propósito general cuyo proyecto se inició en el año 2004 por William Stein, profesor de la Universidad de Washington. Su principal rasgo es que integra el software matemático libre existente, siendo posible desde SAGE acceder a GAP, SINGULAR, PARI y otros sistemas de cálculo matemático.

Es de fácil acceso ya que permite trabajar en línea accediendo a través del enlace <https://cloud.sagemath.com> y desde el cual se entra a la plataforma del programa. De esta forma se unifica el acceso y la interacción entre ellos bajo el lenguaje de programación Python (p. 2).

SageMath como software matemático para la resolución de ecuaciones

SageMath, como software estructurado en lenguaje Python, facilita el desarrollo del pensamiento computacional y variacional en los alumnos de educación básica secundaria, incluso el aprendizaje del idioma inglés:

En Sage las ecuaciones están separadas por dos signos igual. Si las separamos solamente por un signo igual nos daría un error. Si no escribimos el doble igual el programa supone que la ecuación está igualada a cero. También es capaz de resolver algunas ecuaciones de

grado superior al cuarto. El comando para resolver ecuaciones es solve (ecuación, x).

(Tábara, J. L. 2009. P.13).

De esta manera, Tábara brinda una explicación detallada para la resolución de ecuaciones en Sage utilizando el comando solve (ecuación, x):

Figura 4

Resolución de ecuaciones en Sage utilizando el comando Solve

Este comando no tiene en cuenta la multiplicidad de las soluciones.

```

Sage
sage: solve(x^2 - 5*x + 6 == 0, x) # Una ecuacion tipica de segundo grado
[x == 3, x == 2]
sage: solve(x^2 - 5*x + 6, x) # Ahora sin el signo igual
[x == 3, x == 2]
sage: solve(x^2 - 4*x + 4 == 0, x) # Una con solucion doble
[x == 2]
sage: solve(x^3 - 3*x + 2 == 0, x) # Una ecuacion de tercer grado facil
[x == -2, x == 1]
sage: solve((x + 1)/9 + (3*x - 4)/45 == x + (5*x - 54)/12, x)
[x == 814/223]
sage: solve(x^8 - 10*x^6 + 37*x^4 - 60*x^2 + 36, x)
[x == -sqrt(2), x == sqrt(2), x == -sqrt(3), x == sqrt(3)]
sage: # Esta ecuacion de octavo grado la ha resuelto
sage: # Sin embargo una arbitraria quinto grado no la resuelve
sage: solve(x^5 - 4*x^4 - 13*x^2 + 2*x - 4, x)
[0 == x^5 - 4*x^4 - 13*x^2 + 2*x - 4]

```

Nota. La figura muestra el proceso que se sigue para la resolución de una ecuación de segundo grado en Sage. Tábara, J. (2009). Matemáticas elementales con Sage. [Fotografía]. Recuperado de: http://www.dma.fi.upm.es/recursos/Introduccion_a_SAGE.pdf

Igualmente, con el objetivo que estudiantes y docentes tenga una mejor orientación en la utilización del programa Sagemath, el profesor Tábara ha compartido videos del procedimiento de la solución de ecuaciones en la red social de YouTube, con el propósito de propiciar el amor por el aprendizaje didáctico y matemático a través de la tecnología (Tabara, J, 2013).

Figura 5*Elaboración de ecuaciones con Sagemath*

Nota. Tábara, J. (2013). 04 Sagemath y matemáticas. Ecuaciones, inecuaciones y Sistema.

[Fotografía]. YouTube. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=wB0dzQDjvnY>

Manual para el manejo de la calculadora gráfica Casio fx-CG50 versión 9 con Python

Siendo Casio una compañía multinacional que se dedica a fabricar dispositivos electrónicos y estando a la vanguardia de la innovación tecnológica, se suma al desarrollo y la transformación de la educación matemática con la calculadora grafica fx-CG50 versión 9 en lenguaje de programación en Python.

Con el propósito de facilitar el adecuado manejo de la calculadora entre docentes y estudiantes, Verdagueri (2020) ofrece un manual que ayuda a la interpretación de los “programas que pueden escribirse directamente en el emulador para ver cómo funcionan con la calculadora virtual. También pueden escribirse en la libreta y guardarlo con la extensión .py y desde la calculadora virtual importar este fichero para ver su ejecución virtual” (p.5).

Figura 6

Python con la calculadora Casio fx – CG50



Verdagueri, J. (2020). Python con la calculadora gráfica Casio fx - CG50. [Fotografía].

Recuperado de: https://www.edu-casio.es/wp-content/uploads/2021/07/CasioPython_web.pdf

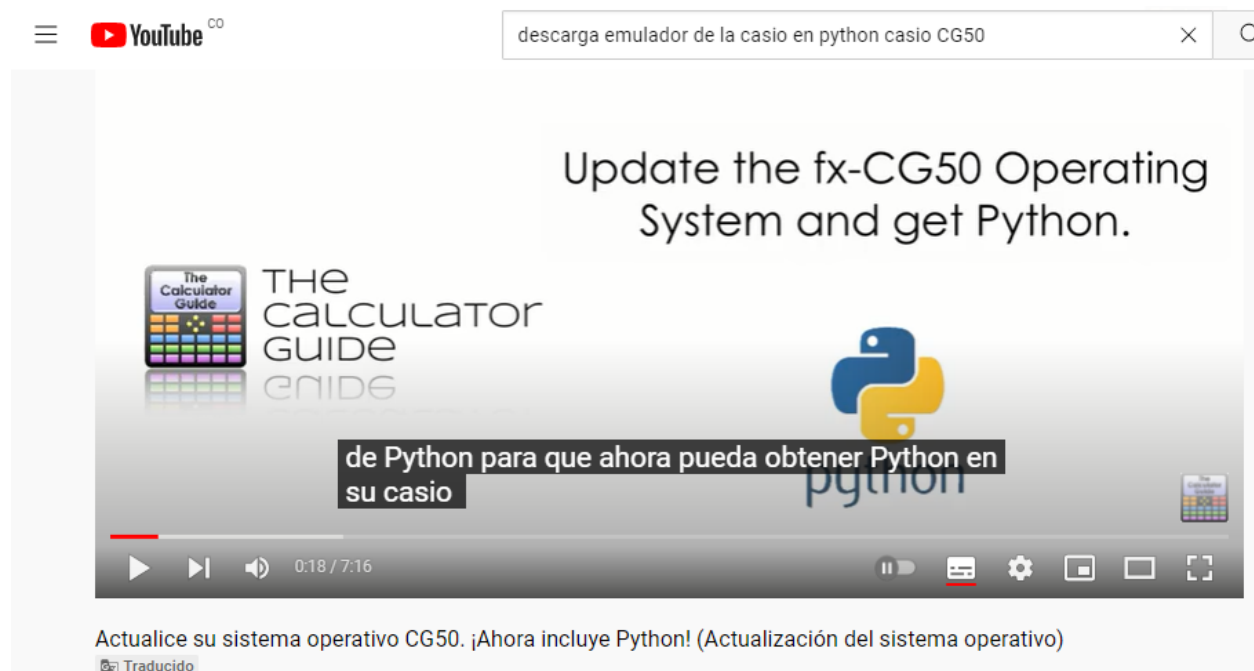
Esta calculadora gráfica contiene varias aplicaciones para ser usadas por el usuario. Las aplicaciones se presentan en forma de iconos a los cuales se accede seleccionándolas con la tecla que hace las funciones de mouse. Una de estas aplicaciones es la posibilidad de escribir, guardar y ejecutar programas escritos con el lenguaje Python. Para utilizar Python hay que seleccionar el icono que lleva su nombre y una vez se ha seleccionado hay que pulsar la tecla EXE que está en la parte inferior derecha de la calculadora (Verdagueri, 2020, p. 1).

La calculadora Casio fx-CG50 se puede descargar en computadores, como un emulador y comenzar a interactuar con los diferentes comandos, facilitando el desarrollo de las diferentes operaciones algebraicas que los estudiantes tienen en sus programas académicos de la educación básica secundaria. También hace posible que a partir de una fotografía se reproduzca el código de manera instantánea en su sistema evitando el proceso de transcripción de la información. Para

una mejor ilustración de su descarga es posible acceder a un video tutorial de la red social YouTube.

Figura 7

Acceso a video tutorial de la red social YouTube



Nota. La figura muestra la ilustración del tutorial en YouTube para obtener Python en la calculadora Casio fx-CG50. The Calculator Guide. (2018). Actualice su sistema operativo CG50. YouTube. Obtenido de: <https://www.youtube.com/watch?v=6z9P9D4K1SI>

Tutorial de resolución de una Ecuación Cuadrática en Python

Siguiendo con las diferentes aplicaciones que tiene el lenguaje de programación Python en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas para estudiantes de educación básica secundaria, se presenta a continuación un tutorial para la resolución de una ecuación cuadrática, directamente en el programa.

Para el ejercicio se considerará la forma de la función cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$ cuyo discriminante está dado por la expresión $b^2 - 4ac$, teniendo en cuenta la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, llamada fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Igualmente, se requiere importar una librería para la ejecución del programa y hacer uso de la instrucción raíz cuadrada:

Figura 8

Librería para la instrucción raíz cuadrada

```
from math import sqrt
```

También se tendrá en cuenta que algunos de los pasos ejecutados en el código tienen comentarios para facilitar la comprensión del ejercicio y los cuales se diferencian por el uso del comando `#` antecediendo la explicación

Paso 1. Obtener los valores de los coeficientes

En este tutorial se asumirá que los valores de los coeficientes se obtienen del usuario. En este caso se usa la instrucción `input` que muestra al usuario un texto que solicita el número, en este caso el coeficiente a y se espera a que el usuario introduzca un número. La función `float` permitirá que dicho número sea un entero o un decimal.

Para el caso de la función cuadrática se le solicitan al usuario tres coeficientes: a , b y c , asumiendo que a es diferente de cero, en cuyo caso la función no estaría definida. Igualmente, se presume que el usuario no introduce valores que no sean numéricos para facilitar la ejecución del programa aunque es posible hacerlo con otro tipo de instrucciones.

De esta manera, el algoritmo quedaría expresado de la siguiente manera:

Figura 9*Obtención de coeficientes de la ecuación cuadrática*

```

# Mensaje de Bienvenida

input("Hola! Por medio de este programa resolverás una ecuación de segundo grado")
input("ax2 + bx + c = 0")

# Se piden los coeficientes al usuario

a = float(input("Ingrese el coeficiente a: "))
b = float(input("Ingrese el coeficiente b: "))
c = float(input("Ingrese el coeficiente c: "))

```

Nota. La imagen describe el algoritmo para el saludo del estudiante y la solicitud de los coeficientes de la ecuación cuadrática a resolver.

Paso 2. Calcular el discriminante.

La expresión $b^2 - 4ac$ determina el discriminante, el cual no está definido para números negativos en cuyo caso la función no tendría una solución real. En Python esta expresión se ingresa de la forma:

Figura 10*Cálculo del discriminante*

```
discriminante = b**2 - (4*a*c)
```

Por este motivo es importante hacer el cálculo del discriminante y considerar dos casos especiales:

Caso 1. Si el discriminante es negativo. Aquí se aclara al usuario que la solución requiere del cálculo con números complejos:

Figura 11

Descripción cuando el discriminante es menor que cero

```
if discriminante < 0:
    print("La solución de la ecuación es con números complejos")
```

Caso 2. Si el discriminante es positivo. En este caso se calcula la primera solución de la ecuación:

Figura 12

Descripción cuando el discriminante es mayor que cero

```
else:
    raiz = sqrt(discriminante)      # Se calcula la raíz
    x1 = (-b + raiz) / (2*a)        # Se calcula la primera solución
```

Sin embargo, una situación a considerar es si el discriminante es igual a cero, en cuyo caso habría una única solución y x_1 como x_2 , tendrían el mismo valor. En el caso contrario, se establecerían las dos soluciones, la positiva para x_1 y la negativa para x_2 :

Figura 13

Descripción cuando el discriminante es igual a cero

```
else:
    raiz = sqrt(discriminante)      # Se calcula la raíz
    x1 = (-b + raiz) / (2*a)        # Se calcula la primera solución

    if discriminante != 0:          # Se comprueba si hay otra solución
        x2 = (-b - raiz) / (2*a)    # Se calcula la segunda solución
        print("Las soluciones de la ecuación son:")
        print(x1)
        print(x2)

    else:
        print("La ecuación tiene una única solución:")
        print(x1)
```

Nota. La gráfica muestra el código ingresado en el caso de que exista dos soluciones o una única solución.

Se aclara que el comando $\neq$ significa diferente.

Así, el código completo quedaría de la siguiente manera:

Figura 14

Código completo para la resolución de una ecuación cuadrática en Python

```
In [ ]: # Resolver una ecuación cuadrática
# Una ecuación cuadrática es de la forma  $a*x^2 + b*x + c = 0$ 
# Donde a, b son coeficientes y c es un término independiente

from math import sqrt

# Mensaje de Bienvenida

input("Hola! Por medio de este programa resolverás una ecuación de segundo grado")
input("ax2 + bx + c = 0")

# Se piden los coeficientes al usuario

a = float(input("Ingrese el coeficiente a: "))
b = float(input("Ingrese el coeficiente b: "))
c = float(input("Ingrese el coeficiente c: "))

discriminante = b**2 - (4*a*c)

if discriminante < 0:
    print("La solución de la ecuación es con números complejos")
else:
    raiz = sqrt(discriminante) # Se calcula la raíz
    x1 = (-b + raiz) / (2*a)   # Se calcula la primera solución

    if discriminante != 0:     # Se comprueba si hay otra solución
        x2 = (-b - raiz) / (2*a) # Se calcula la segunda solución
        print("Las soluciones de la ecuación son:")
        print(x1)
        print(x2)
    else:
        print("La ecuación tiene una única solución:")
        print(x1)
```

Para analizar la funcionalidad del código se especifican a continuación tres ejecuciones considerando las posibilidades de solución que se pueden presentar:

Ejemplo 1. Discriminante mayor que cero:

Hallar la solución de la ecuación cuadrática $2.25x^2 + 1.5x - 2 = 0$

Figura 15

Respuesta del sistema cuando el discriminante es positivo

```
Hola! Por medio de este programa resolverás una ecuación de segundo grado
ax2 + bx + c = 0
Ingrese el coeficiente a: 2.25
Ingrese el coeficiente b: 1.5
Ingrese el coeficiente c: -2
Las soluciones de la ecuación son:
0.6666666666666666
-1.3333333333333333
```

Ejemplo 2. Discriminante igual a cero:

Hallar la solución de la ecuación cuadrática $-2x^2 + 4x - 2 = 0$

Figura 16

Respuesta del sistema cuando el discriminante es cero

```
Hola! Por medio de este programa resolverás una ecuación de segundo grado
ax2 + bx + c = 0
Ingrese el coeficiente a: -2
Ingrese el coeficiente b: 4
Ingrese el coeficiente c: -2
La ecuación tiene una única solución:
1.0
```

Ejemplo 3. Discriminante menor que cero:

Hallar la solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 3 = 0$

Figura 17

Respuesta del sistema cuando el discriminante es negativo

```
Hola! Por medio de este programa resolverás una ecuación de segundo grado
ax2 + bx + c = 0
Ingrese el coeficiente a: 1
Ingrese el coeficiente b: 2
Ingrese el coeficiente c: 3
La solución de la ecuación es con números complejos
```

Resultados

Se identificaron diferentes problemas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en estudiantes y profesores de Educación Básica Secundaria, principalmente en la interpretación semiótica del objeto matemático relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional, caracterizados por la dificultad en la comprensión de nociones algebraicas a partir de conceptos aritméticos.

Al respecto, se determinó que el desarrollo del pensamiento computacional en estudiantes de Educación Básica Secundaria facilita la comprensión de objetos disciplinares, generando motivación e interés en el proceso de enseñanza – aprendizaje del pensamiento variacional, teniendo en cuenta el desarrollo tecnológico y la innovación que en los últimos años ha generado la implementación de nuevas estrategias metodológicas basadas en recursos informáticos.

Así, el pensamiento computacional permite el desarrollo del pensamiento crítico a partir de la modelación de eventos de la vida cotidiana que ayudarán a los estudiantes a tomar mejores decisiones con lenguajes de programación que permiten, por medio de algoritmos o instrucciones que se sigan para la resolución de problemas, la comprensión y aplicabilidad de conceptos matemáticos a la vida cotidiana.

En este sentido, el lenguaje de programación Python es efectivo y satisfactorio en el proceso de enseñanza – aprendizaje del pensamiento variacional en estudiantes de Educación Básica Secundaria porque permite el desarrollo del pensamiento lógico - matemático, el desarrollo del pensamiento computacional e incluso el aprendizaje en un idioma diferente al común como lo es el inglés.

Por lo tanto, existe una fuerte relación entre el pensamiento variacional, el computacional y el matemático, considerando la identificación de cambios o variaciones en diferentes contextos,

por medio de patrones que pueden ser modelados para la resolución de problemas matemáticos y la cual es posible usar con fines pedagógicos para el aprendizaje significativo de las matemáticas.

Conclusiones y Recomendaciones

Con la presenta monografía se puede afirmar que el objetivo general y los específicos se cumplieron por parte de los autores del documento quienes lograron implementar el lenguaje de programación Python como estrategia de aprendizaje de objetos matemáticos y el desarrollo del pensamiento variacional a partir de la recolección de fuentes documentales.

Se presenta de manera precisa el marco teórico que da sustento al objetivo general y los objetivos específicos planteados al inicio de este trabajo monográfico.

Se justifica teóricamente el propósito principal de la realización de este trabajo dando sustentación detallada al planteamiento de la situación inicial.

La transición de la educación básica primaria a la educación básica secundaria presenta un cambio importante en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, la cual se ha caracterizado por la dificultad en la comprensión de nociones algebraicas a partir de conceptos aritméticos.

Las TIC como herramienta de aprendizaje brinda la posibilidad de diseñar, a partir de diferentes recursos computacionales, didácticas enfocadas en el desarrollo del pensamiento variacional.

La resolución de problemas como modelo de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en objetos algebraicos continúa siendo fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional permitiendo a su vez el desarrollo del pensamiento computacional con la utilización de las TIC como insumo para la adquisición de conocimiento.

Las Tecnologías de la Información y Comunicación TIC, a través del desarrollo tecnológico genera en estudiantes de educación básica secundaria pensamiento crítico, autoaprendizaje significativo y contribución intelectual al desarrollo social del país.

Python se puede convertir en una herramienta pedagógica significativa para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación básica secundaria debido al uso de una sintaxis simple, su acceso libre en la red, la facilidad en el manejo del entorno y las potentes librerías que contiene para la ejecución de programas con fines específicos.

La utilización de los softwares matemáticos de uso libre, en lenguaje de programación Python como Sagemath, para la enseñanza del pensamiento variacional y computacional en estudiantes y docentes de la educación básica secundaria, facilitan los procesos de aprendizaje matemático y ayudan a desarrollar el pensamiento crítico de la comunidad educativa.

La utilización de la calculadora Casio Fx CG50 v.09 en lenguaje de programación Python como emulador, para los procesos de aprendizaje algebraico, es motivante para estudiantes y profesores, pues con sólo tomar una fotografía modela de manera numérica la imagen.

El trabajo planteado en este documento sugiere la implementación de un proyecto aplicado que permita evidenciar cómo el lenguaje de programación Python facilita el proceso de enseñanza – aprendizaje de objetos matemáticos, tanto en la educación básica primaria como en la secundaria.

Para la implementación de la propuesta que se manifiesta en la presente investigación académica es necesario que las instituciones educativas en nuestro país tengan óptimo acceso a internet, en cuyo caso el Estado juega un gran papel fundamental para el logro de los objetivos propuestos al promover la equidad educativa y tecnológica a nivel nacional.

Se debe fortalecer la formación y prácticas docentes en el desarrollo de estrategias educativas alternas como el lenguaje de programación Python, el cual se evidencia aporta al aprendizaje transversal de las matemáticas y de otras áreas del conocimiento.

La presente investigación es un punto de partida para profundizar sobre como mediar los procesos de enseñanza-aprendizaje del pensamiento variacional y computacional en las instituciones de básica secundaria en Colombia, a través de programas en lenguaje Python, que sean de fácil acceso a todo público.

Los estudiantes y docentes pueden descargar el emulador Casio fx CG50 en sus dispositivos electrónicos, para practicar de manera constante y alcanzar altos niveles de competitividad, tanto en el desarrollo del pensamiento variacional como el pensamiento computacional.

Referencias

- Acevedo Mera, Nelson Andrés. (2018). Desarrollo del pensamiento computacional mediante Scratch en estudiantes de educación media del municipio de Pamplona [Tesis de Grado, Universidad de Pamplona]. Repositorio institucional de la Universidad de Pamplona. https://www.unipamplona.edu.co/unipamplona/portallIG/home_77/recursos/documentos/01082019/trabajoscratch1.pdf
- Adell, J. S., Llopis, M. A. N., Esteve, M. F. M., y Valdeolivas, N. M. G. (2019). El debate sobre el pensamiento computacional en educación. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 22(1), 171-186. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.5944/ried.22.1.22303>
- Arias, A. H. M. (2020). *Una orquestación instrumental con la mediación de la calculadora gráfica para movilizar la noción de la función cuadrática en estudiantes de nivel secundario* (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Católica del Perú - CENTRUM Católica (Perú)). Recuperado de: <https://www.proquest.com/openview/bfaa20e2c07f130c6b013f2206bad084/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>
- Azaña, M. (2018). Programa virtual para mejorar el aprendizaje de matemáticas en alumnos del sexto ciclo de una Institución Educativa particular, Mala, 2017. Recuperado de: https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/12740/Aza%c3%b1a_MM.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Bonilla & Rubio. (2014). Utilización del software Scratch (S4A) y Hardware arduino como mediadores en procesos educativos para promover el pensamiento algorítmico (Tesis de

- Licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional. Colombia. Recuperado de:
<http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/1971>
- Bordignon, Fernando; Iglesias, Alejandro. *Introducción al pensamiento computacional*. Editorial EDUCAR UNIPE. Recuperado de: <http://biblioteca.clacso.edu.ar/gsd/collect/ar/ar-050/index/assoc/D14927.dir/introduccion-pensamiento-computacional.pdf>
- Bricall J., (2000) Conferencia de Rectores de las Universidades españolas (CRUE) Informe Universidad 2000 Organización de Estados Iberoamericanos Biblioteca Digital de la OEI disponible en <http://www.campus-oei.org/oeivirt/bricall.htm> [Consultado 2004, abril 10].
- Buitrago, P., & Duvan, M. Estrategias pedagógicas acerca de las TIC para fortalecer el aprendizaje de las matemáticas, en los estudiantes de grado sexto de la Escuela Normal Superior de Leticia, Amazonas.
- Castro, Santiago; Guzmán, Belkys; Casado, Dayanara (2007). Las Tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Laurus, vol. 13, núm. 23, pp. 213-234 Universidad Pedagógica Experimental Libertador Caracas, Venezuela. Disponible en:
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76102311>
- Cristancho, L. A. (2019). Uso de software educativo en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar. Recuperado de: <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/14876>
- Dávila Orozco, W. C. Desarrollo de Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria, mediado por GeoGebra (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales).
- De Pablos, Juan (1998). Nuevas Tecnologías, Comunicación audiovisual y Educación.

Barcelona: Cedecs.

Dunham, Penelope y Dick, Thomas (1994). Research on Graphing Calculators. The Mathematics Teacher, vol. 87 (6), 40-445. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Engler, A., Vrancken, S., & Müller, D. (2011). Formación a distancia. Las concepciones de los docentes con relación a ideas variacionales.

Escribano Martínez, J., Carmona Ruber, J., Valdés Morales, A., Baro González, E., Caravantes Tortajada, J., Claramunt Pérez, J. A., ... & Bellido Terrones, M. L. D. (2017). Fomento del software libre en los estudios de matemáticas mediante el uso de SAGE. Recuperado: https://eprints.ucm.es/id/eprint/43579/1/memoria_finalPIMCD2017.pdf

Espuny, C., Gisbert, M. & Coiduras, J. (2010). La dinamización de las TIC en las escuelas. EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 32, 1-16.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, 2006.

Farrell, Peter. (2019). Math Adventures with Python: An Illustrated Guide to Exploring Math with Code. San Francisco, USA. Recuperado de: <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=RMFQDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT18&dq=use+python+in+mathematics&ots=vSAum7V7ox&sig=SqMt8EnEnzJI9DymppemfNuFa-k#v=onepage&q&f=false>

Ferreiro, R. (2006). *Nuevas alternativas de aprender y enseñar. Aprendizaje cooperativo*. México: Trillas.

García, Martha L.; Benítez, Alma A. Competencias Matemáticas Desarrolladas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje: el Caso de MOODLE. En: Formación universitaria, 2011, no. 4, p. 31 – 41. Disponible en <https://scielo.conicyt.cl/pdf/formuniv/v4n3/art05.pdf>

García Monsalve, José Carlos (2017). Python como primer lenguaje de programación textual en la Enseñanza Secundaria. Education in the knowledge society: EKS. Salamanca, 2017, v. 18, n. 2, junio; p. 147-162 Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/318597691_Python_como_primer_lenguaje_de_programacion_textual_en_la_Ensenanza_Secundaria

Godino, J. D., & Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Documento: Matemáticas y su Didáctica para maestros. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Gómez Ospina, Oscar Mauricio. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. *Educación científica y tecnológica. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.* (ISSN 0124 2253). 115 – 120. Recuperado de: <https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/download/5966/9582>

González, Carlos; Romo, Alexis y González, Francisco. (2012). 90710967 Paper Lenguajes de Programación. Recuperado de: <https://acortar.link/hTrmRR>

Grigoletti, Pablo Souza; Dimuro, Graçaliz Pereira; Barboza, Luciano Vitória. Módulo Python para matemática intervalar. TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 8, n. 1, p. 73-82, 2007. Recuperado de: <https://tema.sbmac.org.br/tema/article/view/234>

Guerra, M., Hilbert, M., Jordan, V. & Nicolai, C. (2008). Panorama Digital 2007 de América Latina y el Caribe. Avances y desafíos de las políticas para el desarrollo con las Tecnologías de Información y Comunicaciones. Santiago de Chile: Naciones Unidas.

Recuperado de:

https://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/3634/1/S2008605_es.pdf

Guerrero & García. (2016). Desarrollo del pensamiento algorítmico con el apoyo de objetos de aprendizaje generativos. Revista de Medios y Educación, (49), 163-175. Recuperado de:

https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/86925/1/T01882.pdf

Gutiérrez, H. (2000). Resolución de problemas en Matemáticas. Buenos Aires, Argentina:

Planeta

Gutiérrez Rodríguez, Iván; Pulido Rodríguez, Georgina; López Bautista, Ricardo. Generación de ejercicios de matemáticas con solución paso a paso: construcción en Python e implementación en Moodle. Recuperado de:

<https://www.esfm.ipn.mx/assets/files/esfm/docs/RNAFM/articulos-2020/XXVRNAFM048.pdf>

Ibáñez, E., Cuesta, M., Taglibaue, R & Zangaro, M. (2008). La generación actual en la universidad: el impacto de los millennials. V Jornadas de Sociología de la UNLP. Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Departamento de Sociología. La Plata. Recuperado de <https://www.aacademica.org/000-096/261.pdf>

I., Buitrago., J., Castaño., and S., Girado.” Herramienta didáctica con Python para el aprendizaje de la lógica proposicional: LogicalPy”. Ingenierías US-BMed, 10(1), pp. 53-57, 2019.

Recuperado de:

<http://www.revistas.usb.edu.co/index.php/IngUSBmed/article/view/3877/3269>

Jaramillo, G. E., & Perlaza Mosquera, S. T. (2014). Pensamiento variacional en la resolución de problemas algebraicos en los estudiantes del grado 8 del centro Educativo Politécnico la Milagrosa, municipio Puerto Tejada (Cauca). Recuperado de:

file:///C:/Users/MILTON%20ORJUELA/Downloads/Gloria%20Edith%20Jaramillo.pdf

Jiménez Vega, Juan Manuel (2014). “Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de polígono mediante el módulo turtle de Python”. Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Recuperado: <https://docplayer.es/40372459-Propuesta-didactica-para-la-ensenanza-del-concepto-de-poligono-mediante-el-modulo-tortuga-de-python-juan-manuel-jimenez-vega.html>

Londoño, E. M., & Vargas, H. C. (2011). Enseñar matemáticas usando objetos virtuales de aprendizaje en la Universidad Católica de Pereira. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 5(10), 148-162.

Lopera Zapata, C. A. (2014). Diseño de una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa que movilice el Aprendizaje de la proporcionalidad directa e inversa a través de las TIC en el grado Séptimo de la Institución Educativa el Pedregal del Municipio de Medellín. Facultad de Ciencias.

Lozano, R. (2011). De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y del conocimiento. *Anuario Think EPI*, 1, 45-47.

Marqués, P., (1999). Diseño Y Educación De Programas Educativos Disponible En

<http://www.xtec.es/pmarques/edusoft.htm>. [consultado julio 10, 2002].

Monterroza, J. F. P. (2013). El uso de los fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software Cabri “Del pensamiento numérico al pensamiento Algebraico-Variacional”. *Revista científica*, 665-669.

Orduz-Ducuara, Javier A. Técnicas en informática educativa (TIE): LaTeX y Python (herramientas para la enseñanza de las ciencias). *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*, [S.l.], v. 8, n. 15, p. 124-137, feb. 2016. ISSN 20074751. Recuperado de: <http://revistas.unam.mx/index.php/rmbd/article/view/57383/50910>

Pacheco, C. E., Reyes, F. S., & Robles, J. Desarrollo del pensamiento numérico variacional a través de escenarios lúdicos mediados por TIC.

Palacios Alvear, M. L., & Buesaquillo, V. E. (2018). Estrategias interactivas apoyadas en TIC que facilitan la apropiación de los conocimientos previos para la transición de la aritmética al álgebra en los estudiantes de grado octavo, de la institución educativa escuela normal superior del Mayo de La Cruz-Nariño.

Palacios Casas, D. E., Villa Jaramillo, H. E., & Contreras Jiménez, B. A. (2018). El álgebra geométrica como herramienta fundamental en el proceso de factorización polinómica.

Posso Torres, Jhonatan Elías. (2020). *Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática*. [Tesis para optar al título de Maestría en Educación]. Universidad del Valle. Recuperado de: <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/17958/Aspectos-Characterísticos-Pensamiento-Posso-Johnatan-7412-2020.pdf?sequence=1>

- Ramírez, Camilo Andrés. (2015). Diseño de herramientas que fomentan el aprendizaje de matemáticas con ayuda de Mathematica 10. En: Revista Elementos, no. 5, p. 65-78. Disponible en <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5179413>
- Ramírez, María Soledad. (2012). Modelos y estrategias de enseñanza para ambientes presenciales y a distancia [eBook]. México: Editorial Digital Tecnológico de Monterrey.
- Roa Poveda, C. J. Ambiente virtual de aprendizaje para la enseñanza de la factorización de binomios.
- Saha, Amit. (2015). Doing Math with Python: Use Programming to Explore Algebra, Statistics, Calculus and more! San Francisco, USA. Recuperado de: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=EvWbCgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR7&dq=algebra,+python&ots=NLQRtkck5l&sig=Yofrz-6Y0ix_We64aDAvgBzBsiI#v=onepage&q=algebra%20python&f=false
- Sampieri Hernández, Roberto. (2014). Metodología de la investigación. Sexta edición. Ed Mac Graw Hill. Recuperado de: <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>
- Sánchez, L. (2013). Características del Pensamiento Variacional y su Correspondencia con las Prueba Saber 11. Recuperado de: <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/4790/CB-0481095.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Solano, M. C. (2013). Un estudio sobre el aprendizaje de ecuaciones lineales en secundaria con apoyo en las TICs y la solución de problemas (Doctoral dissertation, Tecnológico de

- Monterrey). Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/11113/1/Solano2013Un.pdf>
- Tábara, J. L. (2009). Matemáticas elementales con Sage. Recuperado de:
http://www.dma.fi.upm.es/recursos/Introduccion_a_SAGE.pdf
- Tábara, J. L. (27 de Agosto de 2013). 04 Sagemath y matemáticas. Ecuaciones, inecuaciones y Sistema. [video]. YouTube. Obtenido de
<https://www.youtube.com/watch?v=wBODzQDjvnY>
- The Calculator Guide. (2018). Actualice su sistema operativo CG50. Obtenido de:
<https://www.youtube.com/watch?v=6z9P9D4K1SI>
- Triana-Muñoz, Mónica María; Ceballos-Londoño, Juan Fernando; Villa-Ochoa, Jhony Alexander. Una dimensión didáctica y conceptual de un instrumento para la Valoración de Objetos Virtuales de Aprendizaje. El caso de las fracciones. En: Entramado. Julio - diciembre, 2016 vol. 12, no. 2, p. 166-186. Disponible en:
<http://www.scielo.org.co/pdf/entra/v12n2/v12n2a13.pdf>
- Tuirán, J. N. (2015). Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo GeoGebra. Opción, 31(3), 897-906.
- Valda, F. y Arteaga, C. (2015). Diseño e implementación de una estrategia de gamificación en una plataforma virtual de educación. Revista de Difusión cultural y científica de la Universidad La Salle en Bolivia. (9)9 65-80.
- Valderrama, B. (2015). Los secretos de la gamificación: 10 motivos para jugar. Capital Humano. 72-78.

Vasco, Carlos Eduardo (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (8-10 May 2002). Bogotá, Colombia.

Vega Vega, Juan Carlos; Niño Duarte, Franklin; Cárdenas, Yini Paola (2015). Enseñanza de las matemáticas básicas en un entorno e-Learning: un estudio de caso de la Universidad Manuela Beltrán Virtual. En: Revista Escuela de Administración de Negocios, no. 79, p. 172 – 185. Disponible en:
http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-81602015000200011

Verdagueri, J. (2020). Python con la calculadora gráfica casio fx-CG50. Recuperado de:
https://www.edu-casio.es/wp-content/uploads/2021/07/CasioPython_web.pdf

Wing, Jeannette (2006). Computational Thinking. COMMUNICATIONS OF THE ACM March 2006/Vol. 49, No. 3. Recuperado de <http://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf>