

**Las tecnologías digitales para la resolución de problemas: el caso de un curso de álgebra,
trigonometría y geometría analítica de nivel superior en educación virtual y a distancia**

Fabio Gonzalo García Calderón

Director de Tesis

Dr. Freddy Yesid Villamizar Araque

Codirector de Tesis

Dr. Diego Fernando Aranda Lozano

Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD

Escuela Ciencias de la Educación ECEDU

Maestría en Educación

2024

Agradecimientos

A María Auxiliadora y al Sagrado Corazón de Jesús por sus innumerables bendiciones a lo largo de mi vida y que me permiten llegar a la culminación de mis estudios de Maestría en Educación. A mis padres, Carmen y Gonzalo, por los valores cimentados en mi persona, los cuales han dado fruto no solo como ser humano sino también en mi ejercicio docente, a mis hermanos y sobrinos, por ser fuente inagotable de motivación y apoyo.

En memoria de mi tía Juana Calderón Rangel, quien desde su vocación religiosa promovió en mí el amor a Dios y el mantener intacta la fe a pesar de los altibajos que se presenten en la vida sin dejar de lado el servicio y la ayuda a los demás.

Agradezco al Dr. Ernesto Alejandro Cote por su amistad y el haberme brindado la oportunidad de cumplir mi sueño de laborar como docente en mi querida UNAD, la cual que me ha visto avanzar en mis estudios de pregrado y postgrado. Además, a mí estimado asesor del presente trabajo de investigación, el Dr. Freddy Yesid Villamizar Araque, quien con su vasta experiencia en el contexto de la Enseñanza de las Matemáticas me ofreció el acompañamiento necesario para llevar a feliz término este trabajo investigativo.

A mis compañeros docentes y directora del CCAV UNAD Cúcuta Dra. Yuleyma Torres, por su apoyo y el compartir conmigo sus vivencias en el ámbito de la Educación Superior. Agradezco a los estudiantes de la ECBTI-ZCORI de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, porque por medio de su tiempo y aportes sustentaron enormemente esta labor investigativa.

Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que de una u otra manera me han acompañado en este proceso formativo, gracias por sus palabras de ánimo.

¡Insistir, persistir y nunca desistir!

Resumen

Una de las formas de aprender Matemáticas es a través de la resolución de problemas, sin embargo, esta actividad exige el dominio de diversas competencias en los diferentes pensamientos matemáticos. Existen varias dificultades en la resolución de problemas y misconceptions, reflejadas desde la interpretación de un problema o el desarrollo de operaciones matemáticas, por ello, la presente investigación tiene como objetivo el diseñar y aplicar un recurso virtual que promueva espacios para la instrumentación e instrumentalización en los estudiantes para el manejo de un software de Geometría Dinámica, como mediador en la resolución de problemas en el contexto del Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica en estudiantes de nivel superior en educación virtual y a distancia. Los resultados analizados bajo un enfoque mixto, evidencian que el uso de las tecnologías digitales y particularmente un software de Geometría dinámica en la resolución de problemas, modifican y generan nuevas heurísticas en los estudiantes, ayudando a superar obstáculos de tipo analítico, y promoviendo un pensamiento geométrico.

Palabras claves: Resolución de problemas, Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica, secuencia didáctica, software de geometría dinámica, Génesis Instrumental, heurística.

Abstract

One of the ways to learn Mathematics is through problem solving, however, this activity requires the mastery of various skills in the different mathematical thoughts. There are several difficulties in problem solving and misconceptions, reflected from the interpretation of a problem or the development of mathematical operations, therefore, the present research aims to design and apply a virtual resource that promotes spaces for instrumentation and instrumentalization in students for the management of a Dynamic Geometry software, as a mediator in problem solving in the context of Algebra, Trigonometry and Analytical Geometry in higher level students in virtual and distance education. The results analyzed under a mixed approach, show that the use of digital technologies and particularly a Dynamic Geometry software in problem solving, modify and generate new heuristics in students, helping to overcome analytical obstacles, and promoting geometric thinking.

Keywords: Problem solving, Algebra, Trigonometry, Analytical Geometry, teaching sequence, dynamic geometry software, instrumental genesis, heuristic.

Tabla de contenido

Introducción.....	13
Planteamiento y Justificación del Problema	15
Contexto de Resultados de Pruebas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica a Nivel Internacional y Local	15
Dificultades y/o Conflictos presentes en la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.	22
Pregunta de Investigación.....	26
Justificación.....	27
Objetivos.....	33
Objetivo General	33
Objetivos Específicos	33
Marco Referencial.....	34
Antecedentes.....	34
Marco Teórico.....	44
La resolución de Problemas.....	44
Marco Didáctico: La Didáctica propuesta por Cuevas y Pluinage (2003)	44
La Génesis Instrumental.....	46
Marco Conceptual.....	48
Los Pensamientos Matemáticos y el Pensamiento Matemático Aplicado	51
Libro Virtual GeoGebra	53

Secuencias Didácticas	53
Marco Legal.....	54
Diseño Metodológico	56
Fase de Exploración	56
Fase de Diseño	60
Diseño de los Instrumentos de Medición: Diagnóstico, Pretest y Postest.....	60
Diseño de Sesiones Didácticas	76
Fase de Aplicación de los Instrumentos de Medición, Actividades y Recolección de la Información.....	77
Análisis de Resultados	81
Parte 1: Resultados del Diagnóstico.....	81
Parte 2: Resultados del Pretest.....	92
Parte 3: Resultados del Postest	103
Parte 4: Resultados Comparativos entre Pretest y Postest	113
Parte 5: Resultados de las Actividades Realizadas en los Encuentros Virtuales.....	118
Parte 6 : Resultados del Repaso de las Actividades Propuestas en el Libro de Geometría Dinámica	120
Discusión de los Resultados	121
Conclusiones y Recomendaciones	124
Referencias Bibliográficas.....	128
Apéndices	136

Lista de Figuras

Figura 1	<i>Comparativo de las matrículas, cancelaciones, aplazamientos, inasistencias, deserciones, base estadística, aprobaciones y reprobaciones en los últimos 5 períodos académicos (1605 del 2022 al 1605 del 2023) del curso de ATGA</i>	19
Figura 2	<i>Comparativo de los porcentajes de aprobaciones y reprobaciones en los últimos 5 períodos académicos (1605 del 2022 al 1605 del 2023) del curso de ATGA</i>	20
Figura 3	<i>Comparativo de las calificaciones promedio de los últimos 5 períodos académicos (1605 del 2022 al 1605 del 2023) del curso de ATGA</i>	21
Figura 4	<i>La Génesis Instrumental como dos procesos de Instrumentación e Instrumentalización</i> ...	47
Figura 5	<i>Rectas en un plano cartesiano. Gráfica del ítem de la pregunta 3 del diagnóstico</i>	62
Figura 6	<i>Construcción de bloques. Gráfica del ítem de la pregunta 4 del diagnóstico</i>	63
Figura 7	<i>Volumen de cuerpos geométricos. Gráfica del ítem de la pregunta 6 del diagnóstico</i> .	64
Figura 8	<i>Áreas sombreadas. Gráfica del ítem de la pregunta 7 del diagnóstico</i>	64
Figura 9	<i>Representación de una sección cónica. Gráfica del ítem de la pregunta 9 del diagnóstico</i>	66
Figura 10	<i>Imagen de apoyo para problema 1 del pretest</i>	67
Figura 11	<i>Imagen de apoyo para problema 2 del pretest</i>	68
Figura 12	<i>Imagen de apoyo para problema 3 del pretest</i>	69
Figura 13	<i>Imagen de apoyo para problema 4 del pretest</i>	70
Figura 14	<i>Imagen de apoyo para problema 1 del postest</i>	72
Figura 15	<i>Imagen de apoyo para problema 2 del postest</i>	73
Figura 16	<i>Imagen de apoyo para problema 3 del postest</i>	74
Figura 17	<i>Imagen de apoyo para problema 4 del postest</i>	75

Figura 18	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P1 diagnóstico.</i>	82
Figura 19	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P2 diagnóstico.</i>	83
Figura 20	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P3 diagnóstico.</i>	84
Figura 21	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P4 diagnóstico.</i>	84
Figura 22	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P5 diagnóstico.</i>	85
Figura 23	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P6 diagnóstico.</i>	86
Figura 24	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P7 diagnóstico.</i>	87
Figura 25	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P8 diagnóstico.</i>	88
Figura 26	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P9 diagnóstico.</i>	89
Figura 27	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P10 diagnóstico</i>	90
Figura 28	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con múltiple respuesta P11 diagnóstico</i>	91
Figura 29	<i>Respuestas a la pregunta de selección múltiple con múltiple respuesta P12 diagnóstico</i>	92
Figura 30	<i>Solución analítica a situación problema 1 en el pretest</i>	93
Figura 31	<i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 1 en el pretest.....</i>	94
Figura 32	<i>Solución analítica a situación problema 2 en el pretest.</i>	95
Figura 33	<i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 2 en el pretest.....</i>	96
Figura 34	<i>Solución analítica a situación problema 3 en el pretest.</i>	97
Figura 35	<i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 3 en el pretest.....</i>	98
Figura 36	<i>Solución analítica a situación problema 4 en el pretest</i>	99

Figura 37 <i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 4 en el pretest.....</i>	100
Figura 38 <i>Solución analítica a situación problema 5 en el pretest</i>	101
Figura 39 <i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 5 en el pretest.....</i>	102
Figura 40 <i>Solución analítica a situación problema 1 en el postest.</i>	104
Figura 41 <i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 1 en el postest.</i>	105
Figura 42 <i>Solución analítica a situación problema 2 en el postest.</i>	106
Figura 43 <i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 2 en el postest</i>	107
Figura 44 <i>Solución analítica a situación problema 3 en el postest.</i>	108
Figura 45 <i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 3 en el postest.</i>	109
Figura 46 <i>Solución analítica a situación problema 4 en el postest.</i>	110
Figura 47 <i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 4 en el postest.</i>	111
Figura 48 <i>Solución analítica a situación problema 5 en el postest.</i>	112
Figura 49 <i>Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 5 en el postest.</i>	113
Figura 50 <i>Solución a la situación problema de P1 en el pretest y postest.</i>	114
Figura 51 <i>Solución a la situación problema de P2 en el pretest y postest.</i>	115
Figura 52 <i>Solución a la situación problema de P3 en el pretest y postest.</i>	116

Figura 53 <i>Solución a la situación problema de P4 en el pretest y postest.</i>	117
Figura 54 <i>Solución a la situación problema de P5 en el pretest y postest.</i>	118
Figura 55 <i>Imagen de apoyo pregunta 3 diagnóstico</i>	137
Figura 56 <i>Imagen de apoyo pregunta 4 diagnóstico</i>	137
Figura 57 <i>Imagen de apoyo pregunta 6 diagnóstico</i>	138
Figura 58 <i>Imagen de apoyo pregunta 7 diagnóstico</i>	139
Figura 59 <i>Imagen de apoyo pregunta 9 diagnóstico</i>	140
Figura 60 <i>Imagen de apoyo problema 1 pretest</i>	141
Figura 61 <i>Imagen de apoyo problema 2 pretest</i>	142
Figura 62 <i>Imagen de apoyo problema 3 pretest</i>	143
Figura 63 <i>Imagen de apoyo problema 4 pretest</i>	144
Figura 64 <i>Imagen de apoyo problema 1 postest</i>	145
Figura 65 <i>Imagen de apoyo problema 2 postest</i>	146
Figura 66 <i>Imagen de apoyo problema 3 postest</i>	147
Figura 67 <i>Imagen de apoyo problema 4 postest</i>	147
Figura 68 <i>Evidencia Encuentro Virtual Sesión 1</i>	149
Figura 69 <i>Evidencia Encuentro Virtual Sesión 2</i>	150
Figura 70 <i>Evidencia Encuentro Virtual Sesión 3</i>	151
Figura 71 <i>Evidencia Encuentro Virtual Sesión 4</i>	152
Figura 72 <i>Carta Solicitud Evaluación de Instrumentos</i>	153
Figura 73 <i>Rúbrica de Evaluación Prueba Diagnóstica</i>	154
Figura 74 <i>Rúbrica de Evaluación del Pretest</i>	155
Figura 75 <i>Rúbrica de Evaluación del Postest</i>	156

Figura 76 <i>Formulario Encuesta de apreciación</i>	157
Figura 77 <i>Libro de GeoGebra</i>	158
Figura 78 <i>Solución dada por una estudiante a ejercicio del postest</i>	159

Lista de Apéndices

Apéndice A <i>Prueba Diagnóstica</i>	136
Apéndice B <i>Pretest</i>	141
Apéndice C <i>Postest</i>	145
Apéndice D <i>Encuentro Virtual Sesión 1</i>	149
Apéndice E <i>Encuentro Virtual Sesión 2</i>	150
Apéndice F <i>Encuentro Virtual Sesión 3</i>	151
Apéndice G <i>Encuentro Virtual Sesión 4</i>	152
Apéndice H <i>Carta Solicitud Evaluación de Instrumentos</i>	153
Apéndice I <i>Rúbrica de Evaluación Prueba Diagnóstica</i>	154
Apéndice J <i>Rúbrica de Evaluación del Pretest</i>	155
Apéndice K <i>Rúbrica de Evaluación del Postest</i>	156
Apéndice L <i>Formulario Encuesta de apreciación</i>	157
Apéndice M <i>Libro de GeoGebra</i>	158
Apéndice N <i>Solución dada por una estudiante a ejercicio del postest</i>	159

Introducción

La matemática y sus ramas afines, entre las que se encuentran el Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica, centran en gran medida sus procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la implementación de la resolución de problemas, la cual en la actualidad a nivel mundial se considera como una línea de investigación dentro del campo de la Educación Matemática (Santos, 2007, 2013, 2016; Santos y Moreno, 2013).

Este trabajo de investigación aplicada es una propuesta de instrumentación e instrumentalización del software de geometría dinámico GeoGebra, con el fin de ser usado como herramienta mediadora para la resolución de problemas. El presente documento se encuentra dividido en cinco capítulos.

El planteamiento y justificación del problema: muestra una descripción de la situación problemática contextualizada en el curso de primera matrícula de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica – ATGA - de la ECBTI UNAD; donde se evidencian bajos índices de aprobación y altos indicadores de deserción. En este curso, su dificultad al momento de resolver problemas radica en: la dificultad en las heurísticas que se enseñan, la ausencia de una didáctica donde se promueva los conceptos matemáticos mediados en tecnologías digitales y la no comprensión de los conceptos matemáticos debido a una enseñanza tradicional.

En el Marco Teórico: se hace una descripción de los antecedentes de esta investigación, partiendo de una inspección de fuentes bibliográficas de índole internacional y nacional y concernientes con las dificultades presentadas por los estudiantes de educación superior cuando deben resolver problemas matemáticos, así como la didáctica de Cuevas y Pluvinage y la importancia de la Génesis Instrumental en los procesos de cimentación del conocimiento

matemático. En este capítulo también se detalla el Marco Conceptual, donde se abordan aspectos de relevancia como lo son los pensamientos matemáticos y el pensamiento matemático aplicado.

En el Diseño Metodológico: se plantea un enfoque mixto en el cual inicialmente se valoró la información de tipo cualitativa. En particular, se diseñaron y aplicaron tres instrumentos de medición: prueba diagnóstica, un pretest y un postest, con el fin de medir y analizar de forma cualitativa y cuantitativa la manera como los estudiantes tomados como muestra resolvían situaciones problemas, antes y después de encuentros virtuales orientados a la instrumentación e instrumentalización de un software de geometría dinámico, lo cual promovía el uso de heurísticas distintas a las habitualmente aplicadas.

En el Análisis y Discusión de resultados: se muestran los resultados cuantitativos y cualitativos de forma separada, de la prueba diagnóstica, del pretest y del postest y seguidamente se efectúa una confrontación entre el pretest y el postest, para que a través de una discusión se considere el nivel de favorabilidad otorgada a la instrumentalización dada por los estudiantes en la resolución de problemas mediados en el uso de un software de geometría dinámico GeoGebra.

Finalmente, las Conclusiones y Recomendaciones: exponen los alcances logrados por medio de la aplicación este trabajo de investigación; así como también las recomendaciones que el autor considera pertinente para futuras investigaciones que se deriven de esta en el ámbito de la Educación Matemática.

Planteamiento y Justificación del Problema

Se realizará una descripción del planteamiento del problema, iniciando de un análisis de deserción en el Curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (ATGA), impartida en estudiantes adscritos a la Escuela de Ciencias Básicas, Tecnologías e Ingenierías- ECBTI de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia- UNAD, examinando las dificultades a nivel cognitivo y didáctico, con el fin de establecer un interrogante a dicha problemática y luego conseguir plantear una propuesta de investigación.

Contexto de Resultados de Pruebas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica a Nivel Internacional y Local

Tres de las ramas de las matemáticas llaman la atención por sus innumerables aplicaciones en la ingeniería y tecnologías, son el Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (Sullivan, 1997; Cruz y Mariño, 1999; De Oteyza et al, 2001; Díaz, 2009; Villamizar, 2014).

Al respecto, a nivel internacional la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) a través de su Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) evalúa los conocimientos y destrezas de alumnos de 15 años en las áreas de matemáticas, lectura y ciencias. Uno de los objetivos planteados por estas pruebas PISA es explorar qué tanto los estudiantes están en la capacidad de resolver problemas complejos, aplicar su pensamiento crítico y comunicarse de manera eficaz. Esto a su vez ofrece información acerca de la eficiencia de los sistemas educativos y de qué tanto están preparando a los estudiantes para afrontar los retos de la vida diaria y su nivel de éxito a futuro. Dichas pruebas PISA, reflejan que entre los años 2018 y 2022, el promedio del rendimiento en el área de matemáticas en los países adscritos

a la OCDE disminuyó 15 puntos, marcando una gran probabilidad de tendencia a seguir decayendo.

En el año 2006, Colombia participa por primera vez en las pruebas PISA, y a través de la comparación con resultados a nivel internacional, los encargados de formular políticas educativas en Colombia pueden ilustrarse y tienen la posibilidad de tomar como referentes las políticas y experiencias de otros países de la OCDE. En Colombia, a diferencia de otros países de la OCDE, notablemente ha sostenido estables los resultados durante un extenso lapso de tiempo. En 2018, sus resultados fueron 391 en matemáticas; mientras que en 2022 en matemáticas obtuvo 383 puntos (OCDE, 2022).

Actualmente, Colombia ocupa el puesto 58 en la lista de resultados. Según el informe de las Pruebas PISA de 2022 de la OCDE (2022), solo el 29 % de los estudiantes colombianos lograron al menos el Nivel 2, que representa un rendimiento básico en matemáticas, lo que está por debajo del promedio de los países de la OCDE, que es del 69 %. En este nivel, los estudiantes son capaces de "interpretar y reconocer, sin instrucciones explícitas, cómo representar matemáticamente una situación sencilla, como comparar distancias en dos rutas alternativas o convertir precios entre diferentes monedas" (p. 2).

Cabe destacar que, un mínimo número de estudiantes colombianos estuvieron en el grupo de los mejores puntajes en matemáticas, lo cual representa que se ubicaron en el Nivel 5 o 6 de la prueba de matemáticas PISA (media de la OCDE: 9 %). En estos niveles, los alumnos poseen la capacidad de modelar situaciones matemáticas complejas y logran realizar la selección, comparación y evaluación de técnicas y estrategias convenientes en la resolución de problemas para poder tratarlas. Únicamente, en 16 de las 81 naciones que en el 2022 participaron en la prueba PISA, más del 10 % de los estudiantes se situaron en el Nivel 5 o 6 de desempeño

(OCDE, 2022). Todo lo expuesto anteriormente, evidencia que a nivel internacional, el nivel de matemáticas en Colombia es básico, y que está por debajo del nivel de muchos países latinoamericanos en cuanto a temas relativos al Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica.

Por otra parte, a nivel local, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación (ICFES), reporta a través de las Pruebas Saber 11, que, si bien entre el 2016 y el 2019 se presentó una caída continua en el puntaje global, entre el año 2021 y el 2023 se registró un favorable incremento en el puntaje promedio año a año. De tal modo que para el 2023, el puntaje promedio para los estudiantes que presentaron dicha prueba de estado fue de 252,6 puntos. Para el área de matemáticas, en el 2023, el 46,2% de los escolares se situaron en el nivel de desempeño 3 y el 6,1% en el nivel 4, para un adherido del 52,3%. ICFES (2023).

Cabe destacar que el nivel 3 evaluado por el ICFES en sus pruebas SABER 11, aborda entre sus competencias la capacidad que tiene un estudiante para seleccionar la información imprescindible para la resolución de problemas que envuelven características medibles del grupo de figuras geométricas básicas, tales como: los triángulos, los cuadriláteros y las circunferencias. Mientras que, el nivel 4 contempla entre sus competencias el que un estudiante resuelva situaciones problemas que requieran descifrar información de eventos dependientes entre sí. ICFES (2023).

Además, el ICFES (2023), indicó que el promedio del puntaje general para ese año en la Prueba Saber Pro fue de 145 puntos, siendo este resultado considerado de comportamiento constante desde el año 2021. En cuanto a los resultados obtenidos en el examen Saber TyT, el promedio global fue de 93 puntos, siendo 4 puntos por encima al obtenido en 2022. En relación a

los resultados por área de conocimiento en el examen Saber Pro, el área de Matemáticas fue el área con el mayor promedio del puntaje alcanzando 163 puntos.

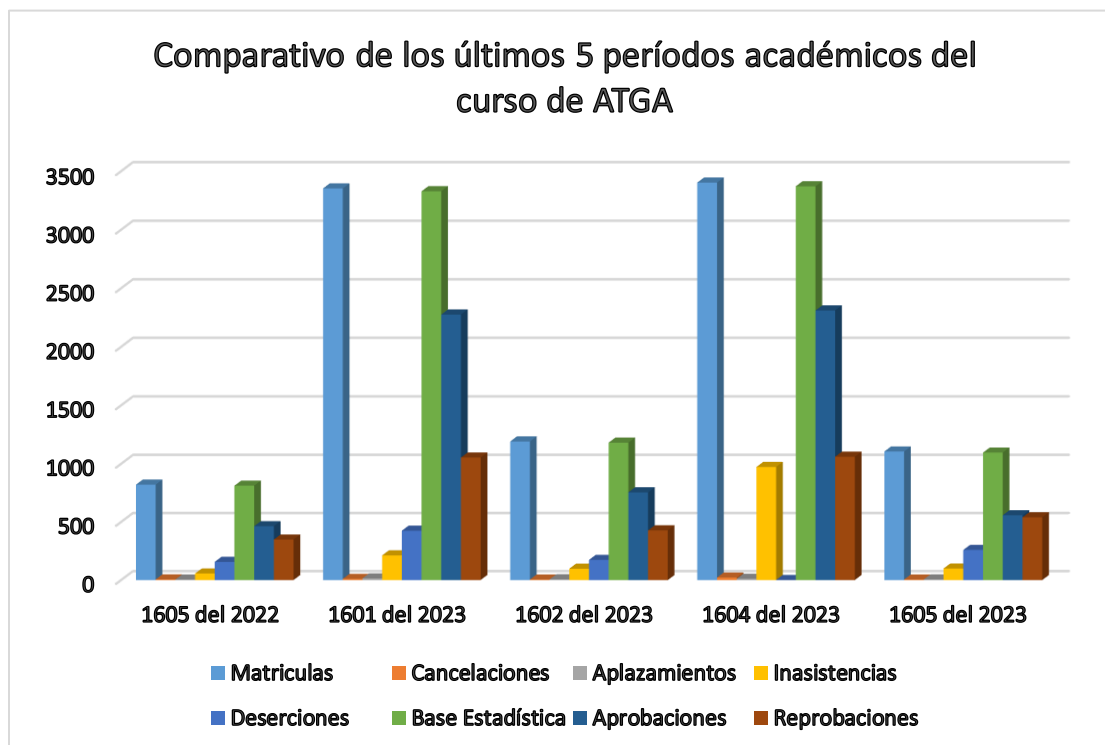
Continuando con el análisis de resultados, a nivel local, las ramas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica se han consolidado en la Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD en un curso de primera matrícula, transversal y a la vez de carácter imperativo a nivel curricular en los programas de tecnologías e ingenierías de la Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingenierías - ECBTI; dicho curso se halla inscrito en el campo de formación interdisciplinaria básico común en la unidad de formación de Ciencias Básicas, es de carácter teórico de tres (3) créditos académicos y está esbozado para ejecutarse durante 16 semanas.

Datos reportados por la ECBTI- UNAD (2024), indican elevados índices de reprobación y deserción durante los últimos cinco períodos académicos, en promedio el 38,27 % de los estudiantes matriculados en el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (ATGA) reprueban, con un promedio de calificación de 2,7 en una graduación de 0 a 5, tomando a 3.0 como la calificación mínima de aprobación. Por otra parte, el 61,73 % de los estudiantes matriculados aprobaron el curso.

En la Figura 1, se aprecia en detalle los datos comparativos entre los estudiantes que se matriculan, cancelan, aplazan, no asisten, desertan, aprueban y/o reprueban en el curso de ATGA en los últimos 5 períodos académicos de la UNAD; desde el período 1605 del 2022 hasta el período académico 1605 del 2023.

Figura 1

Comparativo de las matrículas, cancelaciones, aplazamientos, inasistencias, deserciones, base estadística, aprobaciones y reprobaciones en los últimos 5 períodos académicos (1605 del 2022 al 1605 del 2023) del curso de ATGA.

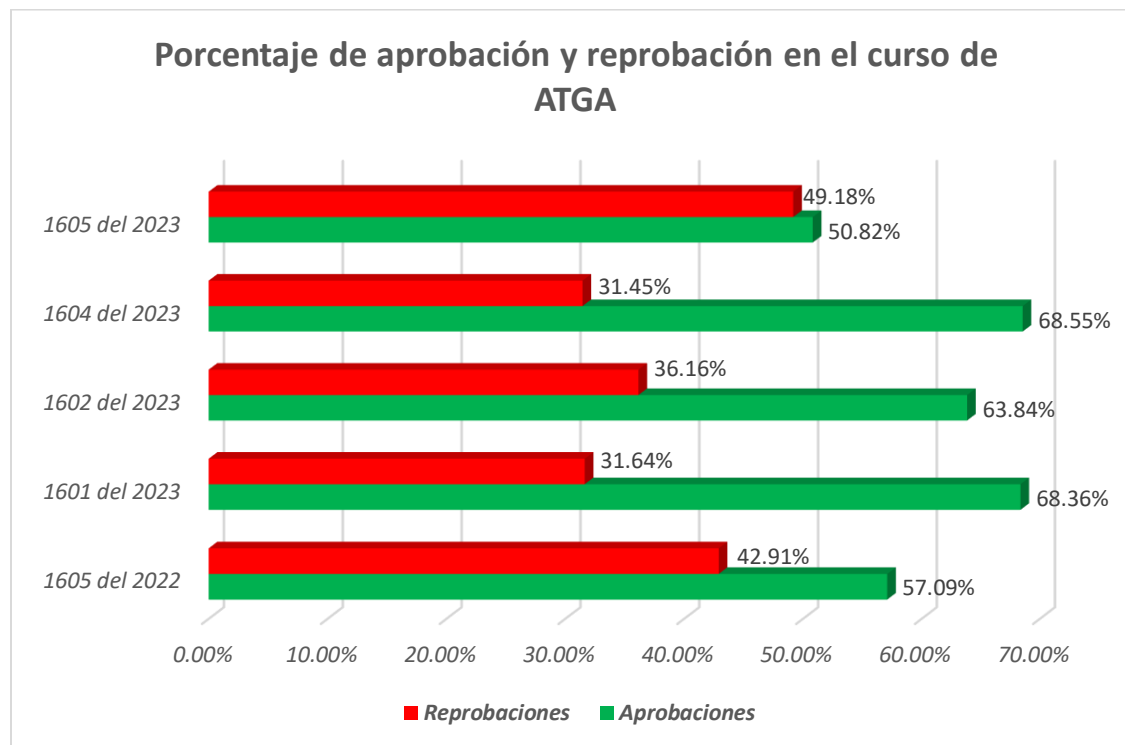


Nota. La Base Estadística se obtiene de sustraer del número de estudiantes matriculados los estudiantes que cancelaron y los que aplazaron el curso de ATGA.

La Figura 2, especifica los valores porcentuales de aprobación y reprobación del curso de ATGA, para los 5 períodos académicos tomados como referentes para este trabajo de investigación. Cabe destacar que el actual director del curso ATGA manifiesta que, aunque no se cuenta con un estudio o informe previo acerca de los causales de los elevados índices de reprobación y deserción en el curso, el director considera que dichas cifras negativas se deban a factores tales como: el ingreso a los estudios universitarios en la UNAD con el único fin de acceder a beneficios gubernamentales, a estudiantes ubicados en zonas geográficamente apartadas y también, a la conectividad defectuosa en algunas regiones.

Figura 2

Comparativo de los porcentajes de aprobaciones y reprobaciones en los últimos 5 períodos académicos (1605 del 2022 al 1605 del 2023) del curso de ATGA.

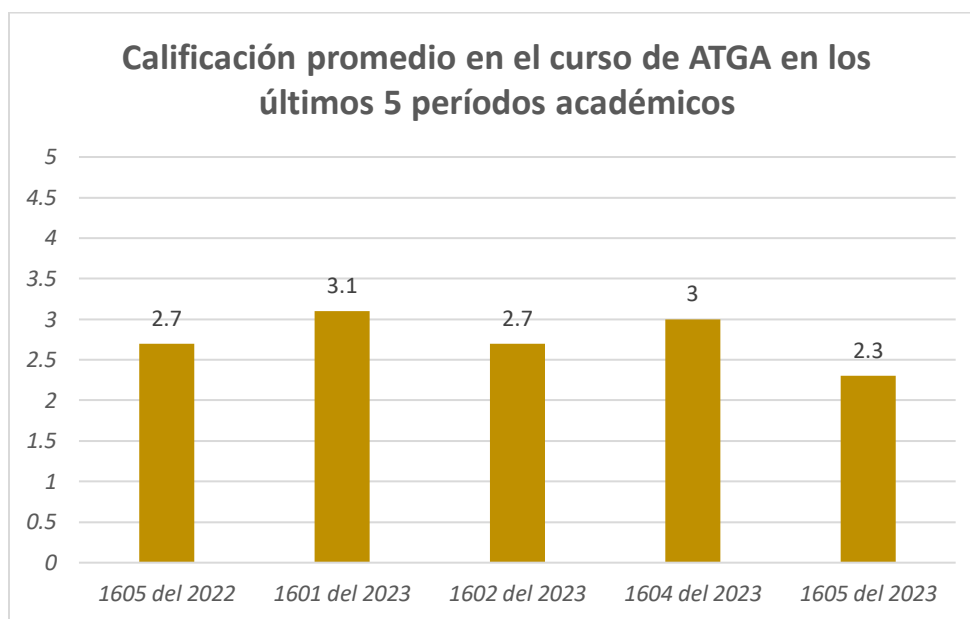


Nota. Los porcentajes de aprobación y reprobación referenciados, se obtienen a partir de la Base Estadística.

Tomando como referente las Bases Estadísticas; es decir, el número de estudiantes matriculados y restándole los estudiantes que cancelaron y aplazaron el curso de ATGA, la Figura 3, muestra el comparativo de las calificaciones finales promedio conseguidas por los alumnos en los cinco períodos académicos relacionados en las Figuras 1 y 2.

Figura 3

Comparativo de calificaciones promedio de los últimos 5 períodos académicos (1605 del 2022 al 1605 del 2023) del curso de ATGA.



Nota. En una graduación de 0 a 5, considerando 3.0 la mínima calificación aprobatoria.

En la Figura 3, se recopilan las calificaciones promedio de los últimos 5 períodos académicos del curso de ATGA, las cuales se encuentran en el umbral de 2,3 a 3,1 y reflejan los resultados poco favorables que han obtenido los estudiantes que abordan este curso de la ECBTI UNAD.

Por consiguiente, se aprecia que, en los 5 períodos académicos analizados, el porcentaje de estudiantes que cancelaron o aplazaron el curso de ATGA no superan el 1 % y que el porcentaje de deserción del curso de ATGA en los 5 períodos está entre el 12,64 % y 23,43 %. Además, el porcentaje de aprobación en los 5 períodos está entre el 50,82 % y 68,54 % ; mientras que el porcentaje de reprobación 31,41 % y 49,17 %.

Las cifras anteriores pueden darse por diversos factores, algunos ajenos al objetivo de la presente investigación, tales como: falta de dedicación escolar, problemas personales, dificultad en adaptarse a la modalidad virtual a distancia, falta de tiempo, entre otras. En la presente

investigación, se tratará de analizar aquellas dificultades, referentes a la comprensión y resolución de las actividades donde se ponen de manifiesto habilidades de diversos pensamientos matemáticos, tales como: el algebraico, aritmético, de medición y el geométrico, que en general se puede relacionar con los obstáculos didácticos, epistemológicos y/o cognitivos al momento de resolver problemas, que a continuación analizaremos.

Dificultades y/o Conflictos presentes en la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica

Al hacer mención de dificultades y/o conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se hace referencia respectivamente a la manera como se gestiona en la apropiación el conocimiento matemático (obstáculos didácticos), y aquellos inconvenientes de tipo cognitivo que poseen los estudiantes para vislumbrar los diversos aspectos del Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

Según Díaz (2009), argumenta que a través de la aplicación de una prueba encontró que los escolares que se ubicaron en el nivel inferior en temas de álgebra tenían dificultad en ejercicios operativos. Mientras que Booth (1984), analiza que los conflictos en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes se atribuyen a la naturaleza y significación del conglomerado de símbolos y letras, además, la dificultad en la comprensión de las operaciones aritméticas, la inadecuada usanza de fórmulas, reglas y procedimientos, agrega que la mayoría de errores se producen en la transformación conceptual de la aritmética a expresiones algebraicas, y otros en las erróneas divulgaciones sobre operadores o números.

Socas (1989), describe una clasificación de los errores que los estudiantes cometen cuando tienen contacto con el lenguaje algebraico, tales como:

1. Errores de tipo algebraico presentes en la Aritmética: errores referentes al incorrecto uso de la propiedad distributiva; además, el conjunto de errores relacionados con la utilización de números recíprocos y equivocaciones al cancelar términos.
2. Errores de carácter algebraico correspondientes a las características específicas del Lenguaje algebraico: se identifican por ser de naturaleza rigurosamente algebraica y no tienen relación manifiesta en la Aritmética (operaciones, estructuras y procesos). (p. 23),

Con relación al campo de la Trigonometría, Montiel (2006) describe que la dificultad en esta rama de las Matemáticas, radica en la transición de las representaciones y objetos matemáticos en los contextos de la Trigonometría del triángulo, su relación con la Trigonometría originada en el círculo y la Trigonometría analítica.

Algunos investigadores relacionan los inconvenientes en el aprendizaje de las matemáticas y en particular de la Trigonometría, con los denominadas misconceptions o errores inadecuados, al respecto, Gur (2009) reflexiona, que el principio de los errores de los estudiantes en Trigonometría se cimentan en las concepciones erróneas y en un grupo de escollos, tales como: la inadecuada utilización de la información dada, la interpretación errónea del lenguaje natural, infundadas deducciones lógicas, así como una serie de definiciones alteradas y los comunes errores técnico-mecánicos.

En cuanto a las dificultades de la Geometría Analítica, Cruz y Mariño (1999) mencionan:

... en los estudios sobre la educación matemática para los estudiantes que incursionan en la educación superior, se ha observado que los alumnos solo saben memorizar las ecuaciones que representan cada una de las cónicas, algunos logran identificar sus elementos y un bajo número están en capacidad de aplicar fórmulas para buscar algorítmicamente sus elementos. Esto no demuestra que hayan interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas (p. 15).

Villamizar (2014) argumenta que una de las dificultades que obstaculiza la enseñanza de la Geometría Analítica es una fuerte inclinación hacia lo analítico, dejando un desequilibrio con la parte geométrica, lo cual, genera como consecuencia la pérdida de la intuición geométrica que no es sencillo visualizar con las fórmulas algebraicas. Por otra parte, los estudiantes tienden a aplicar fórmulas algebraicas sin sentido, y sin relacionarlas con los registros de representación geométrica. Además, el investigador sostiene que la utilización de un software de Geometría Dinámica, promueve notables avances en el desarrollo del pensamiento geométrico relacionado con el pensamiento algebraico (pensamiento variacional) de una manera dinámica.

De manera general, Socas (1997) considera una serie de cinco comienzos distintos de las dificultades que poseen los estudiantes en la resolución de problemas, y por consiguiente en la edificación del conocimiento matemático que son afines con: el nivel de complejidad de los objetos matemáticos, las diferenciaciones de los procesos implícitos en el pensamiento matemático, los métodos y técnicas de enseñanza utilizados para instruir en matemáticas, el desarrollo cognitivo de los estudiantes y sus actitudes afectivas y emocionales frente a las matemáticas y ramas afines.

Cuevas y Pluvillage (2003) y Villamizar (2014) argumentan que una de los obstáculos que ocasionan impases en la enseñanza Matemáticas radica en la aprehensión de los conceptos matemáticos, es decir, los alumnos se inclinan por aprender de memoria procedimientos algebraicos que no poseen sentido, que adquieren de manera influenciada por la metodología tradicional en que enseñan los maestros, lo cual es un evidente obstáculo didáctico, reflejado en que no se proponen situaciones problema en las cuales los estudiantes apliquen los conceptos matemáticos.

De acuerdo con Santos (2016), la resolución de situaciones problemas matemáticos se ha ido estableciendo como un extenso campo de investigación que se concentra en examinar hasta

qué punto las actividades concernientes a la resolución de problemas ejercen un papel decisivo en la comprensión de los estudiantes y uso de su conocimiento matemático. Los problemas matemáticos se consideran fundamentales en el ejercicio de la docencia en matemática para desarrollar la disciplina y fomentar el aprendizaje en los alumnos, no obstante, otra de las dificultades de las complicaciones, radica en no tener un método eficiente para aplicarlo al momento de resolver problemas.

Cuando se han realizado exploraciones enfocadas en la resolución de situaciones problemas en el ámbito de la educación y enseñanza de las matemáticas, se ha llegado a múltiples reflexiones a nivel internacional, y como producto de las mismas, se han exhibido variados planteamientos que tienen implicaciones y confluyen hacia una ruta en común en la enseñanza del Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

Toda la problemática anterior, puede relacionarse con el variado número de obstáculos y dificultades al momento de dar solución a problemas donde están de manifiesto los pensamientos matemáticos; que son enunciados por el MEN (2006) como: numérico (enunciado en el presente trabajo como aritmético), espacial (enunciado en el presente trabajo como geométrico), métrico (se enunciará de igual manera), pensamiento variacional y de sistemas algebraicos y analíticos (el cuál se hará referencia en el presente trabajo como algebraico o analítico), y pensamiento aleatorio (el cual no será tratado en la presente investigación por ser ajeno al curso que se va a tratar con la muestra) algebraico, métrico, geométrico.

En conclusión, en la problemática abordada, se identifica que en los mecanismos y/o procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y en particular de ramas como el Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica, radica en lo siguiente:

- La dificultad en las heurísticas para la resolución de problemas.

- La ausencia de una didáctica donde se propongan situaciones problema para aplicar los conceptos matemáticos.
- La no comprensión de los conceptos matemáticos debido a una enseñanza tradicional, basada en el aprendizaje memorístico de conceptos y la aplicación de fórmulas o procesos sin sentido.
- La dificultad a nivel de conocimientos que implica cada uno de los pensamientos matemáticos, como realizar operaciones de tipo aritmético, algebraico y reconocer propiedades geométricas.

Debido a la problemática expuesta que se refleja en los bajos índices de aprobación y altos indicadores de deserción del curso de primera matrícula ATGA de la ECBTI UNAD, surge el siguiente cuestionamiento.

Pregunta de Investigación

¿Cómo promover en estudiantes de educación superior y a distancia, el desarrollo de heurísticas para potenciar habilidades matemáticas que permitan la resolución de problemas en contexto?

Justificación

Las matemáticas juegan un papel esencial en la resolución de problemas cotidianos y por ende en la toma de decisiones informadas en la totalidad de las ciencias del conocimiento humano, es decir, las ciencias en parte permiten hacer sus demostraciones a través de las matemáticas, siendo la mejor herramienta para su estudio como en la modelización (Villamizar, 2018; Villamizar et al., 2020). Su utilidad se extiende a múltiples aspectos de la vida diaria, incluyendo: las finanzas personales, las compras y ventas, los viajes, las situaciones del hogar, las actividades deportivas, la tecnología, la educación y el aprendizaje, y carreras profesionales como la arquitectura, la física y las ingenierías (Villamizar, 2014).

Partiendo del anterior argumento, las Matemáticas es considerada como uno de los ejes principales en los que se sustenta el currículo en los primeros años de escolaridad en Colombia (MEN, 1998), siendo las matemáticas no solo contempladas como una valiosa herramienta al momento de resolver problemas específicos, sino que igualmente fomentan un enfoque analítico y crítico ante los desafíos diarios, mejorando nuestras habilidades de razonamiento y toma de decisiones, sin embargo, el resolver problemas cotidianos o en contexto con la matemática, exige al alumno el progreso en habilidades y competencias matemáticas, relacionadas con diversos pensamientos matemáticos, tales como: el algebraico, aritmético y geométrico, por citar los más presentes en un curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica; además, exige otras habilidades como la interpretación del mismo problema.

En la resolución de un problema contextualizado, existe una relación entre la interpretación del mismo y el cálculo más adecuado para su resolución, cuyas operaciones apropiadas son dadas a conocer por el contexto del problema. En muchos problemas, la resolución exige un proceso que no siempre es único, de hecho, las operaciones no siempre son

desarrolladas de manera mental sino mediadas con dispositivos digitales. El MEN (1998)

menciona que:

El pensamiento numérico involucra la acción de reconocer que hay muchas estrategias diferentes para resolver un problema. La formulación y aplicación de una estrategia alternativa es la solución adecuada cuando una estrategia inicial parece ser improductiva. Esta tendencia a abordar un problema de varias maneras permite comparar varios enfoques antes de tomar una decisión definitiva o encaminarse en una sola táctica. (p. 36).

Lo anterior deja en evidencia que en la resolución de problemas coexisten diversas alternativas para llegar a la solución de un determinado problema, además que es considerado por Cuevas y Pluinage (2003) como un elemento didáctico, expresando que, el estudiante tiene a su disposición una variedad de soluciones, es decir, cuando se presente un método de resolución a un problema, se debe procurar ofrecer una solución alternativa en lugar de imponer una sola. Las diferentes formas o caminos con sus pasos o procedimientos para resolver un problema, es lo que se denomina heurística (Santos, 2007), sin embargo, independiente del camino que elija o heurística, la resolución de un problema exige al estudiante un encadenamiento de conocimientos matemáticos en los cuales debe ser competente.

Respecto a lo anterior, el MEN (2006), por medio de la promulgación de sus Estándares Básicos de Competencias (EBC), declara que la serie de procesos que manifiestan lo que significa ser competente en el área de matemáticas, son: enunciar, formular y resolver problemas; además el tener la habilidad de comunicar; razonar; crear comparaciones y ejercitar una serie de procedimientos y algoritmos. Considerándose al proceso de formular y resolver problemas el que envuelve a todos los demás de manera diferente en diversos momentos (MEN, 1998).

Como se había mencionado, el resolver problemas exige que el estudiante sea competente matemáticamente teniendo habilidades en diversos pensamientos matemáticos mencionados anteriormente; algunos problemas requieren realizar cálculos numéricos que son habilidades del pensamiento numérico o aritmético, despejes de ecuaciones que son habilidades del pensamiento algebraico variacional, aplicación de propiedades de objetos geométricos que requiere de habilidades del pensamiento geométrico o espacial, entre otros, y es precisamente donde consideramos que la resolución de problemas es una ardua labor matemática, al respecto, Gonzales (1998) describe la resolución de problemas como un desafío intelectual difícil y una habilidad necesaria para el éxito en cualquier actividad humana parcialmente compleja.

Sabiendo de la importancia de la resolución de problemas y los obstáculos a nivel cognitivo que se generan en los estudiantes, las competencias matemáticas que exige, nos lleva a plantear una propuesta mediada con el uso de las tecnologías digitales, de modo que el estudiante pueda explorar y proponer otras formas de resolución, usando los recursos tecnológicos que ayuden a evitar obstáculos en determinados pensamientos matemáticos, así como, poner de manifiesto heurísticas donde se enfoquen no siempre en lo analítico.

Al respecto, Villamizar et al. (2017) plantean actividades didácticas que se puedan desarrollar mediante el uso de un software de geometría dinámica, para lograr la resolución de problemas conexos con la optimización, los cuales se desarrollan de manera analítica. (algebraicamente) usando las derivadas con los criterios de máximos y mínimos, sin embargo, la propuesta de utilizar un software, permite superar los obstáculos que puedan generar el uso de las derivadas de manera analítica, y proponen una heurística cuyo desarrollo se inclina más hacia el pensamiento geométrico, de modo que la solución de un problema es más visual y dinámica para el estudiante, evitando que el software sea únicamente utilizado para comprobar un resultado de

manera inmediata, y así, el uso del mismo esté presente en casi todo el desarrollo de un problema.

Otra bondad del uso de recursos tecnológicos en la Educación Matemática, es lo encontrado con la investigación didáctica, según Borba (2016), el uso adecuado de las TIC posibilita que los alumnos exploren, presuman, verifiquen nexos y propiedades de índole matemática y tengan la posibilidad de ampliar la significancia de conceptos matemáticos, como ocurre en el caso de los de polígonos convexo-cóncavo y el polígono estrellado.

Faggiano (2018), afirma que el incorporar las TIC en las aulas matemáticas conlleva a prescindir de herramientas tales como: la pizarra, el papel y el lápiz, debido a que no son medios opuestos, sino que son complementarios, lo que demuestra los beneficios del uso combinado de materiales manipulativos y medios tecnológicos por parte de los docentes.

Los softwares especializados, como programas de cálculo simbólico y sistemas de geometría dinámica como el caso del software GeoGebra, proporcionan a los alumnos potentes herramientas para examinar y ofrecer solución a diversos problemas matemáticos. Estas herramientas no solo facilitan la realización de cálculos complejos, sino que también permiten experimentar con diferentes enfoques, heurísticas o formas de solucionar problemas.

En consecuencia, las tecnologías digitales incorporadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no solo optimizan la accesibilidad y la comprensión de conceptos de Matemáticas, sino que también promueven un enfoque más interactivo, personalizado y colaborativo que favorezcan la resolución de situaciones y problemas matemáticos (Villamizar, 2014), y no sería la excepción para ser implementado en un curso de Álgebra, Geometría Analítica y Trigonometría.

Hohenwarter y Fuchs (2004), destacan que GeoGebra facilita un enfoque constructivista del aprendizaje al permitir que los estudiantes exploren y visualicen conceptos matemáticos de una manera dinámica. Artigue (2002), subraya la relevancia de las herramientas digitales en el fortalecimiento de habilidades matemáticas, promoviendo una mayor comprensión conceptual. Estos autores sugieren que la implementación del software GeoGebra puede enriquecer la experiencia del aprendizaje matemático, ofreciendo una exploración y comprensión profunda de conceptos de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica; entre otros.

Por consiguiente, la descripción y argumentación que dan forma a la investigación se centra en una propuesta que integre las tecnologías digitales y particularmente GeoGebra, como una herramienta mediadora en la resolución de situaciones problemas en un curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, en el contexto de la educación virtual y a distancia. Una de las hipótesis que se establece es que los alumnos dan resolución a los problemas de forma analítica dejando a un lado el pensamiento espacial o geométrico, y utilizan la tecnologías digital solo como una herramienta de verificación, desaprovechando las potencialidades que se mencionaron anteriormente. Por otra parte, la resolución de un problema bajo una heurística donde predomine el pensamiento algebraico genera distintos obstáculos, de tipo operativo, en algunos casos despejes de variables incluso dificultades o misconcepciones en el pensamiento aritmético.

En este caso la tecnología digital y en particular Geogebra, se convertiría en un instrumento o herramienta de apoyo que ayude a superar los diferentes obstáculos que tenga un estudiante, y la herramienta sea parte del desarrollo de nuevas heurísticas para la resolución de un problema contextualizado; para tal efecto, es necesario que los alumnos se familiaricen con la herramienta tecnológica, dando lugar a una generación instrumental, según Trouche (2004), es

decir, propiciar momentos para la instrumentación e instrumentalización, de modo que, la herramienta tecnológica digital sea indispensable para la actividad del estudiante y parte de sus herramientas al momento que deben resolver problemas.

Particularmente la propuesta de investigación consiste en:

- Diseñar un libro GeoGebra que contenga secuencias didácticas mediante ejercicios dosificados que les posibilite a los alumnos una óptima apropiación de la herramienta GeoGebra.
- Planteamiento de problemas en contexto, donde dichos estudiantes harán uso de la variedad de funciones que brinda GeoGebra, para encontrar solución a situaciones problemas en contexto.
- Previamente, a la aplicación de las actividades usando el software de geometría dinámica, se analizará el conocimiento previo de los estudiantes para estudiar sus heurísticas y compararlas con las heurísticas del desarrollo de problemas en contexto después de promover una génesis instrumental o uso de la herramienta digital.

El autor de este trabajo investigativo, en ejercicio de su labor como tutor del curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (ATGA), considera oportuno llevar a cabo esta labor investigativa en esta sede la UNAD, debido a que no existe en ella un grupo o equipo de docentes-estudiantes que aborden la aplicabilidad y desarrollo de heurísticas que involucren los pensamientos matemáticos a través del uso de este Software educativo.

Objetivos

Se plantean los siguientes logros para llevar a cabo este trabajo de investigación:

Objetivo General

Diseñar un recurso virtual mediado en un software de Geometría Dinámica para promover la resolución de problemas contextualizados en un curso integrado de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, en el marco de la educación virtual y a distancia.

Objetivos Específicos

Identificar las habilidades de los alumnos en los diferentes pensamientos matemáticos y las sus heurísticas en la resolución de problemas relacionados con Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

Crear un libro virtual GeoGebra, que contenga recursos digitales educativos, que orienten la instrumentación en el estudiante.

Proponer espacios para la instrumentalización mediante el planteamiento de secuencias didácticas y la resolución de situaciones problemas contextualizadas.

Marco Referencial

El presente capítulo contempla el estado del arte, en el cual se detallan algunos antecedentes relacionados con el aprendizaje y fomento de los pensamientos matemáticos basado en la resolución de problemas, implementación de secuencias didácticas y actividades diseñadas y aplicadas mediante el uso de las tecnologías digitales y softwares educativos; asimismo, detalla elementos teóricos y conceptos que sustentan este proyecto de investigación aplicado, tales como: los pensamientos matemáticos, la didáctica en la enseñanza de las matemáticas y sus ramas, las secuencias didácticas y las concepciones afines a GeoGebra.

Antecedentes

Como se ha relatado, el obstáculo en la enseñanza del curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica - ATGA a nivel de educación superior de la ECBTI-UNAD se refleja en el conflicto que experimentan los alumnos al momento de resolver situaciones problemas y en gran parte en el deficiente uso de heurísticas para encontrar y luego verificar una solución analítica a través de softwares dinámicos; lo cual puede ocasionar una disminución en el uso de los pensamientos matemáticos y como consecuencia contribuye al aumento de los índices de deserción y reprobación del curso.

Se considera, a la resolución de problemas matemáticos como una línea investigativa, que manifiesta que, el estudiante aprende matemáticas resolviendo problemas (Santos, 2014), y su importancia radica en la inclusión en diversos planes de estudio, para promover diferentes heurísticas o formas de resolver un problema.

Varios estudiosos, han escrito extensamente acerca de la resolución de situaciones problemas matemáticos, aportando diferentes enfoques y metodologías. George Pólya es uno de ellos, reconocido por su obra titulada *Cómo Plantear y Resolver Problemas*, esta ha sido muy

influyente en la enseñanza de las matemáticas. De acuerdo con Pólya (1978), para resolver un problema matemático se deben atravesar cuatro etapas; ellas son: la primera etapa abarca el comprender el problema, preguntándose: "¿Cuál es la incógnita?" ¿Cuál es la información disponible? ¿Cuál y de qué forma es la condición? En este punto, el estudiante debe describir el problema; es en esta fase donde el alumno se enfrenta a la acción de contextualizar el problema, labor que se considera bastante difícil de rebasar, dado que en cuantiosas ocasiones un alumno afronta la búsqueda de poder enunciar procedimientos antes de lograr comprobar si dichos procedimientos pueden realizarse en la naturaleza encuadrada del problema.

La segunda fase consiste en imaginar un plan, para tal fin se hace necesario el sugerir localizar algún problema que tenga similitud con el que se enfrenta. En este instante, se ubica en los preludios de utilizar alguna técnica o metodología. Según Pólya (1978), esta es la manera como se edifica el conocimiento matemático.

Como tercera etapa, se encuentra la ejecución o puesta en marcha del plan. Como ya se tiene claridad acerca del plan, se procede a ejecutar y observar los resultados que se obtengan. Es aquí, donde se debe tener en cuenta lo relativo del tiempo que se emplea en resolver un problema, con frecuencia, se hace necesario que para tener resultados favorables se deba ir y venir entre los procesos de concepción y ejecución del plan.

La cuarta es la etapa final, es la de inspeccionar la solución conseguida. Es aquí, donde surge un gran descubrimiento que se ha derivado de la resolución de un problema. Pólya (1978) indica que en esta fase se procura ampliar la solución dada a un problema, a tal vez algo más trascendental: "¿es posible el utilizar este resultado o método para solucionar otro problema?"

Otro pedagogo que abordó la línea investigativa de la resolución de problema, fue el alemán Arthur Engel, autor de *Problem-Solving Strategies*, un libro muy utilizado en la

formación de docentes y estudiantes para competencias matemáticas internacionales. Engel (1999) ofrece numerosas estrategias o heurísticas para abordar problemas complejos, no rutinarios y desafiantes. Cada capítulo de su obra contempla soluciones completas de los 1.300 problemas recopilados, pero algunas simplemente señalan el camino que conduce a la solución final.

TME (2013) y Santo y Moreno (2013), presentan un compendio de 8 artículos y más de 500 páginas, el escenario actual de trabajos relacionados con la resolución de problemas, con trabajos producidos en Francia, España y México y autores estudiosos precursores como Polya, Schoenfeld y Lesh.

Según Palarea, et al. (2001), los hallazgos de sus investigaciones revelan que los estudiantes tienden a manejar los datos mencionados en el problema como su estrategia principal, sin demostrar una comprensión clara del mismo ni reconocer las relaciones operativas, conceptuales o de proceso involucradas. Con frecuencia proponen soluciones que no son aplicables a las condiciones planteadas, lo cual refleja no solo la ausencia de estrategias cognitivas adecuadas (como métodos heurísticos), sino también una falta de pensamiento crítico.

Diversos estudios de Socas et al. (2009) concluyen que los estudiantes no logran mejorar su rendimiento académico. Se ha observado que el enfoque de la enseñanza de las matemáticas, que prioriza el pensamiento operacional, podría estar generando dificultades y obstáculos en la aplicación de estrategias y heurísticos para resolver problemas. Esto se debe a que dichas situaciones están más vinculadas a un pensamiento estructural e incluso procesual, lo que complica el desarrollo de las competencias matemáticas.

Socas (1997) identifica cinco orígenes distintos de las dificultades que los estudiantes enfrentan en la construcción del conocimiento matemático. Estas se encuentran directamente

vinculadas con: la complejidad de los conceptos matemáticos, las características particulares del pensamiento matemático, los métodos de enseñanza empleados en su aprendizaje, el desarrollo cognitivo de los alumnos y sus actitudes emocionales y afectivas hacia las matemáticas

Además, Socas (2010) señala que muchos estudiantes no son conscientes de que cualquier actividad matemática puede estar enfocada en tres componentes fundamentales del razonamiento matemático: las operaciones, las estructuras y los procesos. Cada uno de estos componentes, a su vez, está determinado por elementos subyacentes específicos: las operaciones por las operaciones, los algoritmos y las técnicas; las estructuras por los conceptos, las propiedades y la estructura; y los procesos por las sustituciones formales, la generalización y la modelización.

De acuerdo con Santos y Moreno (2013), La resolución de problemas matemáticos es un área de estudio que investiga en qué medida las actividades relacionadas con la resolución de problemas son fundamentales para la comprensión y aplicación del conocimiento matemático por parte de los estudiantes. Los problemas matemáticos ocupan un lugar central en la enseñanza de la matemática, ya que son esenciales para el desarrollo de la disciplina y el fomento del aprendizaje en los alumnos.

Las investigaciones pedagógicas en el ámbito de la resolución de problemas matemáticos y la enseñanza de las matemáticas han generado numerosas reflexiones a nivel global. Como resultado de estas reflexiones, han surgido diversas propuestas que convergen en un enfoque común para la enseñanza del Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica. Algunas de estas propuestas incluyen las siguientes:

Una de las exploraciones en la resolución de problemas es la abordada por Socas (2010), propone una revisión exhaustiva de los estudios realizados sobre el lenguaje algebraico,

sugiriendo que se puede abordar desde diferentes enfoques. Uno de estos enfoques incluye los tres principales ámbitos de la didáctica: el epistemológico (historia y epistemología), el cognitivo (cognición y aprendizaje) y el didáctico (enseñanza y desarrollo curricular), con énfasis en los aspectos más importantes de cada uno. Otro enfoque consiste en considerar los temas clave que han influido en las investigaciones de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica en las últimas tres décadas, tales como la relación entre la Aritmética y el Álgebra, así como las dificultades y errores asociados, y la búsqueda de significados para la Trigonometría y Geometría Analítica.

Trabajos investigativos, como los de Wagner y Kieran (1989), plantean que la investigación sobre el pensamiento algebraico busca responder a preguntas como: ¿Qué son capaces de hacer, y qué limitaciones tienen, tanto los estudiantes como los docentes en los diferentes niveles o ciclos del sistema educativo en relación con el Pensamiento Algebraico? De acuerdo con Socas (1997), al considerar los contenidos abordados por estos investigadores, se pueden agrupar estos estudios en tres principales núcleos:

1. El paso del Pensamiento Numérico al Algebraico, examinando los elementos del primero que constituyen la base para el entendimiento de la aritmética generalizada.
2. Los procesos particulares del Pensamiento Algebraico, como lo son: la sustitución formal, la generalización y la modelización
3. La exploración de propuestas que optimicen la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en el nivel de Educación Secundaria..

Afirma Socas (2010), que aproximadamente, alrededor de la década de los ochenta, se empezó a reconocer que los errores son algo común en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra. Esto abrió la posibilidad de investigar los errores no solo a través de cuestionarios

generales, sino también de profundizar en el proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes, como una forma de entender su pensamiento.

Por ejemplo, Brousseau, Davis y Werner (1986) explican que los errores cometidos por los alumnos, en algunos casos, reflejan un modelo coherente; los estudiantes a menudo tienen concepciones incorrectas acerca de los objetos matemáticos. Estas concepciones inadecuadas los conducen con frecuencia a aplicar procedimientos erróneos que no son detectados por los docentes. En ocasiones, los estudiantes emplean métodos propios, ignorando los sugeridos por el profesor. Esto permite identificar posibles causas de error: los errores como resultado de concepciones incorrectas, los errores por la correcta aplicación de un procedimiento inadecuado, y los errores derivados del uso de métodos propios del estudiante, generalmente inconsistentes, entre otros.

Los investigadores y pedagogos mencionados subrayan la relevancia que adquieren los procesos de significación y comunicación en la Educación Matemática, así como los entornos en los que se lleva a cabo la actividad matemática. Estas ideas se reflejan en el diseño de actividades didácticas que buscan integrar tres aspectos clave en el Lenguaje Algebraico: conectar con el conocimiento informal de los estudiantes, preparar a los alumnos para un desarrollo más abstracto del conocimiento formal del Álgebra, y respetar los principios fundamentales de la autonomía intelectual del estudiante.

Para Bednarz y Janvier (1996), en las últimas tres décadas, se ha notado una inclinación hacia el uso de la resolución de problemas contextualizados como fuentes de significado para fomentar y desarrollar en los estudiantes un pensamiento algebraico con sentido. Dentro de estos enfoques destacan dos corrientes: la resolución de problemas en entornos de enculturación y la resolución de problemas mediante actividades o proyectos de tipo Open-ended.

Para ciertos autores como Filloy y Sutherland (1996), muestran que existe una separación errónea cuando se le resta importancia al aspecto relacional del pensamiento matemático frente a su uso instrumental, y viceversa; un ejemplo de esto es cuando se desvincula injustificadamente la resolución de problemas del conocimiento matemático

Radford (1996) enfatiza que el Álgebra se presenta como el lenguaje para expresar y manipular generalidades. En el proceso de generalización, se emplean variables, incógnitas, fórmulas y ecuaciones dentro del contexto de la resolución de problemas. Tanto la generalización como la resolución de problemas son áreas que se complementan en la enseñanza del Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica.

Cabe destacar, las investigaciones realizadas por Montiel (2006) quien presenta tres enfoques para el estudio de la Trigonometría: la Trigonometría del triángulo, la Trigonometría derivada del círculo y la Trigonometría analítica. Cada uno de estos enfoques involucra diferentes objetos matemáticos y representaciones, lo que complica la comprensión de los estudiantes al cambiar de un contexto a otro a medida que avanzan en el currículo.

Subsiguiente a este trabajo investigativo, Montiel (2006) realiza una destacada revisión bibliográfica en la que se examinan investigaciones sobre las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la Trigonometría en secundaria y educación superior, utilizando como fuentes principales una serie de artículos científicos publicados en reconocidas revistas de educación matemática.

Contemporáneamente, otra investigación relevante en el campo de la enseñanza de la Trigonometría es la de Ortiz Galarza (2017), centrada en el análisis de las diversas representaciones mentales que los estudiantes forman sobre las funciones trigonométricas, basándose en teorías cognitivas de representaciones mentales de objetos matemáticos. La autora

afirma que estas representaciones mentales tienen un impacto positivo en la comprensión de las funciones trigonométricas y su aplicación en la modelización de situaciones y en la resolución de problemas.

Otra significativa investigación en el campo de los procesos enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría, fue la abordada por Zeng (2019), quien analizó los procesos matemáticos y la manera de comprender las nociones trigonométricas por parte de los estudiantes durante el acompañamiento instructivo del docente. Basándose en teorías relacionadas con el aprendizaje basado en modelos, el autor identificó las principales dificultades que enfrentan los alumnos en esta área de las Matemáticas y ofreció orientaciones sobre cómo llevar a cabo un acompañamiento tutorial efectivo.

Ramírez (2012), motivado por las preocupaciones de los docentes sobre la identificación de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, realizó una investigación en la que llevó a cabo un análisis epistemológico, didáctico y semiótico de una tipología de errores cometidos por los estudiantes durante el proceso de aprendizaje. Tras recopilar la información, se estableció una primera categoría denominada percepciones de los docentes sobre el error y la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. Esto permitió considerar aspectos clave, como las dificultades conceptuales y la responsabilidad de los docentes en los errores y dificultades, destacando entre ellos los errores conceptuales relacionados con la Aritmética, el Álgebra, la Trigonometría, la representación de objetos matemáticos, la resolución de problemas, y las operaciones y ecuaciones.

De lo anterior, es importante destacar que en muchas investigaciones aplicadas en la Educación Matemática, el uso de tecnologías digitales se ha resaltado como una herramienta poderosa tanto para apoyar como para motivar al estudiante. Estas tecnologías también facilitan

una didáctica basada en los distintos Registros de Representación Semiótica (RRS), permitiendo la visualización de objetos geométricos, la realización de simulaciones en 2D y 3D, y la ejecución de cálculos alfanuméricos. De este modo, la tecnología ayuda a comprender mejor los conceptos y apoya al estudiante en la parte operativa, evitando que la comprensión conceptual se vea afectada. En resumen, convierte la herramienta digital en una herramienta cognitiva que ayuda a superar obstáculos algebraicos y aritméticos, permitiendo que el estudiante se concentre en los conceptos sin que estos se vean comprometidos por confusiones derivadas de conocimientos previos.

Según Artigue (2002), es innegable que la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y en los procesos de aprendizaje ha provocado cambios en los métodos y contenidos de enseñanza. No obstante, es importante evitar la falsa creencia de que su uso solucionará todos los problemas o de que podría sustituir al docente.

En este sentido, la investigación de Arcavi y Hadas (2000) enfatiza que las herramientas tecnológicas tienen poco valor si no se utilizan en actividades que permitan a los estudiantes vincular su uso con los conceptos y objetos matemáticos. Además, estas herramientas no generan conocimientos por sí solas, por lo que es fundamental emplearlas como un recurso de apoyo dentro de un contexto didáctico, orientado a guiar a los estudiantes en la construcción de los conceptos matemáticos.

Desde una perspectiva didáctica, Cuevas y Pluvinage (2009) señalan la importancia de enseñar los conceptos matemáticos a través de problemas contextualizados, es decir, situaciones reales o prácticas. De este modo, en muchas de las investigaciones y propuestas mencionadas, el contexto es un elemento clave en las actividades, ya que brinda significado a los conceptos y objetos matemáticos.

Esta investigación se basará en las experiencias mencionadas por los autores citados y propone el diseño de secuencias didácticas apoyadas en tecnologías digitales, incluyendo software de Geometría Dinámica, dentro del marco de la didáctica de las matemáticas, con el fin de fomentar el uso de heurísticas y el desarrollo del pensamiento matemático en la resolución de problemas del curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica de la ECBTI-UNAD.

Marco Teórico

La resolución de Problemas

Según Santos (2007, 2014, 2016), una manera de aprender matemáticas es mediante la resolución de problemas., donde se pone de manifiesto métodos o formas en que un estudiante resuelve un problema, a lo cual, se le denomina heurística.

Seguidamente, se presentan las teorías que respaldan este trabajo de investigación. Al analizar los antecedentes, se determina que la tecnología, por sí sola, no es un factor suficiente para promover la comprensión de los conceptos matemático; por tal motivo, se acude a contextualizar el ejercicio investigativo considerando los aspectos clave del pensamiento matemático y de la didáctica según Cuevas y Pluinage (2003) para la enseñanza de las matemáticas, junto con el proceso de resolución de problemas para integrar contextos relevantes del Álgebra, la Trigonometría, la Geometría Analítica y las tecnologías digitales, se busca desarrollar secuencias didácticas que fomenten un aprendizaje más activo y experimental de los temas abordados en este curso.

Marco Didáctico: La Didáctica propuesta por Cuevas y Pluinage (2003)

Cuevas (2024), define la didáctica como el arte de enseñar algo a alguien que no lo quiere aprender, lo cual, implica la exploración y aplicación de diferentes formas de transmitir el conocimiento, esto quiere decir, romper con paradigmas, y esquemas tradicionales de enseñanza. La forma de enseñar es relativa y sujeta a las condiciones del medio y época, no es lo mismo enseñar a estudiantes nativos de las tecnologías digitales que a aquellos que mediaron el conocimiento con herramientas no digitales.

La didáctica no debe confundirse con algo divertido o que llame la atención, si bien, se desea captar la atención del estudiante, se debe ir más allá de algo llamativo, y es precisamente donde nos cuestionamos qué debe considerarse como un elemento didáctico.

Cuevas y Pluinage (2003) y Cuevas (2024), mencionan que, para hablar de elementos didácticos, es necesario además, cuestionarnos sobre: ¿Cómo aprende un estudiante?, ¿Qué procesos cognitivos intervienen en el aprendizaje de las matemáticas?, ¿Cómo podrían utilizarse estos procesos para crear propuestas didácticas?. Estas preguntas, entre otras, han permanecido en el ámbito educativo durante mucho tiempo. Docentes, pedagogos e investigadores han trabajado y siguen buscando soluciones, formulando diversas teorías del aprendizaje con este propósito. Del resultado de reflexión de Cuevas y Pluinage (2003), establecieron diferentes elementos didácticos, los cuales serán tenidos en cuenta en el desarrollo de la presente propuesta. Además, el uso de las tecnologías digitales pueden ser parte de un recurso didáctico, más no un elemento teórico didáctico:

La acción por parte de los estudiantes, quien debe ser el protagonista de la actividad en clase, siendo el docente un guía, fomentando una participación activa en el aula, ya sea en entornos virtuales o presenciales. Para lograrlo el estudiante es quien debe apropiarse mediante recursos interactivos de la herramienta tecnológica digital y ejecutar acciones en todo momento; de este modo, el docente será un guía en el desarrollo de sus acciones.

Problemas dosificados, es un elemento que consiste en plantear problemas sencillos y aumentar gradualmente la dificultad de los mismos, de modo que, el estudiantes mediante una secuencia didáctica de pequeños ejercicios, se vaya adaptando al manejo de la herramienta GeoGebra, hasta culminar con la resolución de problemas contextualizados, destacando las habilidades de pensamiento algebraico, espacial y aritmético.

En la didáctica de las matemáticas, se destaca la relevancia de las representaciones para la comprensión de conceptos y objetos matemáticos, como es el caso de los Registros de Representación Semiótica (RRS). Al respecto, Pozo (2007) señala la influencia de estas representaciones RRS en la construcción del conocimiento científico y enfatiza que impactan en los conceptos matemáticos, dado que los objetos matemáticos tienen una naturaleza semiótica.

Según Duval (1998), al interior del proceso cognitivo del pensamiento humano, es esencial poder visualizar un concepto matemático a través de diversos registros de representación que sean adecuados. Del mismo modo, se señala que:

... La relación de distintos registros de representación semiótica (RRS) se considera esencial para una comprensión conceptual de los objetos. Es importante no confundir el objeto con sus representaciones y ser capaz de identificarlo en cada una de sus posibles formas de representación (p. 176).

Para este propósito, GeoGebra permitirá al estudiante explorar y utilizar diferentes representaciones del objeto matemático en la resolución de problemas.

La Génesis Instrumental

A lo largo de su historia, el ser humano ha desarrollado medios y herramientas que le han permitido interactuar con su entorno. Estas herramientas, denominadas artefactos por Trouche (2004), actúan como mediadores de la actividad humana. En otras palabras, para realizar una acción, se requiere de un mediador. Ejemplos de esto incluyen un pintor que emplea pinceles para crear una obra de arte, o un contador que utiliza una hoja de cálculo o una calculadora para gestionar la contabilidad. Los artefactos se convierten en un instrumento cuando es usado por un sujeto y le da un propósito.

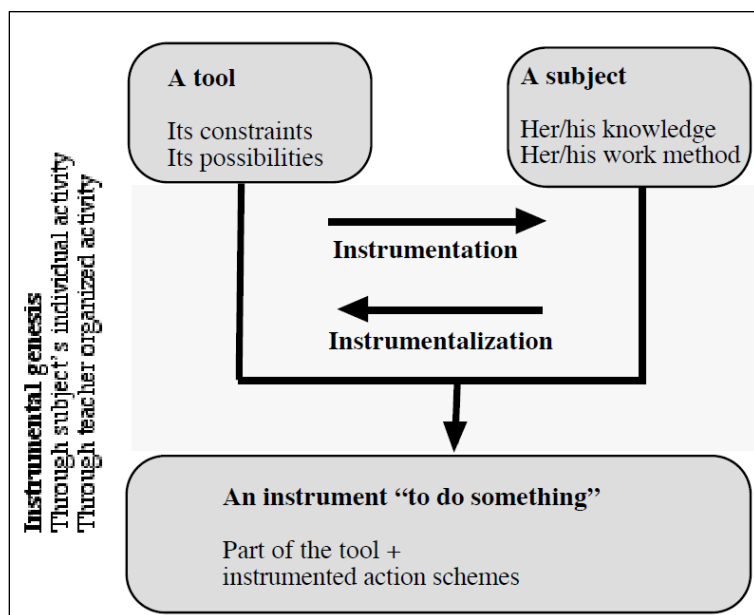
El proceso de convertir un artefacto en un instrumento se le denomina Génesis Instrumental (Trouche, 2004). En la Figura 4 se muestra que este proceso es bidireccional y consta de los siguientes procesos:

Instrumentación: es cuando inicialmente, un sujeto conoce las posibilidades, limitaciones y funciones de un artefacto, adaptándose al mismo.

Instrumentalización: en éste, el sujeto llega a un punto que conoce tanto el artefacto, imprimiéndole su conocimiento para ahora adaptarlo a sus necesidades.

Figura 4

La Génesis Instrumental como dos procesos de Instrumentación e Instrumentalización



Fuente. Trouche, 2004, p. 288

El anterior proceso es fundamental para la incorporación de recursos tecnológicos digitales en la resolución de problemas, porque da cuenta sobre cómo los estudiantes se apropian de una herramienta volviéndola un instrumento esencial para el desarrollo de nuevas heurísticas.

Marco Conceptual

Históricamente, ramas de las Matemáticas, como: el Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica han tenido períodos y etapas cronológicas de germinación, evolución y afianzamiento que han apuntado en múltiples momentos en dar respuesta a problemas relacionados con varias disciplinas del conocimiento humano y que llevaron al desarrollo de lo que actualmente se conoce, se enseña y se aprende de las mismas.

Los orígenes del álgebra se sitúan en el antiguo Egipto y Babilonia, donde lograron resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Herón y Diofante, matemáticos de Alejandría, continuaron con la tradición egipcia y babilónica, lo que llevó a que el libro "Las aritméticas" de Diofante fuera muy bien recibido en el mundo islámico, donde se le denominó la ciencia de la reducción y el equilibrio.

De hecho, el término árabe "al-jabru", que significa "reducción", es la raíz de la palabra álgebra. En el siglo IX, el matemático Al-Juarismi escribió uno de los primeros libros de álgebra en árabe, el cual ofrecía una presentación ordenada de la teoría básica de las ecuaciones, incluyendo varios ejemplos y demostraciones. Más adelante, hacia finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil expuso y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra, resolviendo problemas matemáticos de gran complejidad.

En Grecia, la Escuela Pitagórica del siglo V a.C. adopta los conocimientos de la aritmética algebraica babilónica. Destaca el periodo del Álgebra Geométrica (450 - 300 a.C.), en el que los problemas algebraicos se resuelven mediante construcciones geométricas. Euclides en su tratado "Los Elementos" incluye diversas ecuaciones cuadráticas basadas en los métodos del álgebra geométrica. De igual manera, Teodoro de Cirene y Eudoxo de Cnido contribuyen al desarrollo de esta rama del álgebra.

Ruíz (2003), señala que en Grecia, la separación de la aritmética y el álgebra como disciplinas independientes de la geometría fue un proceso gradual. Arquímedes, Apolonio y Ptolomeo emplearon la aritmética solo con la finalidad de calcular cantidades geométricas. De otra parte, Nicomaco, Herón y Diofanto emplearon la aritmética y el álgebra de una manera claramente separada de la geometría.

En el siglo XIII, la escuela algebraica china alcanzó su apogeo gracias a los trabajos de Qin Jiushao, Li Ye, Yang Hui y Zhu Shi-jie, quienes desarrollaron el método del elemento celeste o tian-yuanshu, una técnica para resolver ecuaciones de grado superior. Durante esta época, el avance del álgebra fue notable, con contribuciones como los sistemas de ecuaciones no lineales, las sumas de sucesiones finitas, el uso del cero, el triángulo de Tartaglia (o Pascal) y los coeficientes binomiales, además de la aplicación de métodos de interpolación que impulsaron una astronomía avanzada.

El origen de la Trigonometría, que se remonta a tiempos muy antiguos, comienza con las civilizaciones babilónica y egipcia. Los babilonios utilizaban las razones trigonométricas y los ángulos del triángulo para realizar mediciones precisas en la agricultura, mientras que los egipcios las aplicaban en la construcción de pirámides. A los egipcios se les atribuye la creación de la medida de ángulos en grados, minutos y segundos, estableciendo así la base del sistema sexagesimal para las medidas angulares.

En el siglo II a.C., durante la Grecia clásica, el astrónomo Hiparco de Nicea elaboró una tabla utilizando cuerdas para resolver triángulos, comenzando con un ángulo de 71° y extendiéndose hasta los 180° . En la tabla se indicaba la longitud de la cuerda determinada por los lados del ángulo central que cortaba una circunferencia de radio r , aunque no se conoce el valor exacto de r que utilizó Hiparco. Bressoud (2010) sugiere que, a través de un análisis histórico, el

inicio del estudio de la Trigonometría se basa en el contexto del círculo trigonométrico, derivado del análisis geométrico de las relaciones entre cuerdas y longitudes de arco.

Para Orhun (2004), la Trigonometría surge como resultado de la combinación de técnicas algebraicas, conceptos geométricos y relaciones trigonométricas. Seguramente, por tal motivo es una parte inseparable del estudio de las matemáticas, que actualmente comienza a enseñarse en la educación secundaria y continúa en la educación superior.

Según Schulz (2014), al ocurrir una integración de los procesos de construcción geométrica en el círculo para introducirnos en el estudio de la Trigonometría, se promueve el avance en la aprehensión de conceptos trigonométricos conforme se va complejizando el estudio de las relaciones en el círculo.

La Geometría Analítica, de origen ancestral griego y cimentado en el Análisis Geométrico, con su rudimentario y poco desarrollado uso de coordenadas en las Cónicas de Apolonio, respaldado por la mecánica algorítmica del Álgebra simbólica de Vieta, han dominado gran parte del pensamiento matemático desde la época de sus creadores, Fermat y Descartes, hasta hoy día. Utilizando de manera sistemática y alterna las coordenadas con el cálculo algebraico, Se ha transformado en una herramienta de tipo algorítmica y gráfica en la resolución de problemas geométricos, ha tomado carácter de ser un método fuerte y universalmente eficiente en la Matemática y sus ramas afines.

Kline (1992) sostiene que la Geometría Analítica transformó profundamente las Matemáticas, ya que desde una perspectiva técnica revolucionó la metodología matemática. Según Kline (1992), para Descartes, la asociación entre ecuaciones y curvas era simplemente un medio para alcanzar un objetivo: resolver problemas relacionados con construcciones

geométricas. Desde un enfoque moderno, el énfasis de Fermat en las ecuaciones de lugares geométricos resulta más relevante.

Los Pensamientos Matemáticos y el Pensamiento Matemático Aplicado

A lo largo de la historia, los progresos en matemáticas y la difusión de su conocimiento han ido de la mano con el desarrollo de la sociedad, impulsados por los retos que ha enfrentado el ser humano, tanto en el ámbito científico y tecnológico como en la vida diaria (Sáenz y Villarreal, 2014).

En este sentido, Leal y Bong (2015) sostienen que es fundamental avivar la habilidad para resolver problemas matemáticos desde los primeros años de la educación primaria. Por ello, es crucial que los docentes de educación inicial, primaria y secundaria posean un adecuado nivel de pensamiento matemático, alineado con enfoques didácticos y metodológicos. Esta perspectiva sigue siendo pedagógicamente válida hoy en día, ya que el valor del desarrollo del pensamiento matemático radica en la secuenciación progresiva y contextualizada de los contenidos, orientada a resolver problemas concretos en la vida diaria.

Gallego y Alfaro (2017), afirman que, al momento de plantear o resolver un problema matemático, surge la necesidad de razonar y analizar su enunciado, lo que implica un procesamiento de datos que impulsa a utilizar diversas estrategias para resolverlo. Por otro lado, Saenz y Villarreal (2014) destacan los desafíos que arrastra el sistema educativo desde el siglo pasado, subrayando la insuficiente capacitación de los docentes tanto en el nivel escolar como en la educación superior, así como la falta de técnicas y estrategias orientadas al desarrollo del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

Garbin (2015), señala que el pensamiento matemático es valioso tanto para la sociedad como para los educadores, ya que facilita la interpretación de cómo las personas entienden los

contenidos y cómo ocurren los procesos de comprensión y de apropiación matemática. Además, destaca que los procesos cognitivos, como la representación, la traslación y la abstracción, desempeñan un papel importante en la resolución de problemas matemáticos.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) (2006) establece que el pensamiento matemático se clasifica en cinco tipos: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medida; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. A partir de esta clasificación del pensamiento matemático, el MEN estipula que los docentes deben estar capacitados para abordar y resolver diversas situaciones problemáticas, con el fin de fomentar el desarrollo del pensamiento matemático en sus estudiantes. Por lo tanto, esta división se considera como los cinco pilares fundamentales de la formación docente en ciencias, y se detalla que:

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos consisten en la habilidad para comprender y trabajar con números y conceptos matemáticos. Incluye un conjunto de destrezas y estrategias que permiten entender y resolver problemas vinculados a números y cálculos. Según Díaz y Díaz (2018), es una de las primeras habilidades que se adquieren en la infancia, pero también una de las que más dificultades presenta cuando no se tiene claridad sobre la operación adecuada o el sistema numérico en uso.

El pensamiento espacial y sistemas geométricos se corresponde con la capacidad de asimilar y visualizar figuras y objetos en el espacio. Incluye conceptos como: ángulos, áreas, volúmenes, y proporciones, entre otros.

El pensamiento métrico y los sistemas de medidas, según la UNAL (2019), se refieren a la comprensión que posee una persona sobre las magnitudes y cantidades, así como su capacidad para medirlas y utilizar de manera flexible los sistemas de medidas en diversas circunstancias.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, también conocido como pensamiento probabilístico, se vincula con la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, azar o cuando no se cuenta con información confiable, lo que impide predecir con certeza los resultados. Este tipo de pensamiento abarca actividades como la recolección, análisis e interpretación de datos.

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos se enfocan en las relaciones que existen entre variables y en las formas de resolver ecuaciones. Este tipo de pensamiento abstracto requiere una comprensión sólida del conjunto de propiedades y leyes que componen el Álgebra.

Libro Virtual GeoGebra

Es un recurso virtual dentro de la plataforma de Geogebra, que permite la incorporación de diversas herramientas o recursos interactivos, como applets de Geogebra, videos, documentos pdf, elaboración de cuestionarios, incrustación de imágenes y enlaces de otras páginas web. La interacción con un libro geogebra, puede ser a través de una clase en línea Geogebra o un enlace previamente compartido. (Rubio-Pizorno, 2020).

Secuencias Didácticas

Rodríguez (2014) señala que las secuencias didácticas son un conjunto de actividades consecutivas que siguen un orden lógico en el proceso de enseñanza, y que están respaldadas por modelos de aprendizaje para facilitar la comprensión de los contenidos

Zabala (2008), sostiene que una secuencia didáctica es un conjunto de actividades organizadas, estructuradas y vinculadas entre sí, diseñadas para alcanzar los objetivos educativos. Estas actividades, con un inicio y un final claros, facilitan la adquisición de conocimientos y se convierten en una herramienta eficaz para investigar, reflexionar y mejorar la práctica docente.

Además, Tobón et al. (2010) indica que las secuencias didácticas se consideran un conjunto de actividades de aprendizaje y evaluación, que incluyen diversos recursos y son guiadas por el docente, con el propósito de alcanzar objetivos educativos.

Marco Legal

Se tomaron en consideración las leyes promulgadas por el gobierno colombiano y contempladas en la constitución política de 1991.

El artículo 67 de la Constitución Política de Colombia de 1991, establece que la educación es un derecho fundamental y un servicio público con una función social, cuyo objetivo es promover el acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y otros bienes y valores culturales. Por su parte, los artículos 68 y 70 disponen que la educación debe ser impartida por personas con idoneidad ética y pedagógica, y que debe fomentar la igualdad de oportunidades, así como la formación continua en los ámbitos científico, técnico, artístico y profesional.

Por su parte, la Ley 30, define la educación superior en Colombia como un servicio público cultural que permite el desarrollo integral de las capacidades y aptitudes de las personas, brindada después de la educación media. Entre los principales objetivos de la educación superior se destacan la formación integral de los colombianos, dotándolos de competencias profesionales, investigativas y de servicio social para contribuir a soluciones de calidad a los problemas del

país. Las universidades deben ser vistas como centros de desarrollo científico, económico y tecnológico.

Mediante la Ley 52 de 1981 y la Ley 396 de 1997, se crea y consolida la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD), como una institución pública que ofrece programas académicos basados en una estrategia educativa a distancia, respondiendo a las necesidades locales, regionales, nacionales e internacionales de la sociedad colombiana. Actualmente, su estructura organizacional está compuesta por cuatro sistemas estratégicos (Alta política universitaria, misional, funcional y operacional), cada uno con responsabilidades específicas que aseguran el correcto funcionamiento y la mejora continua del servicio educativo, garantizando su calidad y pertinencia.

Diseño Metodológico

La investigación se llevó a cabo centrada en un enfoque mixto, con un mayor énfasis en el tratamiento cualitativo de la información. Se diseñaron y utilizaron instrumentos de medición, tanto pretest como postest, para realizar una evaluación y análisis cualitativo del uso de los pensamientos matemáticos en la solución de situaciones problema contextualizadas en la vida diaria y con temáticas del curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica de la UNAD, implementadas mediante una serie de secuencias didácticas, la investigación se estructuró en cuatro etapas: exploración, diseño, aplicación de los instrumentos de medición, actividades, y recolección de datos, que se detallan a continuación:

Fase de Exploración

La evolución en los procesos de enseñanza y aprendizaje se encuentran enmarcados en la aplicación de diversos y novedosos recursos y/o herramientas de índole didáctico, que complementan los aportes que un alumno recibe de los libros de texto, las calculadoras, los softwares y los dispositivos tecnológicos que en ayudan en la resolución de problemas coligados al Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica, y que en múltiples ocasiones son catalogados como actividades complejas para los mismos. En la actualidad, es inevitable, el no tener en cuenta el aporte educativo que se encuentra en Internet, que por medio de tutoriales, ejercicios resueltos y problemas propuestos, los estudiantes pueden recibir una orientación práctica que le permitan enfrentar y resolver situaciones propuestas, lo que conlleva en varios momentos el uso de procesos de estudios e indagación.

Se realizó una fase exploratoria en el Centro Comunitario de Atención Virtual (CCAV) de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD Sede Cúcuta, en los programas adscritos a la Escuela de Ciencias Básicas Tecnologías e Ingenierías (ECBTI); entre dichos

programas se encuentran: Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial, Ingeniería en Telecomunicaciones, entre otros; los cuales dentro de sus planes de estudios tienen ofertado el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (ATGA), esto con la finalidad de recopilar información relevante sobre su estructura, el núcleo problémico, los objetivos de formación, la bibliografía y los resultados de aprendizaje esperados.

El curso académico de primera matrícula de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, hace parte del campo de formación interdisciplinar básico común dentro del componente de formación de Ciencias Básicas, es un curso de carácter teórico con tres (3) créditos académicos y está planificado para desarrollarse a lo largo de 16 semanas. Este es un curso transversal para diversos programas ofertados por la UNAD; entre ellos programas de la ECBTI.

El curso de ATGA utiliza la estrategia de Aprendizaje Basado en Tareas (ABT) para el alcance de los resultados de aprendizaje propuestos, y, la aplicabilidad de estos en la resolución de situaciones problemas del entorno del estudiante.

Los contenidos temáticos del curso se dividen en tres (3) unidades. La unidad 1, está encauzada en el Álgebra, cuyas temáticas contemplan los conceptos fundamentales del álgebra, ecuaciones (solución de sistemas de ecuaciones lineales y solución de ecuaciones de segundo grado), inecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, sumatorias y productorias, y sus respectivas aplicaciones en las tecnologías, las ingenierías, la agronomía, la administración y afines.

La unidad 2, contempla contenidos de los principios de la Trigonometría, por medio del análisis de los triángulos, las razones y funciones trigonométricas, y sus aplicaciones en la ingeniería, ciencias agrarias y ciencias experimentales.

La unidad 3, trata temas de Geometría Analítica, como la línea recta y las secciones cónicas, los cuales son fundamentales en múltiples campos, como la astronomía, la física, la ingeniería, el cálculo y la estadística, entre otros.

Este curso de ATGA, proporciona a los estudiantes una base teórica y conceptual que les facilita abordar otros cursos académicos, como Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales. Además, les ayuda a desplegar habilidades de aprendizaje en razonamiento cuantitativo, pensamiento variacional, algebraico y geométrico.

Según el diseño curricular, el propósito de formación de este curso es que el estudiante aplique los principios fundamentales del Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica, por medio de ejercicios que en las guías de actividades se encuentran contextualizados en situaciones cotidianas para la solución de problemas.

El curso académico ha definido tres resultados de aprendizaje, por lo que al concluirlo, el estudiante debe demostrar su habilidad para: utilizar los conceptos fundamentales del Álgebra en la resolución de problemas cotidianos; mostrar su capacidad para seleccionar métodos, leyes y teoremas trigonométricos en la solución de problemas contextualizados; y finalmente, evidenciar su destreza al identificar y manejar, tanto de forma analítica como gráfica, expresiones matemáticas propias de la Geometría Analítica en el modelado de situaciones problemáticas.

Centrado en una estrategia de Aprendizaje Basado en Tareas (ABT), se pretende fomentar el pensamiento crítico a través de la resolución de tareas diseñadas, con el objetivo de desarrollar habilidades específicas del razonamiento matemático. La estrategia gira en torno al desarrollo de seis tareas individuales que dan cumplimiento al propósito de formación planteado en el curso; dichas tareas son:

Tarea 0: Cuestionario en línea de presaberes del curso. Se desarrolla durante las dos primeras semanas y consta de 10 preguntas sobre conocimientos previos en matemática básica con los que el estudiante llega a este curso.

Tarea 1: Álgebra. Se desarrolla entre la semana 3 y 6. Se trata en la solución analítica y su correspondiente verificación por medio de un software dinámico de 5 ejercicios correspondientes a la Unidad 1 Álgebra y además de la sustentación a través de video de uno de estos ejercicios.

Tarea 2: Trigonometría. Se desarrolla entre la semana 7 y 10. Incluye la solución analítica y su correspondiente verificación por medio de un software dinámico de 5 ejercicios correspondientes a la Unidad 2 Trigonometría y además de la sustentación a través de video de uno de estos ejercicios.

Tarea 3: Geometría Analítica. Se desarrolla entre la semana 11 y 14. Solicita los procedimientos de solución analítica y su correspondiente verificación por medio de un software dinámico de 5 ejercicios correspondientes a la Unidad 3 Geometría Analítica.

Tarea 4: Cuestionario en línea sobre las temáticas de la unidad 3 de Geometría analítica. Se desarrolla entre la semana 13 y 14. Consta de 5 preguntas sobre temas de la Unidad 3.

Tarea 5: Cuestionario en línea sobre las temáticas de las tres unidades que componen el curso. Se debe presentar entre las semanas 15 y 16. La actividad se basa en responder un cuestionario o Prueba Objetiva Cerrada (POC) de 25 preguntas sobre las temáticas de las unidades 1, 2 y 3.

Dentro de las estrategias de acompañamiento docente con las que cuentan los estudiantes para ir avanzando en este curso, se hallan: el acompañamiento sincrónico a través de los encuentros CIPAS (Círculos de Interacción de Interacción y Participación Académica y Social),

la atención presencial en centro. y del chat de la aplicación de Microsoft Teams. Además, el acompañamiento asincrónico a través de los foros de discusión y la mensajería interna del curso.

Para concluir, el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (ATGA) se ha caracterizado por un enfoque mecanicista, donde se ha priorizado la práctica algorítmica y algebraica, dejando en segundo plano el pensamiento geométrico como herramienta para la conceptualización de los temas abordados. Esto nos lleva a preguntarnos si, a través de este enfoque, los estudiantes realmente alcanzan una comprensión profunda de los conceptos. De la inspección, surge la posibilidad de que sea necesario fortalecer el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (ATGA) mediante la implementación de una secuencia didáctica basada en heurísticas y apoyada por software dinámico, con el objetivo de mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas utilizando los pensamientos matemáticos.

Fase de Diseño

En esta fase se detallan los instrumentos usados en la medición: diagnóstico, pretest y postest, contextualizadas en situaciones problemas propias del curso de ATGA, y además se incluye el diseño de una secuencia didáctica usando un recurso virtual como propuesta para suscitar la comprensión conceptual de las temáticas tratadas en este curso de primera matrícula de la UNAD.

Diseño de los Instrumentos de Medición: Diagnóstico, Pretest y Postest

El diseño de este tipo de instrumentos se implementa con un grupo de estudiantes, comenzando con un instrumento de diagnóstico, seguida de un pretest, para luego llevar a cabo la intervención mediante una secuencia didáctica. Posteriormente, se aplica un postest, destacando que tanto el pretest como el postest (MacMillan y Schumacher, 2005) son similares, pero se administran en momentos distintos. Esto permite analizar los resultados conseguidos

antes y después de la intervención didáctica, con el fin de evaluar el nivel de comprensión conceptual en temas fundamentales de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

Prueba Diagnóstico

El instrumento de diagnóstico tiene el objetivo definir qué pensamientos matemáticos dominan los estudiantes al proponer situaciones problema. Se diseñaron 12 preguntas con situaciones problema (Anexo A); 10 de las 12 situaciones son de selección múltiple con única respuesta y las 2 restantes abordaron temas relacionados con la aplicación de las tecnologías digitales en el curso de ATGA. Seguidamente, se describe este instrumento de diagnóstico:

La pregunta 1 mide el pensamiento numérico y los sistemas numéricos. La pregunta permite identificar los conocimientos para realizar cálculos mediante las operaciones aritméticas.

1 Si una libreta cuesta \$ 2.500. ¿Cuál de las siguientes expresiones sería útil para calcular el precio de tres docenas y media de esas libretas?

- a. $2500 \times (12 \times 3 \times 10)$ b. $(12 \times 3 \times 2500) - (6 \times 2500)$
 c. $[3 \times (12 \times 2500)] + (6 \times 2500)$ d. $2500 \times (3 \times 12 - 6)$ e. No sé.

La pregunta 2 mide el pensamiento numérico y los sistemas numéricos. La pregunta permite identificar los conocimientos para realizar cálculos mediante las operaciones aritméticas que incluyen la potenciación, radicación y logaritmación.

2. El resultado obtenido al realizar la siguiente operación es:

$$\sqrt{25} + (2^3 - \log_3 9) + [2\sqrt{9} + 1] - 5(2^0)$$

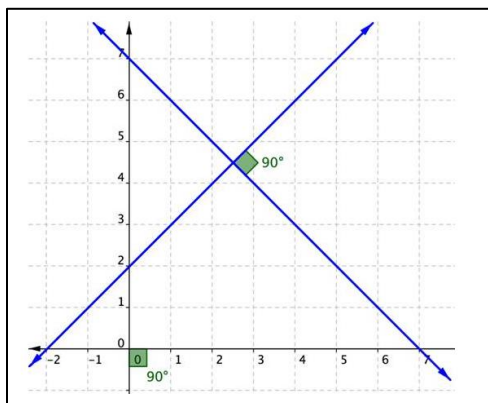
- a. 2 b. 0 c. 13 d. -5 e. No sé.

La pregunta 3 mide el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. La pregunta permite identificar los tipos de rectas y su ubicación en el plano cartesiano.

3. Del par de rectas trazadas en el plano cartesiano adjunto, se puede afirmar que:

Figura 5

Rectas en un plano cartesiano. Gráfica del ítem de la pregunta 3 del diagnóstico



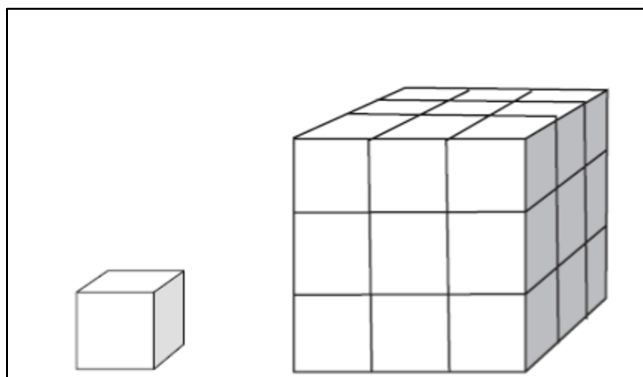
- a. Son rectas paralelas que se cortan en el punto (2.5 , 4.5)
- b. Son rectas secantes; pero no son perpendiculares
- c. Son rectas tangentes que forman un ángulo recto
- d. Son rectas perpendiculares que se cortan en el punto (2.5 , 4.5)
- e. No sé.

La pregunta 4 mide el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. La pregunta permite la identificación de los procesos cognitivos a través de los cuales se crean y manipulan las representaciones mentales de los objetos en el espacio en tres dimensiones.

4. A Juan Diego construye bloques con cubos pequeños, para tal fin dispone de una determinada cantidad de cubos pequeños, usando adhesivo para unirlos y formar otros bloques. De las siguientes expresiones, ¿cuál utilizaría Juan Diego para determinar la cantidad de cubos pequeños necesarios en la construcción del bloque macizo que se muestra en el gráfico?.

Figura 6

Construcción de bloques. Gráfica del ítem de la pregunta 4 del diagnóstico.



- a. $2^3 + 3^2$ b. 3^3 c. $2^4 - 3^0$ d. 3^4 e. No sé.

La pregunta 5 mide el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas. La pregunta permite identificar la relación entre múltiplos y submúltiplos del sistema de medidas de longitud.

5. En la clase de Naturales, se le pide a Lina que recorte un trozo de madera de 1,25 metros; Pero dispone de una cinta métrica dividida en centímetros. ¿Cuántos centímetros debe medir Lina para cumplir con su tarea?

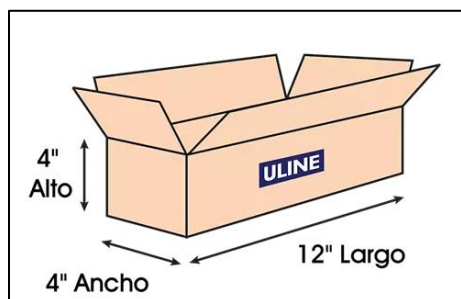
- a. 125 cm b. 1250 cm c. 12,5 cm d. 0,125 cm e. No sé.

La pregunta 6 mide el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas. La pregunta permite identificar la capacidad para estimar volúmenes de cuerpos geométricos.

6. En la sección de empaques de una fábrica de zapatos, se utilizan cajas como las que se muestran en la imagen, cuyas dimensiones están representadas por las variables "l", "a", "h". La expresión algebraica que permite calcular el volumen que ocuparán 100 cajas de esos zapatos es:

Figura 7

Volumen de cuerpos geométricos. Gráfica del ítem de la pregunta 6 del diagnóstico.



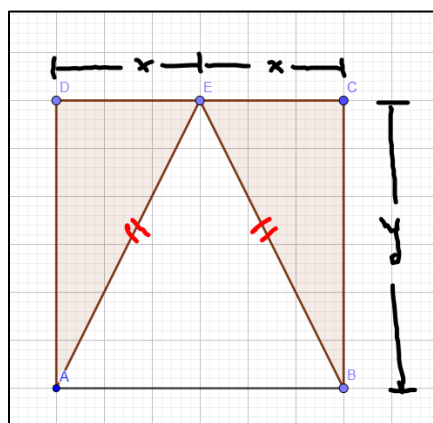
- a. $100 \times (l \times a \times h)$ b. $(h \times a + l) \times 100$ c. $100 \div (l \times a \times h)$ d. $(l \times a \times h) \div 100$ e. No sé.

La pregunta 7 mide el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. La pregunta permite identificar situaciones relacionadas con la interpretación del área de regiones incluidas en determinadas figuras geométricas.

7. Dentro del cuadrado ABCD se encuentra inscrito el triángulo isósceles ABE. Teniendo en cuenta los datos suministrados en la imagen, selecciona la expresión que me permite calcular el valor del área sombreada.

Figura 8

Áreas sombreadas. Gráfica auxiliar de la pregunta 7 del diagnóstico



- a. $y^2 - 3\left(\frac{xy}{2}\right)$ b. $y(y - x)$ c. $x^2 - \frac{y^2}{2}$ d. $x(x - y^2)$ e. No sé.

La pregunta 8 mide el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. La pregunta permite medir la habilidad que tiene el estudiante en plantear y resolver situaciones de la cotidianidad aplicando sistemas de ecuaciones 2×2 .

8. En una nevera hay botellas de agua de 2L y de 3L. Si las 8 botellas que hay representan 19L; además el precio de la botella de 3L excede en \$1.500 el precio de la botella de 2L; pero un día de ofertas por la compra de dos botellas de 3L obsequian una de 2L. ¿Qué datos serán necesarios para hallar el número de botellas de cada tamaño que hay en la nevera?

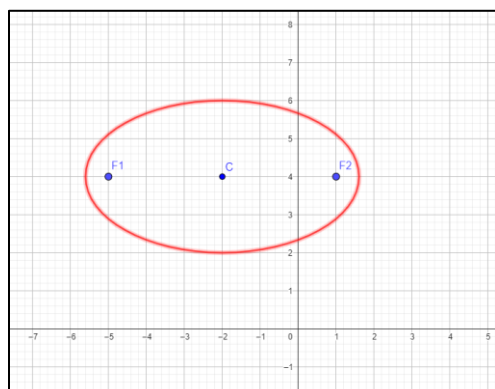
- a. El número total de botellas en la nevera, la diferencia de precio de las botellas de 3L y 2L, la suma de las capacidades de todas las botellas.
- b. La diferencia del costo de las botellas de 3L y 2L, el número de botellas que se pueden guardar en la nevera, la promoción de un día de ofertas.
- c. La capacidad de cada botella, la promoción de un día de ofertas, la diferencia de precio de las botellas de 3L y 2L.
- d. El número total de botellas que hay en la nevera, la capacidad de cada botella, la suma de las capacidades de todas las botellas.
- e. No sé.

La pregunta 9 mide el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. La pregunta permite identificar la capacidad que tiene el estudiante para relacionar una sección cónica, su ubicación en el plano cartesiano y su correspondencia con una expresión matemática.

9. Dada el lugar geométrico mostrado en la imagen. Señala la ecuación que lo representa.

Figura 9

Representación de una sección cónica. Gráfica del ítem de la pregunta 9 del diagnóstico.



- a. $(y + 4)^2 = 9(x - 2)^2$ b. $\frac{(x+2)^2}{13} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ c. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$
 d. $\frac{(x-2)^2}{13} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$ e. No sé.

La pregunta 10 mide el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

Esta pregunta permite medir la capacidad que tiene el estudiante en representar en lenguaje algebraico una situación dada en lenguaje natural.

10. Señala la expresión algebraica que mejor representa el siguiente enunciado: Si el doble de un número se disminuye en 5, el resultado obtenido equivale a la séptima parte del mismo número aumentado en 2.

- a. $\frac{x}{2} - 5 = \frac{x}{7} + 2$ b. $2x + 5 = \frac{x}{7} + 2$ c. $\frac{x}{2} + 5 = \frac{x}{7} - 2$ d. $2x - 5 = \frac{x}{7} + 2$ e. No sé.

La pregunta 11, permite apreciar el uso de herramientas tecnológicas por parte de los alumnos al momento de dar solución a problemas matemáticos.

11. A continuación, marca todas las posibles herramientas tecnológicas que has utilizado:

- a. Excel b. That quiz c. GeoGebra d. Symbolab e. Ninguno de los anteriores.

La pregunta 12, permite estimar el nivel de dominio del software dinámico GeoGebra que los estudiantes manifiestan tener.

12. Si has utilizado el software dinámico GeoGebra. En qué nivel de dominio consideras que te encuentras. (Siendo 1 el menor nivel y 5 el mayor nivel).

- a. Nivel 1 b. Nivel 2 c. Nivel 3 d. Nivel 4 e. Nivel 5.

Pretest

El instrumento del pretest se diseñó con 5 situaciones problemas (Anexo B); de los cuales se les solicitaba a los estudiantes que dieran una solución analítica y una solución o heurística a través usando el software dinámico GeoGebra. A continuación, se describe este instrumento de pretest:

El problema 1, busca estimar la habilidad que posee el estudiante para establecer un modelo algebraico basado en las ecuaciones de segundo grado y así poder determinar las dimensiones de una figura geométrica.

Problema 1:

Una empresa publicitaria fabricante de tarjetas de presentación diseña un modelo de tarjeta de modo que siempre la proporción (cociente) entre el largo y el ancho sea de 1,6; es decir aproximadamente el número áureo.

Figura 10

Imagen de apoyo para problema 1 del pretest.



Fuente. freepik

Determina:

a) Cuáles deben ser las medidas de la tarjeta si su área debe ser de 40 centímetros cuadrados.

b) Si un cliente desea que el largo y el ancho sea de 4 cm, ¿cuál debe ser el largo y el área de la tarjeta para mantener la proporción?

c) Si un cliente desea que el largo de la tarjeta sea de 5 cm, ¿cuál debe ser la medida del ancho y del área para mantener la proporción?

El problema 2, permite identificar la capacidad que tiene el estudiante en resolver triángulos rectángulos, mediante la aplicabilidad de razones trigonométricas básicas y la utilización del Teorema de Pitágoras.

Problema 2:

Dos operarios de una empresa de Telecomunicaciones se encuentran en una zona rural instalando una antena de 40 m de alto. Para soportarla necesitan agregar dos templetas, uno a cada lado de la antena.

Figura 11

Imagen de apoyo para problema 2 del pretest.



Fuente. pnggg

Determina:

a) El ángulo de elevación que debe formar el primer templete con el suelo si su anclaje se encuentra a 5m de la base de la antena.

b) La longitud que debe tener el segundo templete, si este forma un ángulo de 60° con el suelo en su punto de anclaje.

El problema 3, permite analizar la forma de plantear y dar solución a una situación problema de geometría plana de la vida cotidiana, que involucra el que una figura se encuentre inscrita en otra y ello determine sus dimensiones.

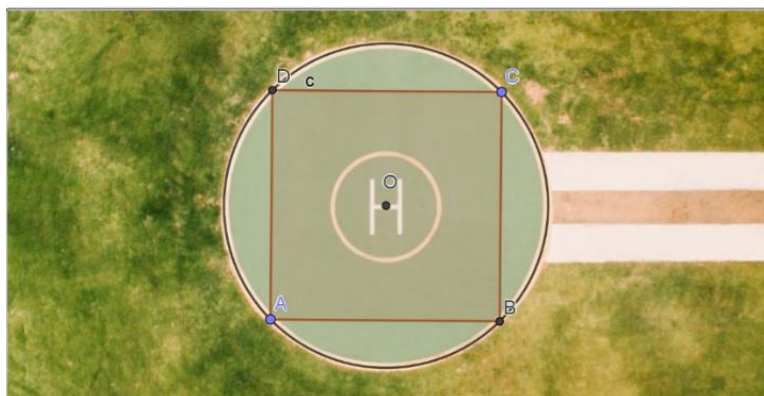
Problema 3:

Sobre una zona verde de forma circular de un batallón, se desea construir un Helipuerto; dentro de dicha zona circular de 20 m de radio estará inscrito un cuadrado cuyos lados delimitaran las zonas de protección al momento del desembarque de las aeronaves.

Determinar las dimensiones que debe tener este cuadrado de protección.

Figura 12

Imagen de apoyo para problema 3 del pretest.



Fuente. machhelicopters

e) A partir de cuantas unidades vendidas existirá ganancias para el propietario de la empresa "Burger Blues".

El problema 5, propicia el reconocer y confrontar la manera como los estudiantes comprenden la situación trigonométrica contextualizada en una sección cónica y que permite efectuar el cálculo de razones trigonométricas fundamentales.

Problema 5:

Dentro de una circunferencia con centro en el origen y de radio 1 cm, se ubica un triángulo rectángulo cuyo ángulo de elevación formado entre el semieje de las "x" y el vértice en el origen es de 60° . Determinar las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente para este ángulo.

Postest

El instrumento del postest se diseñó con 5 situaciones problemas (Anexo C); de los cuales se les solicitaba a los estudiantes que dieran una solución analítica y una solución o heurística a través usando el software dinámico GeoGebra. A continuación, se describe este instrumento de postest:

El problema 1, busca estimar la habilidad que posee el estudiante para establecer un modelo algebraico basado en las ecuaciones de segundo grado y así poder determinar las dimensiones de una figura geométrica.

Problema 1:

Una empresa fabricante de papel diseña un modelo de hoja de cartulina de modo que siempre la proporción (cociente) entre el largo y el ancho sea de 2,5.

Figura 14

Imagen de apoyo para problema 1 del posttest.



Fuente. aceleralastatic.nyc3.cdn.

Determina:

a) Cuáles deben ser las medidas de la hoja de cartulina si su área debe ser de 150 centímetros cuadrados.

b) Si un cliente desea que el largo de la tarjeta sea de 12 cm, ¿cuál debe ser la medida del ancho y del área para mantener la proporción? .

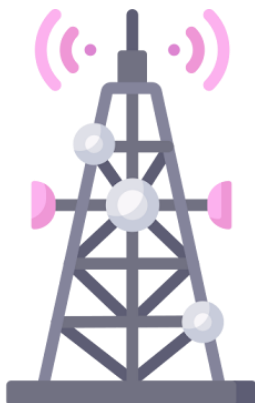
El problema 2, permite identificar la capacidad que tiene el estudiante en resolver triángulos rectángulos, mediante la aplicación de las razones trigonométricas básicas y la utilización del Teorema de Pitágoras.

Problema 2:

Dos operarios de una empresa de Telefonía se encuentran instalando una antena de 25 m de alto. Para soportarla necesitan colocar dos templetes, uno a cada lado de la antena.

Figura 15

Imagen de apoyo para problema 2 del posttest.



Fuente. flaticon

Determina:

a) El ángulo de elevación que debe formar el primer templete con el suelo si su anclaje se encuentra a 9 m de la base de la antena.

b) La longitud que debe tener el segundo templete, si este determina un ángulo de 45° con el suelo en su punto de anclaje.

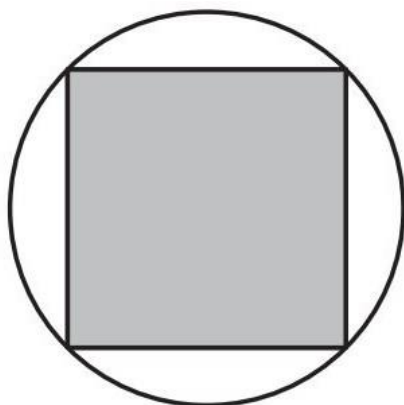
El problema 3, permite analizar la forma de plantear y dar solución a una situación problema de geometría plana de la cotidianidad, que implica el que una figura se encuentre inscrita en otra y ello determine sus dimensiones.

Problema 3:

Se destina una zona verde de forma circular para construir un parque infantil; dentro de dicha zona circular de 30 m de radio estará inscrito un área cuadrada de concreto.

Figura 16

Imagen de apoyo para problema 3 del postest.



Fuente. foro.rinconmatematico

Determina las dimensiones que debe tener este cuadrado inscrito en la zona verde.

El problema 4, permite comparar la resolución que los estudiantes ofrecen de una situación problema de la cotidianidad y aplicada a la economía. Esencialmente, se buscaba apreciar las funciones de costo, ingreso y utilidad que ellos planteaban, su comportamiento y variación dependiendo de las unidades fabricadas y vendidas.

Problema 4:

La empresa " RTC STEREO " dedicada a la elaboración y comercialización de radios realiza un estudio de mercadeo sobre su tipo de producto más comercializado. El propietario estima los costos fijos de su compañía en 850 USD y estima un costo de producción de 5,8 USD por cada unidad. Si el precio de venta por cada radio es de 12 USD.

Figura 17

Imagen de apoyo para problema 4 del postest.



Fuente. spanish.globalsources

Determinar:

- a) La función que representa el Costo total de producir "x" unidades de radios.
- b) La función Ingreso total de vender "x" unidades de radios.
- c) La función Utilidad total de elaborar y vender "x" unidades de radios.
- d)Cuál será el punto de equilibrio entre la función costo y la función ingreso.
- e) A partir de cuántos radios vendidos existirá ganancias para el propietario de la empresa " RTC STEREO ".

El problema 5, propicia el reconocer y confrontar la manera como los estudiantes comprenden la situación trigonométrica contextualizada en una sección cónica y que permite efectuar el cálculo de razones trigonométricas fundamentales.

Problema 5:

Dentro de una circunferencia con centro en el origen y de radio 5 cm, se ubica un triángulo rectángulo cuyo ángulo de elevación formado entre el semieje de las " x " y el

vértice en el origen es de 50° . Determinar las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente definidas para este ángulo.

Diseño de Sesiones Didácticas

Las actividades didácticas consisten en una sucesión de cuatro encuentros virtuales con los estudiantes de la muestra; durante los cuales ellos reciben una serie de información e instrucciones ejemplificadas de cómo llegar a la resolución de problemas matemáticos que usualmente se resuelven por procesos analíticos; por medio de heurísticas aplicadas en softwares dinámicos de geometría; particularmente, usando GeoGebra.

Para el diseño de actividades asociadas a los conceptos fundamentales de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, se parte de una sesión introductoria acerca del software dinámico GeoGebra, exponiendo sus orígenes, aplicabilidades, configuración, versiones e instrumentalización del mismo; haciendo énfasis en como un estudiante ingresa a esta herramienta digital de manera online o descargándola en su ordenador o dispositivo móvil; también se le muestra en detalle la interfaz del mismo con cada una de sus barras y herramientas.

Para las tres sesiones restantes, se parte de situaciones problemáticas de aplicaciones a la economía, el diseño gráfico, conceptos geométricos, el modelamiento algebraico de situaciones cotidianas; entre otras.

Las actividades realizadas durante las sesiones fueron de tipo expositivo y experimental, resaltando la adquisición de conocimientos y conceptos matemáticos a través del uso de este software dinámico, las sesiones didácticas se diseñaron usando plantillas de diapositivas y se expusieron en reuniones virtuales a través de Google Meet; ya que es multiplataforma y permite el uso de varias funciones multimedia (Anexos D, E, F, G). Las sesiones didácticas se dispusieron de la siguiente forma:

- Portada de presentación de la sesión didáctica.
- Introducción y objetivo: Descripción general las actividades que se realizaran y los objetivos a alcanzar.
- Actividad previa: Se presenta al estudiante el enunciado contextualizado de la situación problema que se usará como ejemplo, seguida de una solución analítica.
- Contenido: Se presenta al estudiante una heurística (solución creativa) contextualizada

Fase de Aplicación de los Instrumentos de Medición, Actividades y Recolección de la Información

Se llevó a cabo la aplicación de los instrumentos en una muestra representativa de estudiantes de la Escuela de Ciencias Básicas, Tecnologías e Ingenierías, adscritos al Centro Comunitario de Atención Virtual (CCAV-Cúcuta) de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia-UNAD, quienes estaban cursando las asignaturas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica (ATGA).

Población y Muestra

La Escuela de Ciencias Básicas, Tecnologías e Ingenierías hace parte de Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD), la cual oferta educación superior a distancia con una metodología de mediación virtual y enfocada principalmente en la formación pedagógica, didáctica, disciplinaria e investigativa, además de capacitar a sus estudiantes en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Para el periodo 1601-2024 (primer período ofertado de 16 semanas) que abarca los meses de febrero a junio, se cuentan con 4430 estudiantes en toda Colombia matriculados en el curso de primera matrícula de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica -ATGA, de acuerdo con información entregada por el director de dicho curso.

De la anterior población, se seleccionó una muestra de 20 estudiantes que ya estaban avanzando en las actividades propias del curso de ATGA; básicamente, se encontraban en la última fase del mismo. Esta muestra contempla 13 estudiantes matriculados en la sede de Cúcuta y los 7 restantes de la ZCORI- Zona Centro Oriente de la UNAD.

Estos alumnos, tienen edades entre los 19 y 42 años y cursan primer período académico de programas de pregrado en Ingenierías (Sistemas, Industrial, Telecomunicaciones), Tecnologías (Multimedia, de Alimentos), y otros de Agronomía.

Recolección de Datos

Basados en la muestra establecida de los estudiantes, que se encuentran finalizando el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica y apoyados en las actividades puntualizadas en la fase de diseño, se dispuso de 3 formularios en Google Forms (uno por cada instrumento de medición) para recolectar la información que permitió su posterior organización y análisis.

Inicialmente, se citaron a los 20 estudiantes de la muestra, a través de Microsoft Teams, llamadas telefónicas y un grupo de WhatsApp previamente creado donde se les solicita un correo electrónico personal. La jornada se realizó de forma virtual el 11 de marzo del 2024. Dicha jornada inició a las 3:10 pm; posterior a un saludo de bienvenida y agradecimientos, se socializa la propuesta de investigación y les suministra información acerca de la finalidad de estos datos que se recolectarían, aclarando que los datos serán tratados confidencialmente y la información recolectada será analizada y presentada estadísticamente (sólo con fines educativos).

Seguidamente, se les invita a participar en la primera jornada de aplicación de instrumentos, motivándolos a participar en una prueba de diagnóstico, de la cual disponen 2 horas para responderla. A cada estudiante se le envía el link donde se encuentra alojado el

instrumento y se le solicita dar solución a los 12 ítems de la prueba diagnóstica diseñada en Google Forms; cada uno de ellos se toma el tiempo necesario para dar respuesta, el primer estudiante en terminarla invierte 1 h 25 minutos; mientras el último en resolverla tarda 2 h en dar resolución a la misma.

Después de aplicar el instrumento de diagnóstico, se recopiló y analizó la información, con el fin de considerarla en la elaboración del instrumento de Pretest. El día 25 de marzo de 2024, se les envía por medio del grupo de WhatsApp el link para la presentación de las 5 situaciones del pretest diseñada también en Google Forms, el cual estuvo disponible por una semana.

En el Pretest, se incluyó un vídeo que incorporaba resolución a un problema ejemplo con las indicaciones dadas a los estudiantes de la muestra para la presentación del mismo. Cada estudiante organizó su tiempo y horario para realizar el Pretest y evidenciar por medio de imágenes o documentos escaneados y alojados en formato Pdf en una Drive que se les suministró previamente; allí encontraban dos carpetas, una para la solución analítica y otra para alojar el archivo con extensión. ggb de la solución gráfica o heurística que daban usando el software dinámico GeoGebra.

En todo momento, el investigador estuvo atento a través del grupo de WhatsApp para atender inquietudes acerca de la presentación de este Pretest.

La presentación del postest se efectuó el 24 de abril de 2024, días después de la culminación de la serie de encuentros virtuales de la secuencia didáctica. En ese lapso de tiempo los estudiantes tuvieron acceso al recurso virtual del Libro de GeoGebra (Anexo M), el cual el investigador elaboró con base a situaciones similares a las expuestas en los encuentros virtuales y

otras más que consideró de importancia para promover la Génesis Instrumental. Cabe destacar que el posttest contenía 5 situaciones problemas y se aplicó de manera similar que el pretest.

Análisis de Resultados

Los resultados derivados se presentan en seis partes, relacionados con la metodología planteada. La parte 1 analiza en detalle las respuestas entregadas por los alumnos al presentar la prueba diagnóstica por medio de una estimación estadística y además dando un análisis cualitativo del por qué los estudiantes posiblemente daban esas respuestas. La parte 2 muestra los resultados del pretest en relación conceptual de los temas básicos del curso de ATGA. La parte 3 detalla los resultados de la prueba del postest, en similares situaciones de las aplicadas en el pretest y posterior a su participación en los encuentros virtuales. Seguidamente, en la parte 4, se efectúa un comparativo entre los resultados obtenidos en las pruebas de pretest y postest, se abordan de manera cualitativa y cuantitativamente para inferir el grado de progreso en la forma de resolver problemas de los estudiantes. En la parte 5, se detalla los resultados de las Actividades Realizadas en los Encuentros Virtuales, donde los estudiantes conocen y diferencian la instrumentación e instrumentalización de GeoGebra. Finalmente, en la parte 6 se presenta de manera breve los resultados y apreciaciones del repaso de las actividades propuestas en el Libro de Geometría Dinámica.

Parte 1: Resultados del Diagnóstico

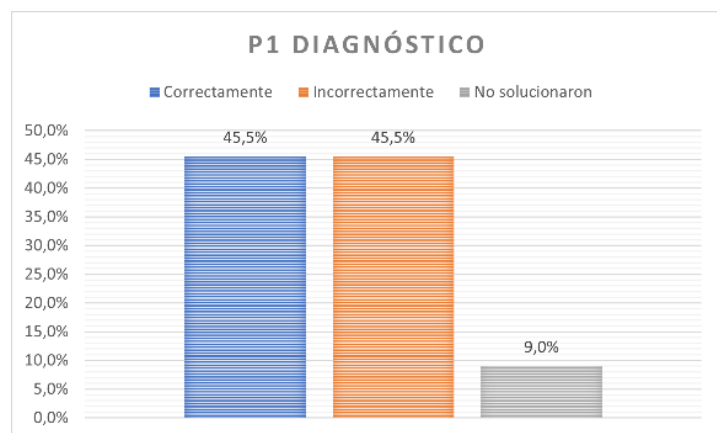
A continuación, se muestran los resultados alcanzados mediante la aplicación del diagnóstico, aplicando un análisis estadístico por ítems, y simultáneamente se realiza un corto análisis de tipo cualitativo e interpretativo de lo que reflejaba esas respuestas dadas y la posible causa que se presentaran. Anteriormente, se señaló que se formularon un total de 12 preguntas, 10 de selección múltiple con una única respuesta y 2 preguntas de carácter abierto, una de ellas permitía la posibilidad de seleccionar varias opciones de respuesta. Se destaca que este

diagnóstico, pretendía estimar el nivel de aplicabilidad de las habilidades y pensamientos matemáticos al resolver problemas dentro del grupo de estudiantes tomados como muestra.

Para cada pregunta se emplea la siguiente notación: P1, que indica la pregunta diagnóstica 1. La información se muestra mediante un gráfico de barras, utilizando porcentajes para facilitar una mejor interpretación de los resultados comparativos, considerando la opción de respuesta correcta.

Figura 18

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P1 diagnóstico.

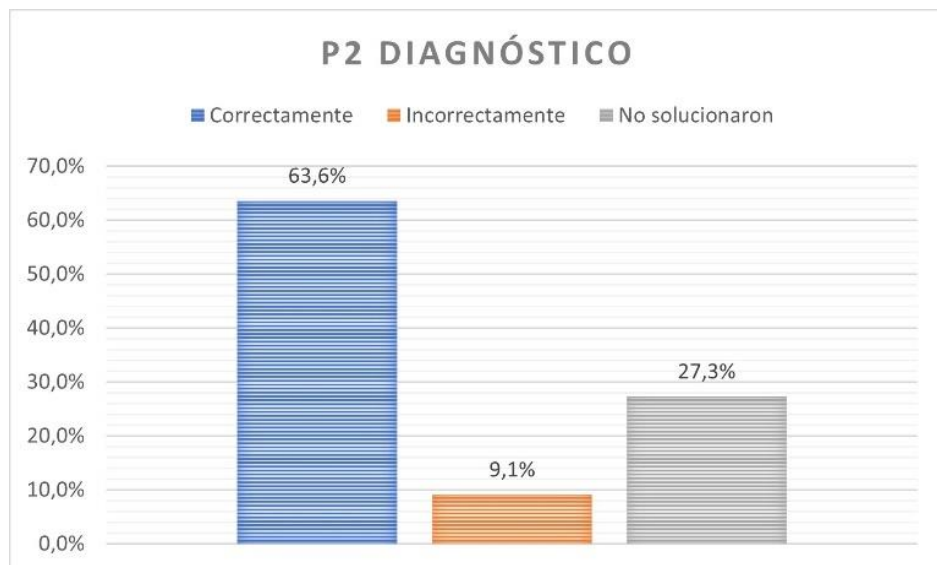


P1 hace referencia al pensamiento numérico y los sistemas numéricos, en la cual, se preguntaba acerca de cuál de 4 expresiones era la de utilidad para efectuar el cálculo del costo de una compra. Buscando, que los estudiantes interpreten las operaciones matemáticas básicas usando signos de agrupación y las propiedades de los números naturales.

La opción correcta era la C, $[3 \times (12 \times 2500)] + (6 \times 2500)$. En la Figura 18 se aprecia que el 54,5 % de los estudiantes no responden de forma acertada ó no dieron respuesta a la pregunta; posiblemente esto se deba a confusiones de la aplicabilidad e importancia del uso de los signos de agrupación dentro de los polinomios aritméticos, lo cual simplifica los cálculos sustentados en las propiedades de los números naturales.

Figura 19

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P2 diagnóstico.

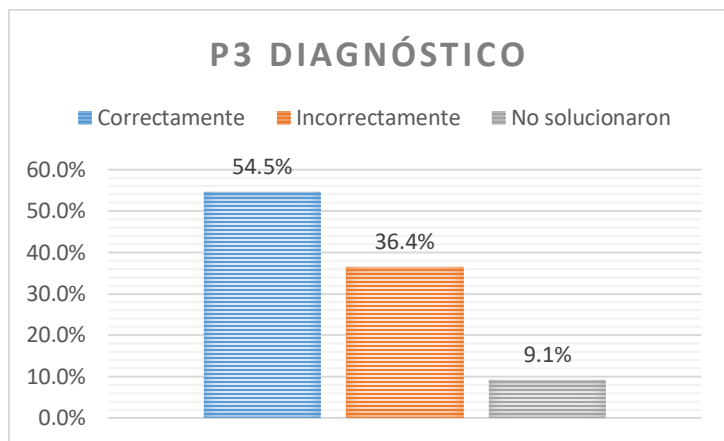


P2 hace alusión al pensamiento numérico y los sistemas numéricos, en la cual, se preguntaba acerca del resultado obtenido al efectuar operaciones aritméticas que combinaban las operaciones básicas con operaciones que implican: potenciación, radicación y logaritmación.

La opción correcta era la C (13). En la Figura 19 se detalla que el 63,6 % de los alumnos respondieron de forma correcta la pregunta; pero el 27,3 % no supo dar una respuesta al problema, lo que manifiesta un notable porcentaje de alumnos que seguramente no poseen habilidades en la solución de operaciones aritméticas que incluyan a la potenciación, radicación y logaritmación, temas que son relevantes al inicio de los dos primeros grados de educación media.

Figura 20

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P3 diagnóstico.

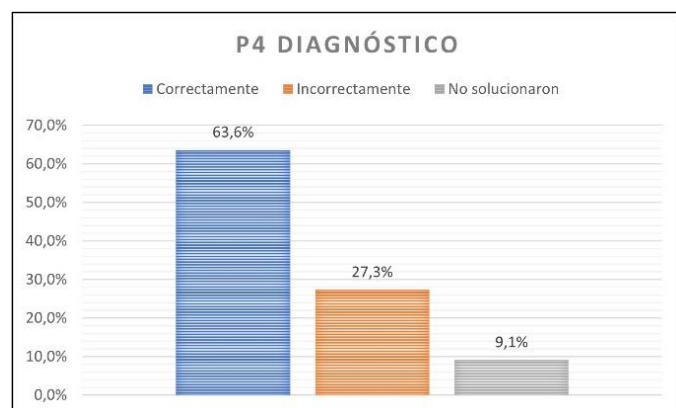


P3 hace referencia al pensamiento espacial y los sistemas geométricos, en la cual se le solicitaba al estudiante el reconocer la clase de rectas trazadas sobre un plano cartesiano.

La opción correcta era la D (Son rectas perpendiculares que se cortan en el punto (2.5, 4.5)). En la Figura 20 se muestra que el 72,7 % de los alumnos respondieron de forma acertada la pregunta; pero el 27,3 % no dio respuesta a la situación, lo que refleja que esos estudiantes posiblemente no reconozcan las características de las rectas paralelas y las perpendiculares, sus pendientes y sus trayectorias. Este tema es fundamental en los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y como base de la Geometría Analítica.

Figura 21

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P4 diagnóstico.

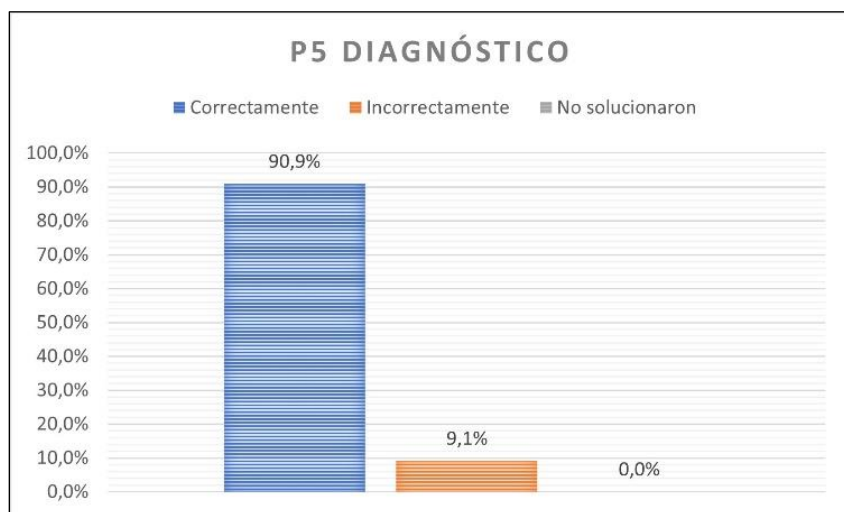


P4 concierne al pensamiento espacial y los sistemas geométricos, se solicitaba al estudiante que manipulará representaciones mentales de objetos en tres dimensiones. Básicamente, se le pedía determinar mediante una expresión de potenciación la cantidad de cubos pequeños necesarios en la construcción de un bloque macizo de mayor volumen.

La opción correcta era la B (3^3). En la Figura 21 se aprecia que el 36,4 % de los estudiantes dieron respuesta de forma incorrecta a la pregunta o no dieron respuesta a la situación, lo que posiblemente se deba a dificultades con la manipulación mental de objetos tridimensionales o a confusiones al momento de expresar una cantidad por medio de una expresión de potenciación. Esta temática es de gran relevancia dentro de los pensamientos matemáticos que deben ejercitar los estudiantes durante su formación académica.

Figura 22

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P5 diagnóstico.

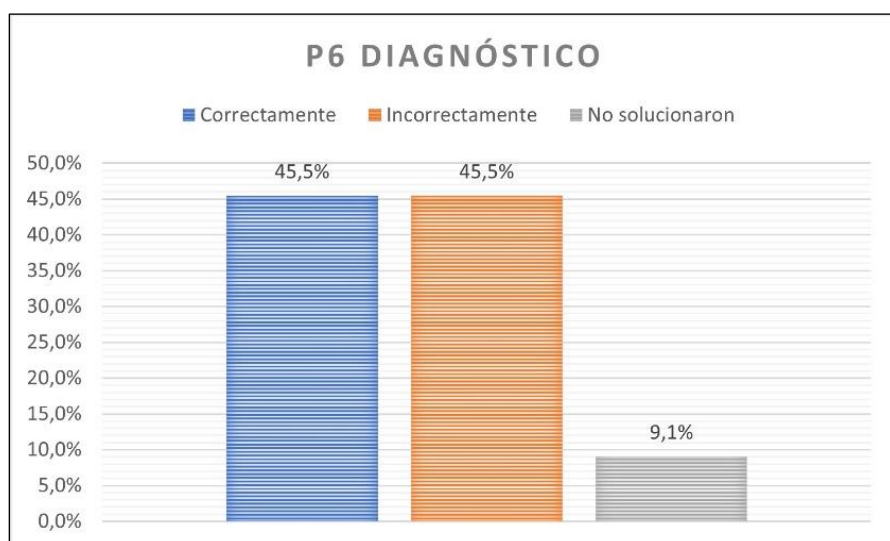


P5 hace alusión al pensamiento métrico y sistemas métricos. La pregunta permite identificar la relación entre múltiplos y submúltiplos del sistema de medidas. Se le solicitaba al estudiante que transformara una medida expresada en la unidad fundamental de longitud a un submúltiplo, en una situación contextualizada en un ámbito educativo.

La opción correcta era la A (125 cm). En la Figura 22 se evidencia que la totalidad de los estudiantes dieron solución a este ítem y un 90,9 % seleccionaron la opción correcta; ello refleja que un alto grado porcentaje de la muestra dominan las conversiones del Sistema Internacional de medidas. Este aspecto es fundamental al momento de realizar representaciones gráficas de situaciones trigonométricas y al dibujar lugares geométricos, como lo son las secciones cónicas de la Geometría Analítica.

Figura 23

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P6 diagnóstico.



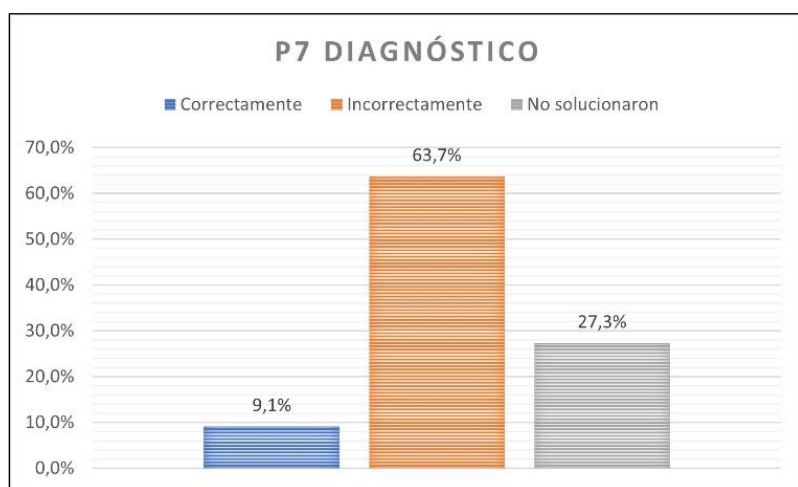
P6 hace manifiesto al pensamiento espacial y los sistemas geométricos. La pregunta permite la interpretación del concepto e interpretabilidad de área de regiones incluidas en determinadas figuras geométricas. La pregunta permite identificar la habilidad para realizar el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos. Se le requería al estudiante que expresara algebraicamente el volumen ocupado por un número dado de cajas.

La opción correcta era la A ($100 \times (l \times a \times h)$). En la Figura 23 se muestra que existe un igual porcentaje del 45,5 % de los alumnos que respondieron de forma acertada y los que no acertaron; mientras que un 9,1 % no se sintieron en capacidad de dar solución a este problema.

Seguramente, los estudiantes que no respondieron correctamente presentaron errores al usar fórmulas para el cálculo de volúmenes geométricos o en el uso del lenguaje algebraico. Este aspecto es fundamental al momento de enunciar modelos algebraicos-geométricos que permitirán determinar el comportamiento variacional del volumen de los cuerpos geométricos como el caso de los sólidos de revolución en el Cálculo Integral.

Figura 24

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P7 diagnóstico.



P7 hace referencia al pensamiento espacial y sistemas geométricos. La pregunta permite la interpretación del concepto y aplicabilidad de áreas de regiones delimitadas en determinadas figuras geométricas. Se le solicitaba al estudiante que expresara algebraicamente y de manera simplificada el área sombreada de una región inscrita en una figura geométrica.

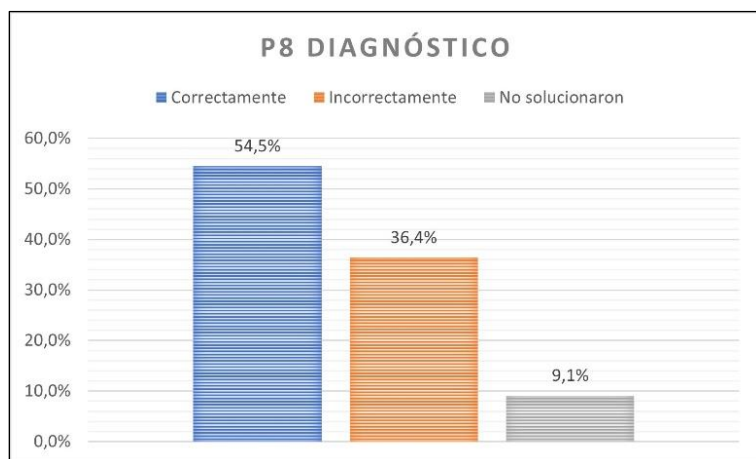
La opción correcta era la B ($y(y - x)$). La Figura 24 muestra que tan sólo un 9,1 % de los estudiantes respondieron correctamente a este ítem, lo cual permite determinar que un 90,9 % de los estudiantes no respondieron correctamente o no dieron solución a la situación.

Probablemente, los estudiantes que no respondieron correctamente presentaron errores al usar fórmulas para el cálculo de áreas geométricas o están cometiendo errores al momento de simplificar expresiones algebraicas mediante la factorización. Esta temática es de gran

importancia al momento de enunciar modelos algebraicos-geométricos que permitirán determinar las superficies de figuras geométricas y se hace uso en la Trigonometría, la Geometría Analítica y los Cálculos Diferencial e Integral, entre otros.

Figura 25

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P8 diagnóstico.

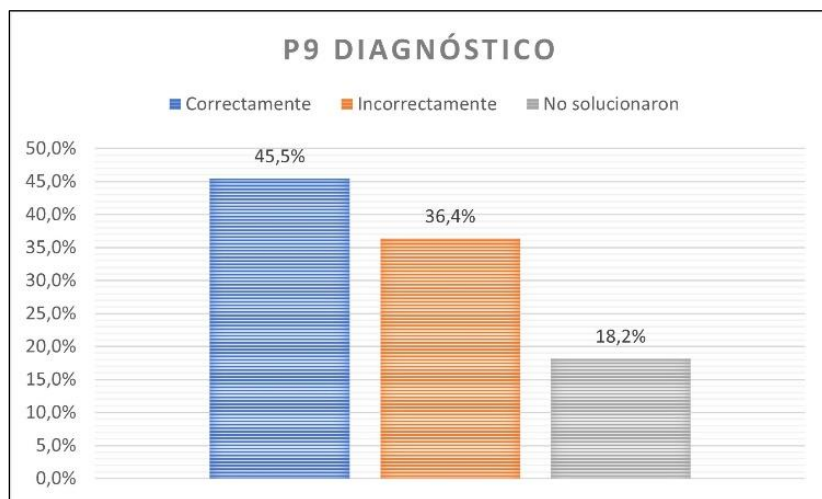


P8 hace alusión al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. La pregunta se orienta en medir el nivel de habilidad que tiene el estudiante en plantear y solucionar situaciones cotidianas aplicando sistemas de ecuaciones 2×2 . Se le pedía al estudiante que seleccionara sólo los datos que necesitaría para plantear un determinado sistema de dos ecuaciones con dos variables; pero no se le solicitaba la solución.

La opción correcta era la D (El número total de botellas que hay en la nevera, la capacidad de cada botella, la suma de las capacidades de todas las botellas). La Figura 25 se muestra que 45,5 % de los alumnos no respondieron apropiadamente a este ítem o no lograron solucionarlo. Posiblemente, los estudiantes que no respondieron correctamente cometieron errores en la comprensión y/o diferenciación de las variables usadas o de la relación número de unidades y capacidad. Este tema de los sistemas de ecuaciones es de gran relevancia en el Álgebra y como punto de apoyo para cursos afines a las matemáticas.

Figura 26

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P9 diagnóstico.



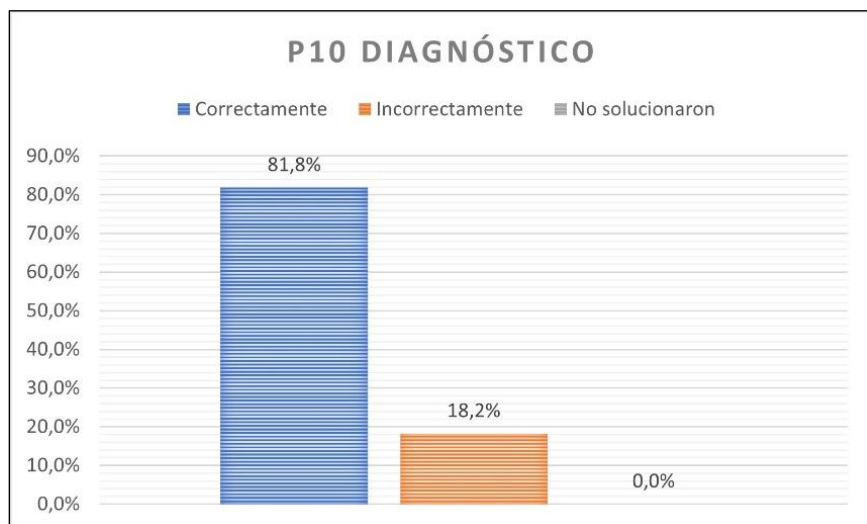
P9 hace referencia al pensamiento espacial y los sistemas geométricos. La pregunta permite identificar la habilidad que tiene el estudiante para relacionar una sección cónica, su adecuada ubicación en el plano cartesiano y su correspondencia con un modelo matemático. Se le suministra al estudiante la imagen de una elipse con centro (h,k) y se le pide que seleccione la expresión matemática que la definiera.

La opción correcta era la B ($\frac{(x+2)^2}{13} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$). La Figura 26 se deduce que el 54,6 % de los estudiantes dieron respuesta incorrecta a este ítem o no lograron solucionarlo.

Factiblemente, los estudiantes presentan errores al relacionar el modelo matemático de define a esta sección cónica de la elipse y la confunden con la expresión que modela la circunferencia, la parábola o la hipérbola. El tema de las secciones cónicas es el eje central del compendio de temas abordados por la Geometría Analítica.

Figura 27

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con única respuesta P10 diagnóstico.

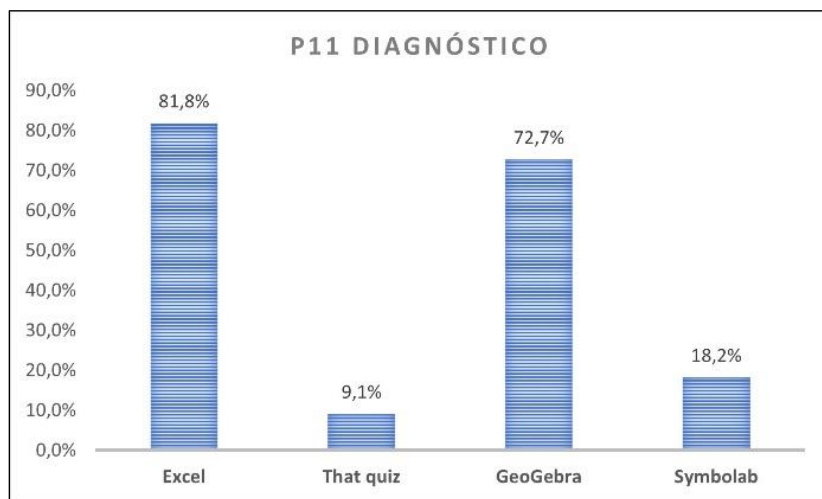


P10 mide el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. La pregunta permite estimar la capacidad que tiene el estudiante en cuanto a la representación en lenguaje algebraico de una situación expresada en lenguaje natural.

La opción correcta era la D ($2x - 5 = \frac{x}{7} + 2$). De la Figura 27 se deduce que la totalidad de estudiantes de la muestra dieron solución a la situación y el 81,8 % lo hizo de manera correcta. Lo anterior refleja que los estudiantes en este tipo de preguntas poseen habilidades para transformar en lenguaje algebraico el lenguaje natural en situaciones cotidianas. El modelamiento algebraico de situaciones tomadas del lenguaje natural son el punto inicial para tratar los temas fundamentales del Álgebra.

Figura 28

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con múltiple respuesta P11 diagnóstico.

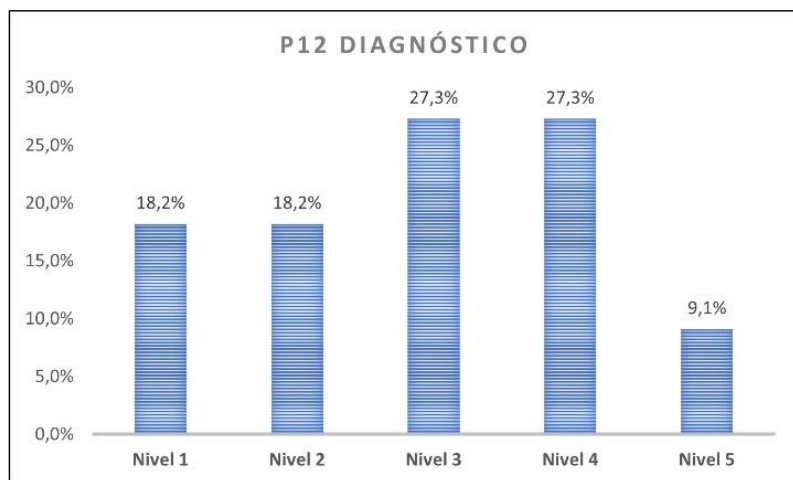


P11 permite apreciar el uso y aplicabilidad de herramientas tecnológicas y softwares matemáticos por parte de los alumnos en la resolución de problemas. Se le suministra una lista de 4 herramientas tecnológicas (Excel, That quiz, GeoGebra, Symbolab) y ellos tenían la viabilidad de elegir más de una opción.

La Figura 28 muestra que la herramienta que más han utilizado los estudiantes de la muestra es Excel, seguido por el Software dinámico GeoGebra, el cual se usa en el curso de ATGA para verificar la solución analítica de los ejercicios que ellos resuelven.

Figura 29

Respuestas a la pregunta de selección múltiple con múltiple respuesta P12 diagnóstico.



P12 permite indagar el nivel de dominio del software dinámico GeoGebra que afirman tener los estudiantes. Se les suministra una escala de Likert, siendo 1 el menor nivel y 5 el mayor nivel.

La Figura 29 muestra que un 36,4 % de los alumnos se sitúan en los Niveles 1 y 2; mientras que un 54,6 % consideran estar en los Niveles 3 y 4 y tan sólo un 9,1 % de ellos considera tener un óptimo Nivel 5 en el manejo de esta herramienta tecnológica.

Parte 2: Resultados del Pretest

Seguidamente, se muestran los resultados derivados de la aplicación del Pretest, a través un análisis estadístico por ítems, y al mismo tiempo se realiza un análisis cualitativo e interpretativo de lo que reflejaba esas respuestas dadas y la posible causa que se presentaran. Se propusieron 5 situaciones problemas, se les solicitaba a los estudiantes que dieran una solución analítica y si fuera posible que dieran una solución mediada en la utilización del software de geometría dinámica GeoGebra. Se destaca que este pretest, pretendía apreciar y analizar el nivel de aplicabilidad de las habilidades y pensamientos matemáticos en la resolución de situaciones problemáticas al interior del grupo de estudiantes tomados como muestra.

Para todas las preguntas se utiliza la siguiente notación, P1 que representa pregunta del pretest 1 y así sucesivamente hasta la convención P5.

P1. Modelar una función matemática que permita hallar las dimensiones y el área de una figura geométrica es una de las habilidades básicas que se desarrollan a través de los pensamientos matemáticos, se buscaba que el estudiante estableciera la razón entre el largo y ancho en relación con el número áureo.

Figura 30

Solución analítica a situación problema 1 en el pretest.

Problema 1

Una empresa publicitaria fabricante de tarjetas de presentación diseña un modelo de tarjeta de modo que siempre la proporción (cociente) entre el largo y el ancho sea de 1,6; es decir aproximadamente el número áureo.

b largo

h ancho 1,6

$A = b \cdot h$

a) $40 = b \cdot 1,6$
 $\frac{40}{1,6} = b$
 $25 \text{ cm} = b$

b) $A = 4 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm}$
 $A = 100 \text{ cm}$

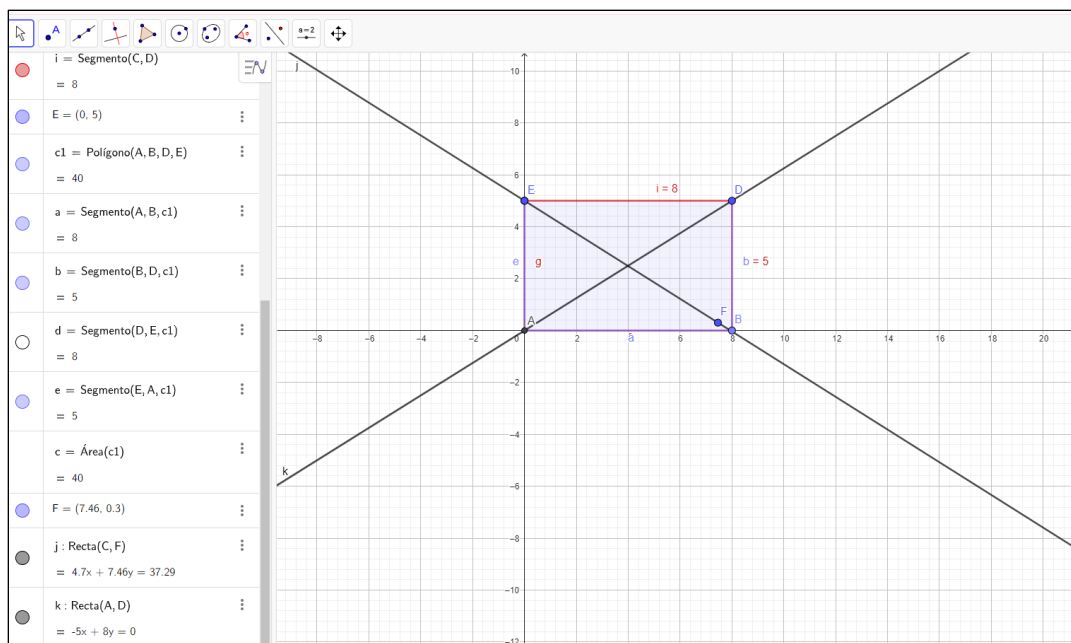
c) $A = 25 \cdot 5$
 $A = 125 \text{ cm}$

Pese a que el 80 % de los estudiantes, dieron solución de forma analítica a este problema, dentro de este porcentaje el 30 % relacionaron erróneamente las dimensiones del rectángulo;

como el mostrado en la Figura 30, donde la estudiante relacionó el área dada con el número áureo que se daba, ello ocasiona que las dimensiones halladas no conserven la proporción áurea.

Figura 31

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 1 en el pretest.



En cuanto a la solución mediada en un software de geometría dinámico, sólo el 15 % de los estudiantes ofrecieron una heurística a través del uso de GeoGebra, pero sólo el 10 % tuvo efectividad y logró presentar resolución a la situación problema, como el mostrado en la Figura 31; donde el estudiante hace uso de las herramientas básicas de geometría plana que le ofrece el software; pero las usa de una manera básicamente comprobatoria de la respuesta obtenida de forma analítica.

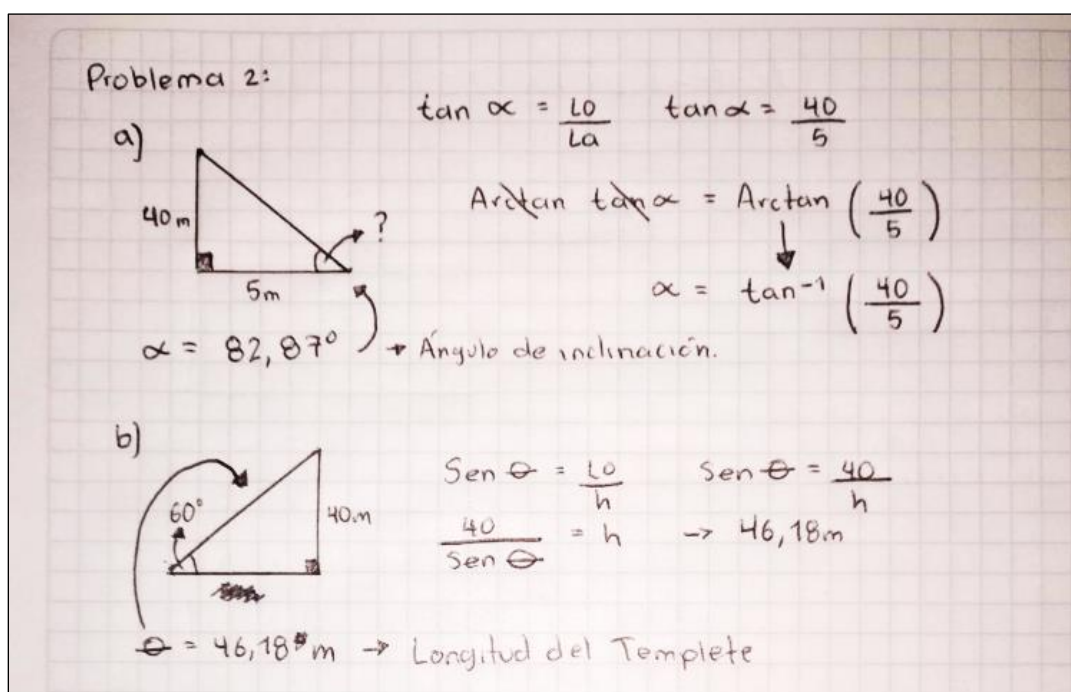
Por tanto; para la P1, se puede deducir que estos alumnos ostentan confusiones o débiles presaberes en cuanto al pensamiento espacial y geométricos y además falencias en el pensamiento variacional y de sistemas algebraicos.

P2. Establecer las razones ó relaciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente), es una de los aspectos fundamentales del estudio de la Trigonometría; debido a que

conjuntamente con el uso del Teorema de Pitágoras posibilita el cálculo las medidas de los catetos e hipotenusa en un determinado triángulo rectángulo en situaciones cotidianas. Se pretendía que el estudiante estableciera las razones trigonométricas para estimar el ángulo de elevación y la longitud del templete que permitiera el anclaje a lado y lado de una antena de telecomunicaciones.

Figura 32

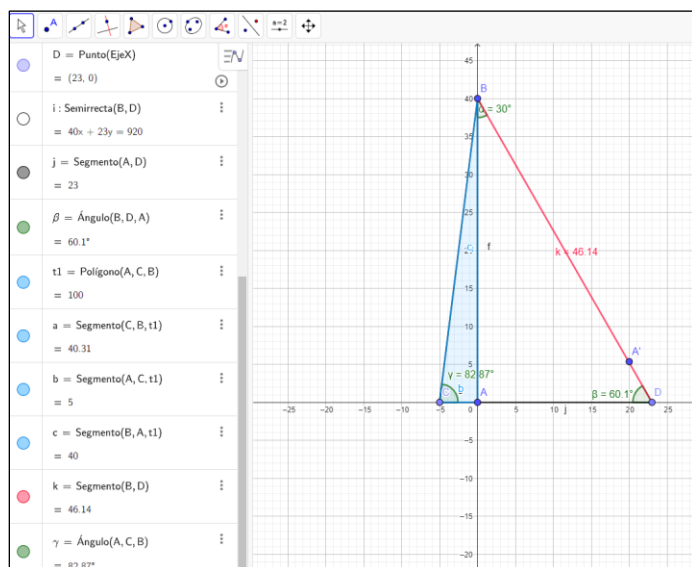
Solución analítica a situación problema 2 en el pretest.



El 65 % de los alumnos dieron solución de manera analítica a este problema y dentro de este porcentaje el 55 % relacionaron de manera correcta los lados y ángulos de elevación de los dos triángulos rectángulos que comparten como lado común la altura de la antena; como lo muestra la Figura 32 aplicaron las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Lo anterior indica que aproximadamente un 35% de los estudiantes no cuentan con las bases conceptuales y de relación de lados y ángulos en triángulos rectángulos; y un 10 % poseen conceptos básicos de trigonometría, pero comete errores al despejar variables en las expresiones que plantea.

Figura 33

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 2 en el pretest.



Referente a una solución mediada en un software de geometría dinámico, el 20 % de los estudiantes ofrecieron una heurística a través del uso de GeoGebra, de este porcentaje el 15 % logró dar resolución a la situación problemática, como el mostrado en la Figura 33; donde el estudiante hace uso de las herramientas básicas de geometría plana y de medición de ángulos que le ofrece el software; pero las usa a manera de verificación de la respuesta obtenida de forma analítica.

En consecuencia, para la P2, se puede inferir que estos estudiantes presentan confusiones o débiles presaberes en la resolución de situaciones trigonométricas básicas, lo que influye en las habilidades propias del pensamiento espacial y geométricos y además ocasiona falencias en el progreso del pensamiento variacional y de sistemas algebraicos.

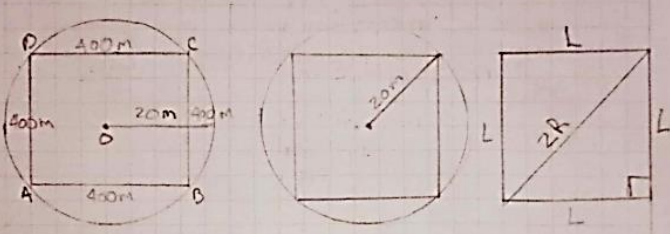
P3. El relacionar las dimensiones de una figura geométrica inscrita en otra, es una de las destrezas adquiridas por los estudiantes a través de la aplicabilidad del pensamiento espacial y geométrico junto con el pensamiento numérico. Se pretendía que el estudiante hallara la longitud de un cuadrado inscrito en una circunferencia en una zona destinada al aterrizaje de aeronaves.

Figura 34

Solución analítica a situación problema 3 en el pretest.

Problema 3

Sobre una zona verde de forma circular de un batallón, se desea construir un Helipuerto; dentro de dicha zona circular de 20m de radio estará inscrito un cuadrado, cuyos lados delimitarán las zonas de protección al momento del desembarque de las aeronaves.



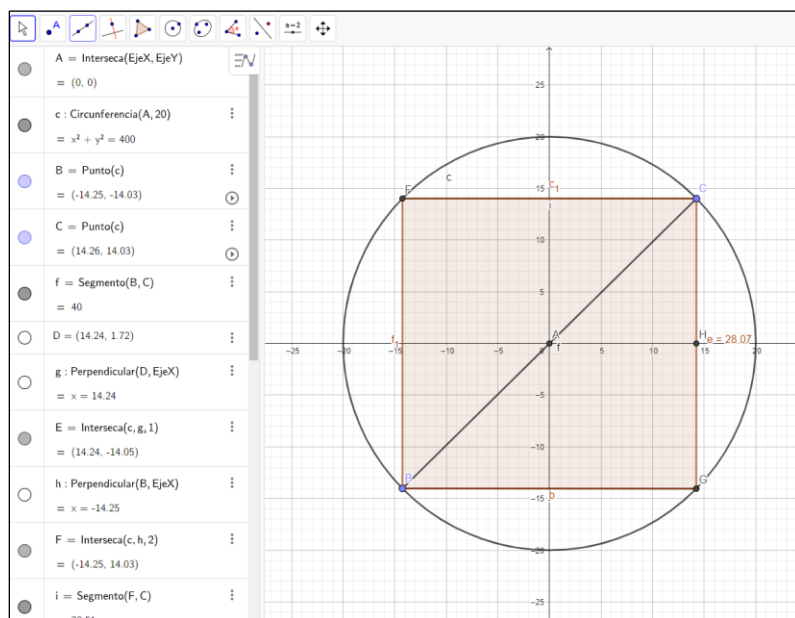
$A = L^2$
 $(2R)^2 = L^2 + L^2$
 $\frac{4R^2}{2} = \frac{2L^2}{2}$
 $A = 2R^2 = L^2$
 $A = 2 \cdot 20^2 = L^2$
 $A = 1.600m = L^2$
 $A = 1600m \div 4$
 $A = 400m = L$

Sólo el 35 % de los estudiantes ofrecieron una solución analítica a este ejercicio; dentro de este porcentaje el 25 % dieron correcta solución a este problema, como lo evidencia la Figura 34; para obtener a la resolución de este problema aplicaron la expresión que posibilita hallar el área del cuadrado y lo relacionaron con el Teorema de Pitágoras.

Los errores cometidos por el 10 % de estudiantes que presentaron la solución analítica; pero que no lograron llegar a una solución correcta sucedieron debido a errores aritméticos y al olvidar despejar el exponente cuadrado al final del proceso.

Figura 35

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 3 en el pretest.



El 25 % de los estudiantes dieron una solución mediada en un software de geometría dinámico, de este porcentaje sólo el 15 % logró dar solución de forma correcta a la situación problemática, como el manifiesto en la Figura 35; donde el estudiante hace un uso alternado de herramientas básicas de geometría analítica y de geometría plana ofrecidos por el software.

En consecuencia, para la P3, se puede deducir que el 55 % de los estudiantes tomados como muestra no poseen una básica destreza al momento de relacionar las dimensiones con las áreas al inscribir una figura geométrica en otra, es decir tiene poca habilidad de los pensamientos geométricos y espaciales al momento de afrontar situaciones problemas de esta clase.

P4. Representar algebraicamente situaciones contextualizadas en actividades económicas, permite a los alumnos el fomentar el pensamiento variacional y de sistemas algebraicos; para esta situación se pretendía la identificación de los costos fijos y costos variables, y establecer un modelo algebraico que los relacione con el número de hamburguesas producidas y vendidas en una empresa.

Figura 36

Solución analítica a situación problema 4 en el pretest

4.

a) Función Costo total de producir "x" unidades de hamburguesas
 $F(x) = 8.500x$

b) Función Ingreso total de vender "x" unidades de hamburguesas
 $F(x) = 16.000x$

c) Función utilidad total de elaborar y vender "x" unidades de hamburguesas.
 $F(x) = 7.500x$ $16.000 - 8.500 = 7.500$

d) ¿Cuál será el punto de equilibrio entre la función ingreso y función costo.

PE = $\frac{\text{Costo fijo}}{\text{Precio Venta} - \text{Costo Variable}}$

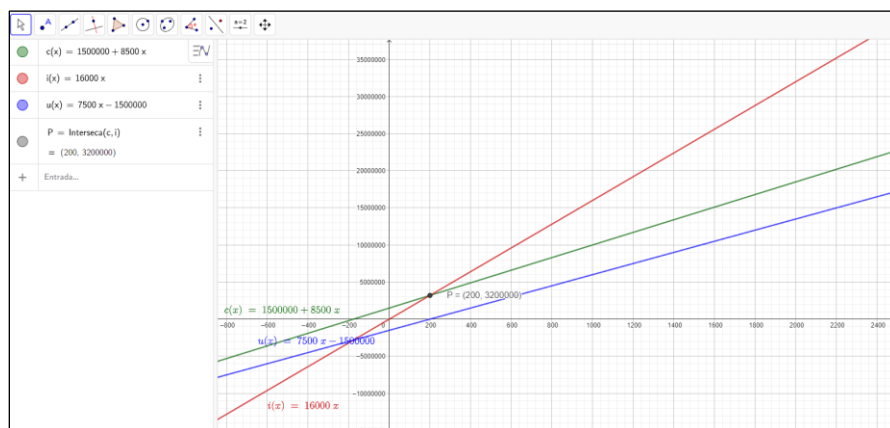
PE = $\frac{1.500.000}{16.000 - 8.500} = \frac{1.500.000}{7.500} = 200$

e) A partir de cuántas unidades vendidas existirá ganancias para el propietario de la empresa "Burger Bites".
 A partir de una venta, tendría ganancia por una hamburguesa, pero con 177 hamburguesas obtienen gran cantidad de dinero que supera los costos fijos y deja utilidades a la empresa.

El 60 % de la muestra ofreció solución analítica a este problema: pero sólo el 20 % de los estudiantes plantearon y dieron correcta solución a la situación problema; en varios casos como el mostrado en la Figura 36 se evidencian equivocaciones y confusiones entre los conceptos de costos, ingresos y utilidades, incluso aplicaron expresiones algebraicas que no son adecuadas para este tipo de ejercicios. Ello evidencia que los estudiantes presentan falencias y conceptualizaciones erróneas que conducen a procedimientos matemáticos no fundamentados y ello conlleva a respuestas equivocadas.

Figura 37

Solución mediada en software de geometría dinámica a situación problema 4 en el pretest.



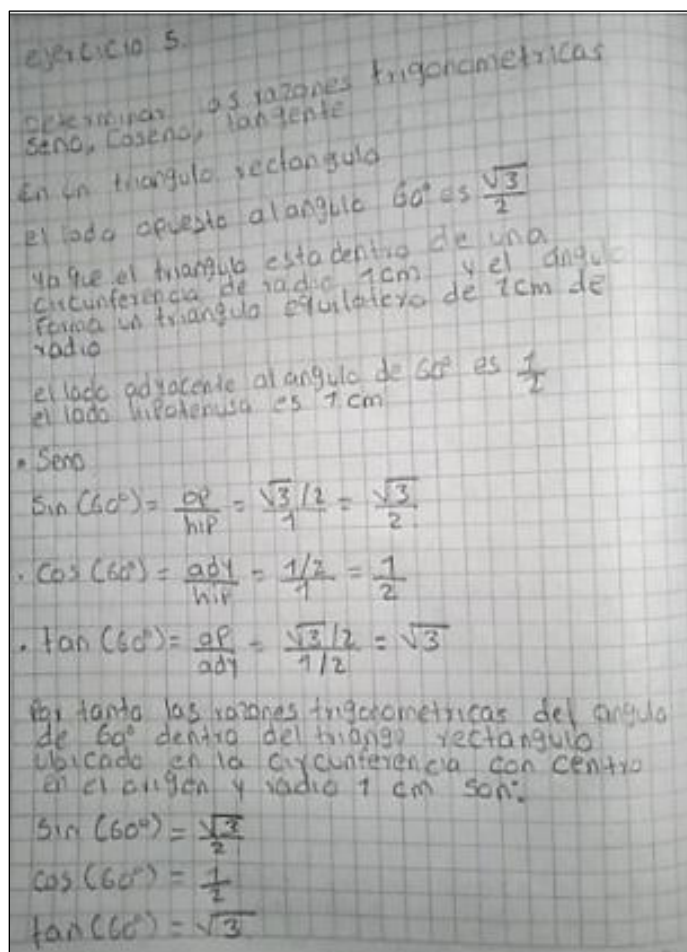
El 20 % de los estudiantes presentaron una solución mediada en un software de geometría dinámica, de este porcentaje el 15 % logró dar solución acertada al problema, como el mostrado en la Figura 37; donde la estudiante en la interfaz algebraica del software introduce las expresiones que le permite graficar el comportamiento de las funciones: costos, ingreso y utilidad (ganancia).

Por tanto, para la P4, se puede deducir que un 40 % de la muestra no cuenta con habilidades en la resolución de problemas algebraicos contextualizados en la cotidianidad, como el caso de situaciones económicas, lo que no favorece la evolución de su capacidad en el pensamiento variacional y de sistemas algebraicos y tampoco propicia la adquisición de habilidades en el pensamiento numérico.

P5. El ubicar gráficamente secciones cónicas como la circunferencia y relacionar su posición espacial con un triángulo rectángulo permiten el combinar el pensamiento espacial y geométricos y simultáneamente fortalecer el pensamiento variacional. Se buscaba que el estudiante lograra percibir como cambian los valores de las razones o relaciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, en el plano cartesiano al variar el ángulo de elevación de dicho triángulo.

Figura 38

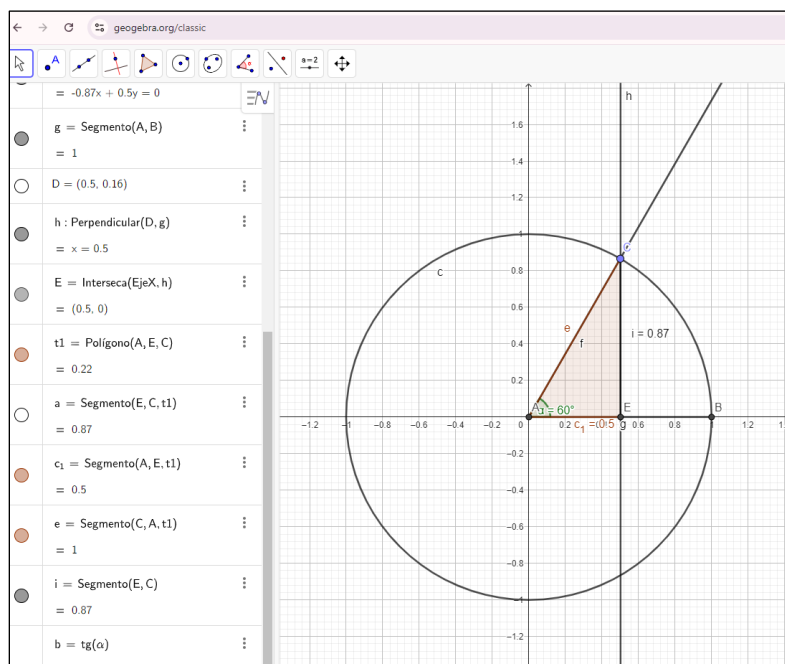
Solución analítica a situación problema 5 en el pretest



El 75 % de los alumnos ofrecieron solución de manera analítica a este problema, de este porcentaje el 65 % lo resolvió de forma adecuada. Sin embargo, algunos estudiantes presentan soluciones como la mostrada en la Figura 38; donde no representa la circunferencia con $c(0,0)$ en el plano cartesiano, ni determina el triángulo rectángulo con las indicaciones suministradas en el enunciado.

Figura 39

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 5 en el pretest



El 25 % de los estudiantes presentaron una solución mediada en un software de geometría dinámico, logrando dar correcta solución a la situación problemática, como el mostrado en la Figura 39; donde el estudiante hace un uso combinado de herramientas básicas de geometría analítica, de geometría plana y de ángulos ofrecidos por el software.

Lo anterior revela que, para la P5, aproximadamente un 25 % de la muestra no presentan presaberes en nociones básicas de las secciones cónicas, como en el asunto de la circunferencia, lo que no les permite realizar adecuadas representaciones geométricas y relacionarlas con temas propios de la trigonometría, afectando las habilidades que se puedan desarrollar en cuanto al pensamiento espacial y geométrico.

Parte 3: Resultados del Postest

Seguidamente, se muestran los resultados conseguidos al aplicar el instrumento del Postest, el cual se utilizó después de efectuar los cuatro encuentros didácticos virtuales con los estudiantes y de transmitirles instrucciones acerca de la instrumentación y la instrumentalización del software de geometría dinámico GeoGebra, con la muestra de estudiantes. Mediante un análisis estadístico por ítems, y un análisis cualitativo sobre lo que manifestaba esos procedimientos y respuestas entregadas y la posible causa que se presentaran. Se propusieron 5 situaciones problemas similares a los abordados en el pretest, igualmente se les requería a los estudiantes que dieran una solución analítica y si fuera posible que dieran una solución mediada en la utilización del software de geometría dinámica GeoGebra.

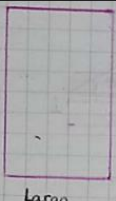
El postest pretendía apreciar y analizar el nivel de apropiación y ejecución de las habilidades y pensamientos matemáticos en la resolución de problemas al interior del grupo de estudiantes tomados como muestra y teniendo como referente que los estudiantes ya habían recibido instrucciones a través de situaciones ejemplos durante los encuentros didácticos virtuales. Para cada pregunta se utiliza la siguiente notación, P1 que representa pregunta Potest 1 y así sucesivamente hasta la convención P5.

P1. El modelamiento de funciones matemáticas posibilita el encontrar las dimensiones y el área de las figuras geométricas, lo cual representa unas de las habilidades primordiales que los alumnos deberían desarrollar a través de los pensamientos matemáticos, se buscaba que el estudiante estableciese el modelo matemático que se establece usando una determinada razón entre el largo y ancho de un papel.

Figura 40

Solución analítica a situación problema 1 en el posttest.

1)



$\frac{L}{a} = 2,5$
 $L = 2,5a$

a) $A = (2,5a)(a)$ $L = 2,5a$
 $150 = 2,5a^2$ $L = 2,5(7,74)$
 $\frac{150}{2,5} = a^2$ $L = 19,36 \text{ cm}$
 $a^2 = 60$
 $a = \sqrt{60}$
 $a = 7,74 \text{ cm}$

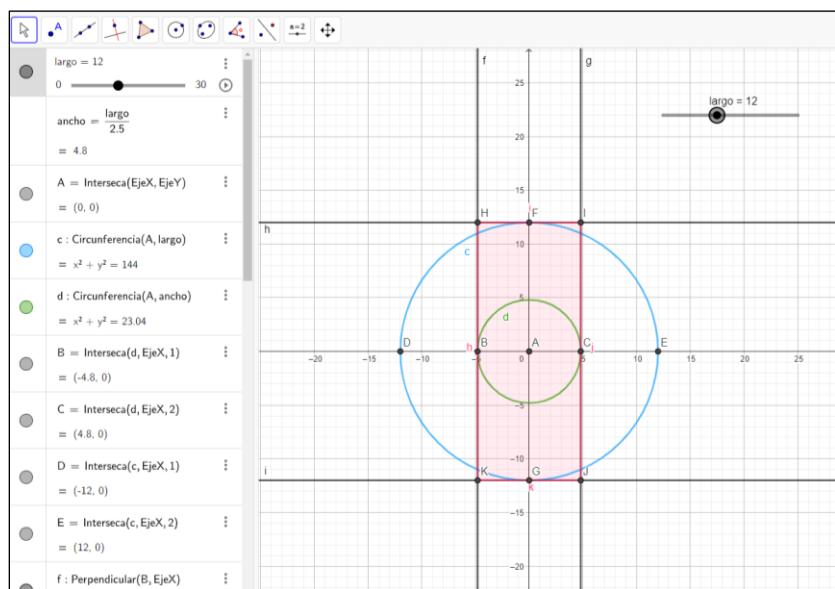
b) $L = 12 \text{ cm}$

$L = 2,5a$ $A = L \cdot a$
 $a = \frac{L}{2,5}$ $A = (12 \text{ cm})(4,8 \text{ cm})$
 $a = \frac{12}{2,5}$ $A = 57,6 \text{ cm}^2$
 $a = 4,8 \text{ cm}$

El 90 % de los estudiantes dieron solución de forma analítica a este problema, presentando procesos detallados donde se relacionaron de manera apropiada las dimensiones del rectángulo; como el mostrado en la Figura 40, donde el estudiante relacionó el largo y el ancho en la razón dada, ello ocasiona que las soluciones obtenidas sean correctas. Resalta el hecho que los estudiantes, aplicaron los métodos de forma matemáticamente consecutiva y ordenada; haciendo uso de fórmulas geométricas para calcular el largo, el ancho y el área del papel.

Figura 41

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 1 en el postest.

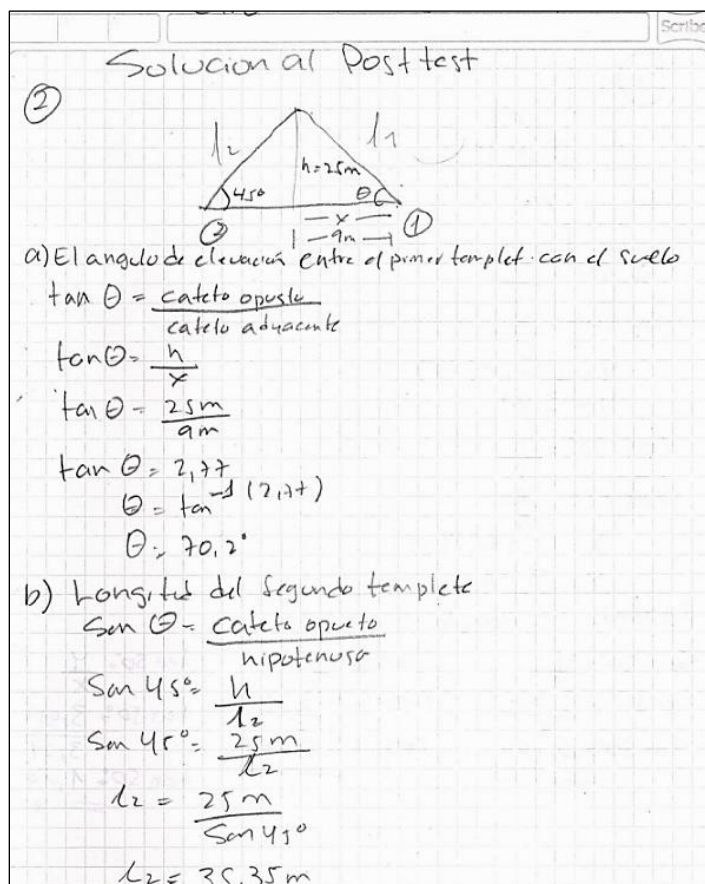


Con relación a la solución mediada en un software de geometría dinámico, el 35 % de los estudiantes ofrecieron una heurística a través del uso del software GeoGebra, de ese porcentaje el 30 % logró dar solución a la situación problemática, como el mostrado en la Figura 41; donde el estudiante uso deslizadores e instrumentos como el compás para trazar circunferencias y así lograr llegar a la solución. Además, el alumno mediante el proceso de instrumentalización explora otros posibles usos de las herramientas ofrecidas por el software de geometría dinámico.

P2. Al establecer las razones o relaciones trigonométricas esenciales (seno, coseno y tangente), se adquiere una valiosa conceptualización dentro del estudio de la Trigonometría; debido a que en ocasiones apoyada en el uso del Teorema de Pitágoras facilita el calcular las medidas de los catetos e hipotenusa de un determinado triángulo rectángulo en situaciones de la vida diaria. Se buscaba que el estudiante estableciera las relaciones trigonométricas para determinar el ángulo de elevación y la longitud del templete que permitiera el anclaje a lado y lado de una antena de telefonía.

Figura 42

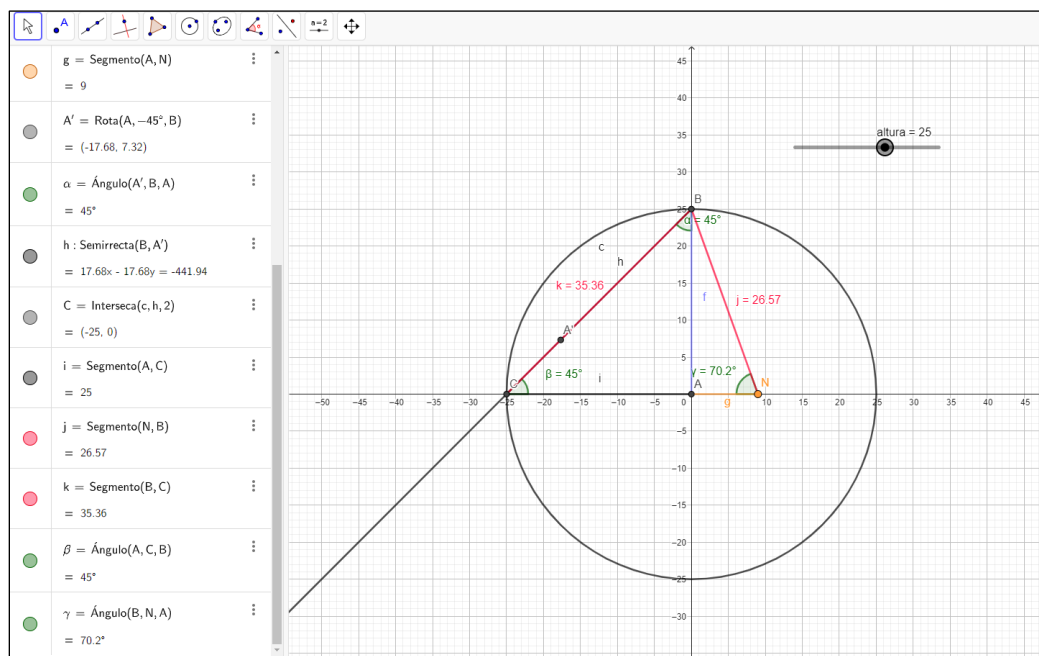
Solución analítica a situación problema 2 en el posttest.



El 70 % de los estudiantes dieron solución de manera analítica a este problema, de este porcentaje el 50% efectuaron procesos minuciosos en donde se aplicaron propiedades, teoremas y razones trigonométricas propios de los triángulos rectángulos; soluciones como la expuesta en la Figura 42, donde el estudiante relacionó adecuadamente las razones tangente y seno, con los lados y ángulos conocidos y así consigue hallar los elementos desconocidos y requeridos por la situación problema.

Figura 43

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 2 en el postest.

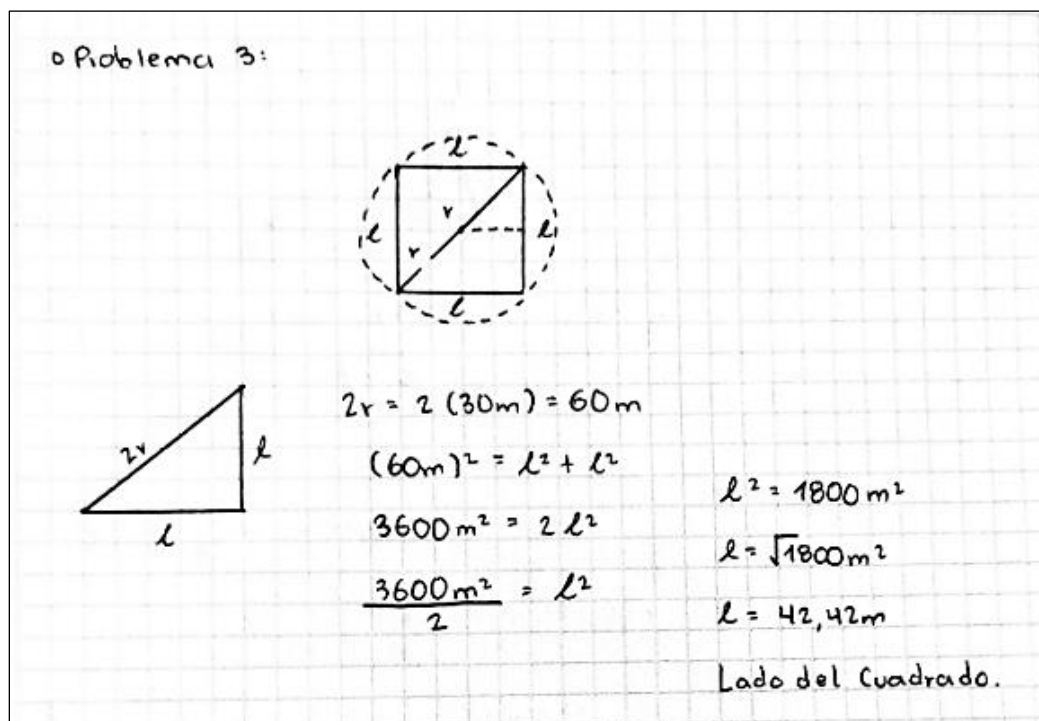


En lo referente a una solución mediada en un software de geometría dinámico, el 50 % de los estudiantes ofrecieron una heurística a través del uso de GeoGebra, de este porcentaje el 40% logró encontrar una solución a la situación problema, como el mostrado en la Figura 43; donde el estudiante instrumentaliza creativamente la herramienta de deslizadores y combina herramientas de geometría plana y de medición de ángulos que le ofrece el software.

P3. Al momento de relacionar los elementos característicos y las dimensiones de una figura geométrica que se encuentra inscrita en otra, se fortalecen habilidades mediante la aplicación del pensamiento espacial y geométrico con el pensamiento numérico y con el pensamiento geométrico y variacional. Se pretendía que el estudiante hallara la longitud de un cuadrado inscrito en una circunferencia en una zona verde, en una clara situación de la vida cotidiana.

Figura 44

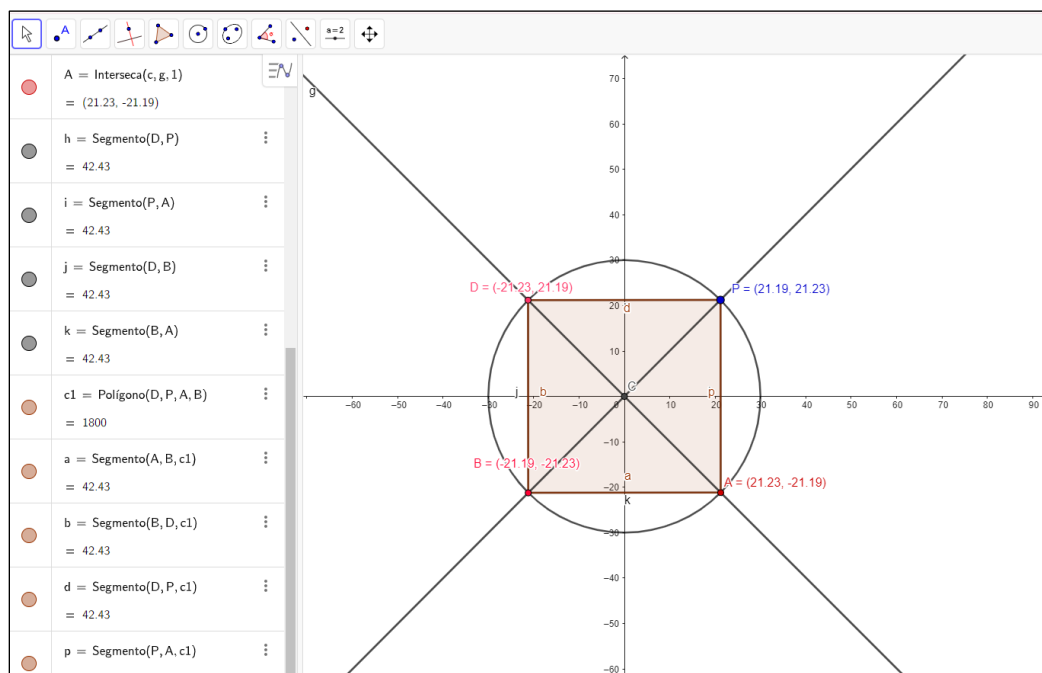
Solución analítica a situación problema 3 en el postest.



El 55 % de los estudiantes dieron solución de manera analítica a este problema, algunos efectuaron procesos detallados en donde se aplicaron propiedades, teoremas geométricos y razones trigonométricas exclusivas de los triángulos rectángulos; soluciones como la mostrada en la Figura 44, donde el estudiante relacionó adecuadamente las razones trigonométricas seno y tangente, con los lados y ángulos de elevación conocidos y así logra encontrar los elementos desconocidos y solicitados por la situación problema.

Figura 45

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 3 en el postest.



El 45 % de los estudiantes proporcionaron una solución mediada en el software de geometría dinámico, de este porcentaje el 35 % alcanzó una correcta resolución de la situación problemática, como el mostrado en la Figura 45; donde el estudiante instrumentaliza de forma notable, instrumentos como el compás, rectas perpendiculares y segmentos, para trazar circunferencias y así lograr llegar a la solución. Además, el alumno explora otras posibles ubicaciones del cuadrado inscrito; ya que ofrece una solución dinámica y detalla que las dimensiones y área del mismo no varía.

P4. Representar algebraicamente situaciones contextualizadas en actividades económicas, permite a los alumnos el fomentar el pensamiento variacional y de sistemas algebraicos; en este caso la identificación de los costos fijos y costos variables y establecer un modelo algebraico que lo relacione con el número de radios producidos y vendidos en una empresa.

Figura 46

Solución analítica a situación problema 4 en el postest.

④ Costos fijos: \$ 850
 Costos Variables \$ 5,8
 Precio Venta: \$ 12 / unidad

Ⓐ Función costo total $C(x) = \text{Costos fijos} + \text{Costos Variables}$
 $C(x) = 850 + 5,8x$

Ⓑ Función Ingreso total $I(x) = (\text{Precio Venta}) (\text{Número unidades})$
 $I(x) = 12x$

Ⓒ Función utilidad $U(x) = I(x) - C(x)$
 $U(x) = 12x - (850 + 5,8x)$
 $U(x) = 12x - 850 - 5,8x$
 $U(x) = 6,2x - 850$

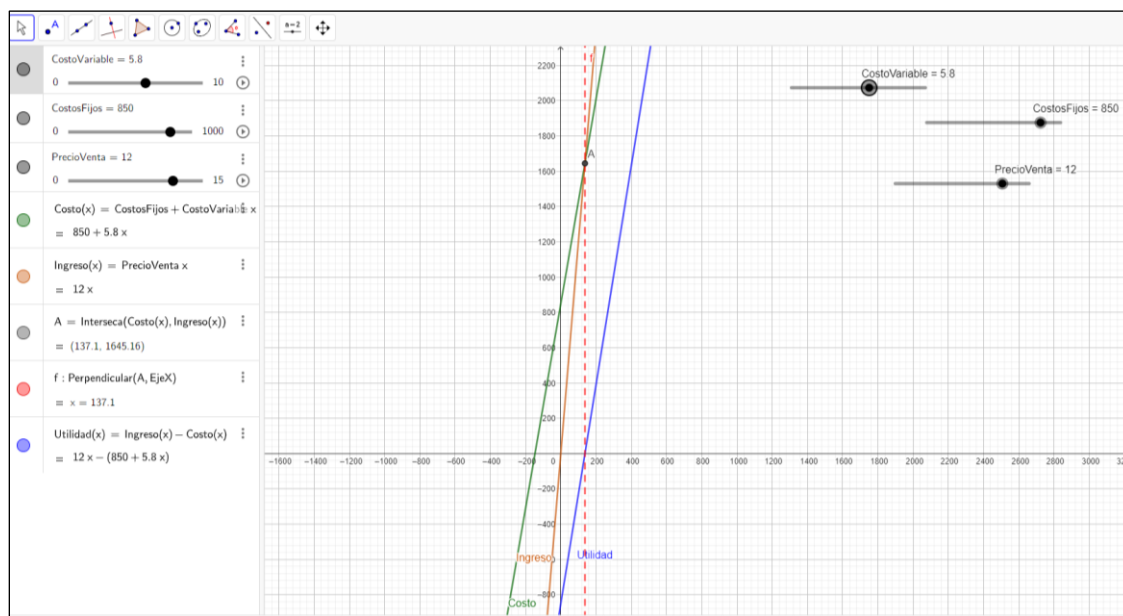
Ⓓ Punto equilibrio $I(x) = C(x)$
 $12x = 6,2x + 850$
 $12x - 6,2x = 850$
 $5,8x = 850$
 $x = \frac{850}{5,8}$
 $x = 146,5 \text{ radios}$

$I(x) = 12x$
 $I(x) = 12(146,5)$
 $I(x) = 1758,6 \text{ $}$
Equilibrio
 Pto (146,5 unid, 1758 \$)

El 70 % de la muestra ofreció solución analítica a este problema, donde el 40 % de este porcentaje dieron correcta solución a la situación problema; en varios casos como el mostrado en la Figura 46 se evidencian claras apropiaciones y diferenciación de los conceptos de costos, ingresos y utilidades, incluso aplicaron expresiones algebraicas que son adecuadas para este tipo de ejercicios. Además, los procedimientos aritméticos y algebraicos son detallados y correctos.

Figura 47

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 4 en el postest.

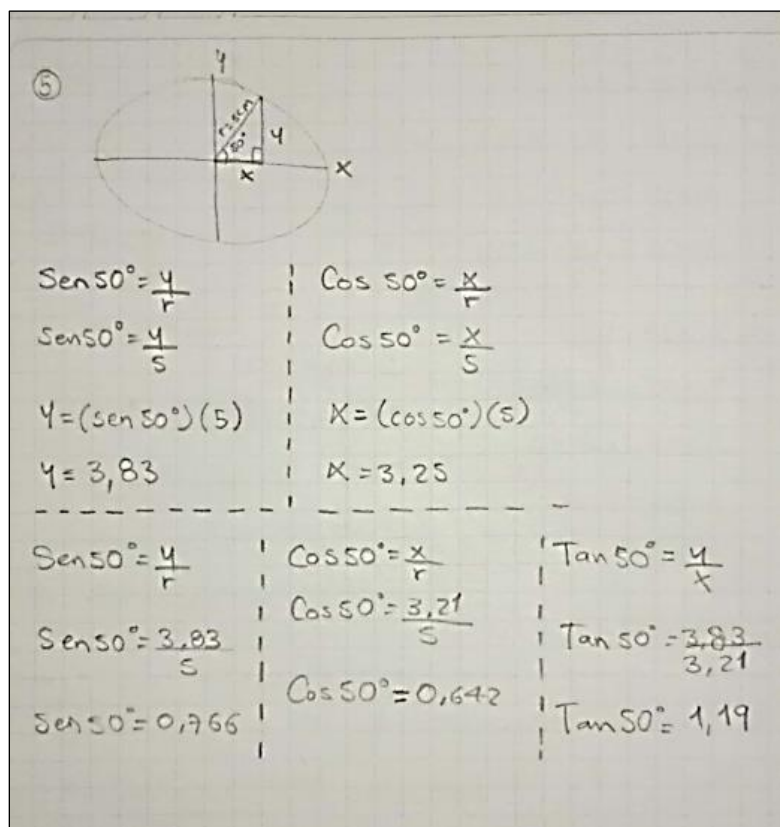


El 50 % de los estudiantes presentaron una solución mediada en el software de geometría dinámico GeoGebra, de este porcentaje el 40 % diseñó una heurística que dio solución correctamente al problema. En la Figura 47, se muestra que el estudiante, valiéndose de la interfaz gráfica del software desarrolla un interesante proceso que articula la instrumentación con la instrumentalización de las herramientas propias de las funciones de la línea recta y además le incorpora el uso de deslizadores; ello le permite explorar otros posibles costos, ingresos, utilidades y puntos de equilibrio.

P5. La representación gráfica de secciones cónicas como la circunferencia y el relacionar su posición espacial con un triángulo rectángulo, permiten el combinar el pensamiento espacial y geométricos y simultáneamente fortalecer el pensamiento variacional al percibir como cambian los valores de las relaciones trigonométricas: coseno, seno y tangente en el plano cartesiano al cambiar el ángulo de elevación de dicho triángulo.

Figura 48

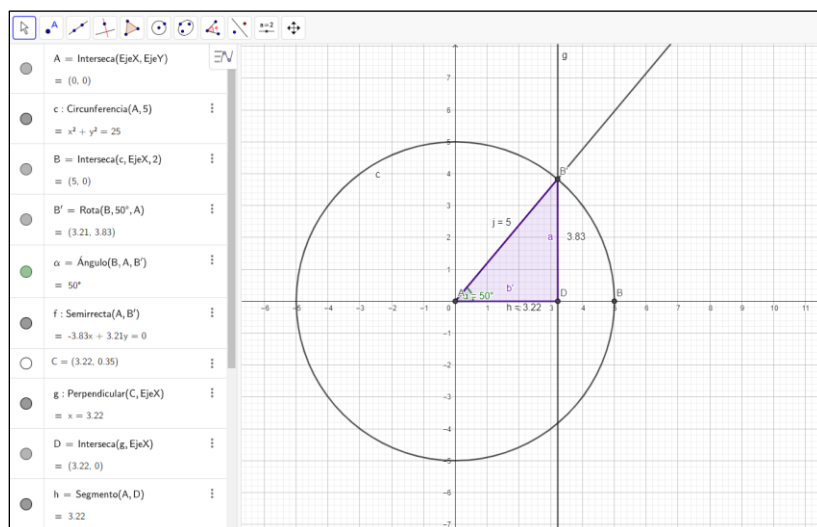
Solución analítica a situación problema 5 en el postest.



El 85 % de los estudiantes ofrecieron soluciones de forma analítica a este problema, de este porcentaje el 70 % lo resolvió de forma adecuada. Soluciones como la detallada en la Figura 48; refleja una adecuada ubicación de la circunferencia con $c(0,0)$ en el plano cartesiano. Posteriormente, al utilizar correctamente la definición de las razones trigonométricas consiguen encontrar los valores de las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Figura 49

Solución mediada en software de geometría dinámico a situación problema 5 en el postest.



El 60 % de los estudiantes ostentaron una solución mediada en un software de geometría dinámico GeoGebra, logrando alcanzar una solución correcta a la situación problema, como la presentada en la Figura 49; donde el alumno mediante la instrumentalización de herramientas trigonométricas y de Geometría Analítica del software (compás y ángulos), logra determinar el triángulo rectángulo con las indicaciones suministradas en el enunciado.

Parte 4: Resultados Comparativos entre Pretest y Postest

Seguidamente, se muestran los resultados comparativos entre la aplicación de los instrumentos del Pretest y el Postest, el cual se efectuó después de realizar los cuatro encuentros didácticos virtuales con los estudiantes y de transmitirles instrucciones acerca de la instrumentación y la instrumentalización del software de geometría dinámico GeoGebra; también apoyados en un libro de GeoGebra.

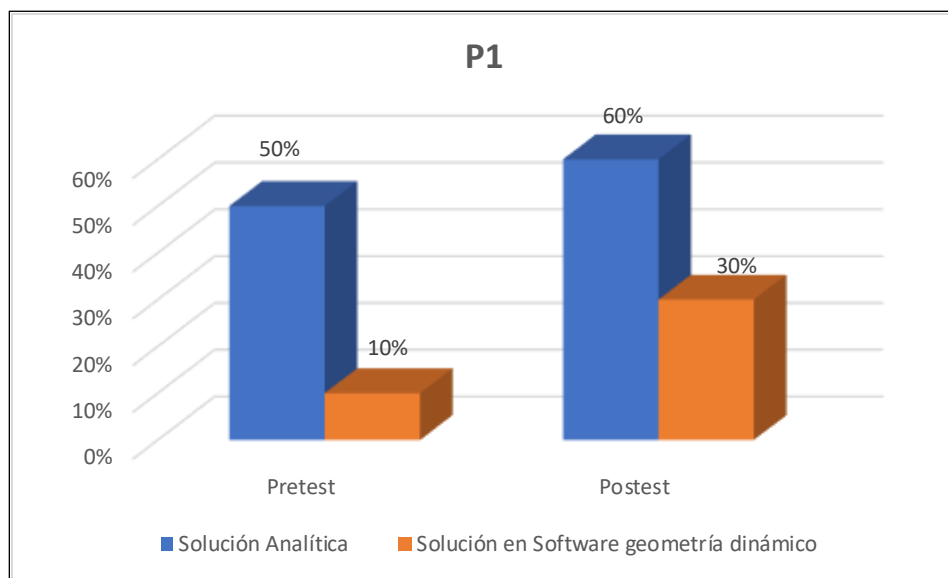
Mediante una confrontación de resultados de las soluciones correctas de cada uno de los 5 ítems, y así el lograr analizar el adelanto o retroceso de los alumnos en cuanto a la resolución

de situaciones problemáticas mediante procedimientos analíticos y mediados en el uso de software de geometría dinámico.

Para cada una de las preguntas se emplea la siguiente notación: P1, que representa la pregunta 1 en el pretest y postest, P2 para la pregunta 2 en el pretest y postest, y así sucesivamente hasta llegar a P5. Los resultados se muestran en un gráfico de barras y se expresan en porcentajes para facilitar la interpretación comparativa, considerando las respuestas correctas.

Figura 50

Solución a la situación problema de P1 en el pretest y postest.

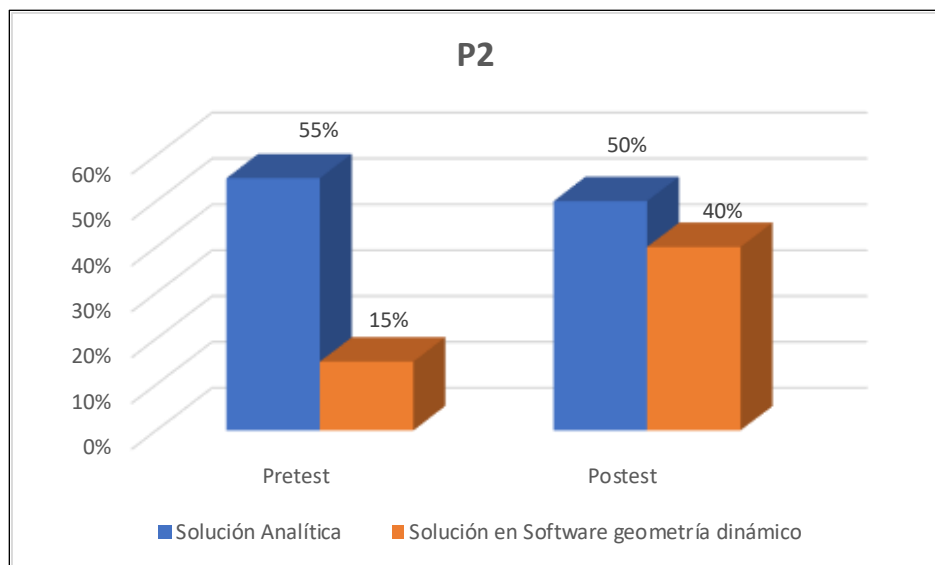


P1 hace referencia al pensamiento espacial y geométrico y además, al pensamiento variacional y de sistemas algebraicos, en esta situación problema se buscaba que el estudiante estableciera la razón entre el largo y ancho en relación con el cálculo de las dimensiones y área de una figura de forma rectangular. La Figura 50 muestra un incremento del 10% de efectividad en las soluciones de manera analítica y un aumento del 20% en la resolución efectiva de la P1 mediante el uso del software dinámico; lo cual evidencia que paulatinamente existe un proceso

de la Génesis Instrumental, es decir, que los alumnos se apropian de la herramienta GeoGebra como parte del proceso de desarrollo de una heurística.

Figura 51

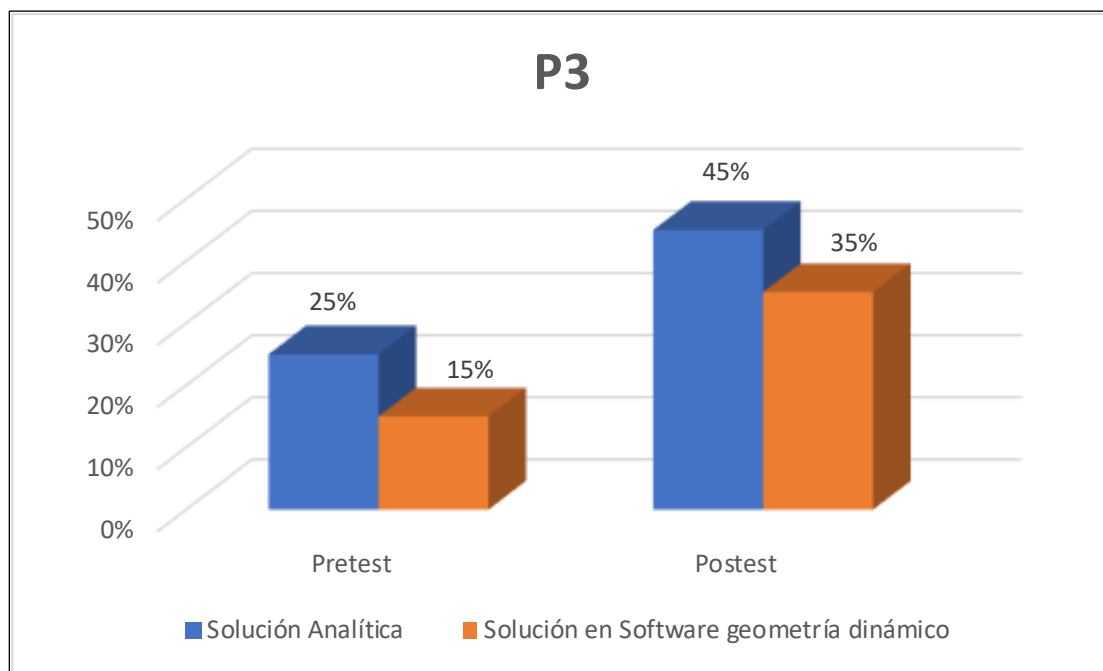
Solución a la situación problema de P2 en el pretest y postest.



Desde un enfoque trigonométrico, P2 hace referencia a las habilidades desarrolladas a través del pensamiento espacial y geométrico, se buscaba que el estudiante determinara las relaciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente), para hallar un ángulo de elevación y una longitud desconocida, la cual era solicitada a través de una situación cotidiana. La Figura 51 muestra una disminución del 5 % de efectividad en las soluciones de manera analítica y un aumento del 25 % en la resolución efectiva de la P2 mediante el uso del software dinámico.

Figura 52

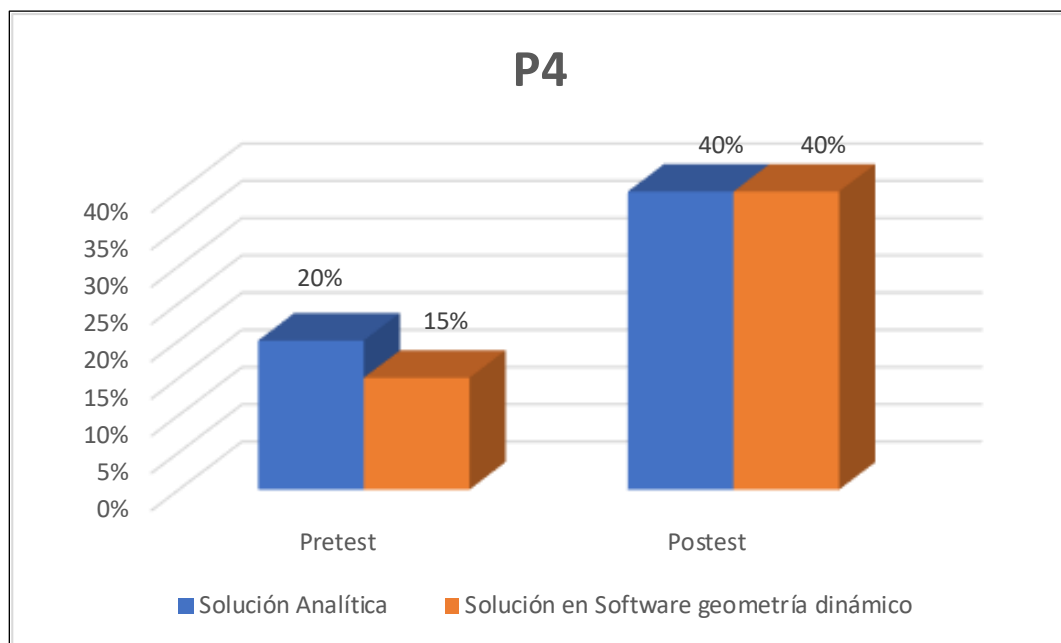
Solución a la situación problema de P3 en el pretest y postest.



P3 relaciona el pensamiento espacial y geométrico simultáneamente con el pensamiento numérico, por medio del cálculo de las dimensiones de una figura geométrica inscrita en otra. Se pretendía que el estudiante hallara la longitud de un cuadrado inscrito en una circunferencia, en una situación cotidiana. La Figura 52 detalla un aumento del 20 % de efectividad en las soluciones de manera analítica e igualmente se percibe un aumento del 20 % en la resolución efectiva de la P3 mediante el uso de heurísticas aplicadas en el software dinámico.

Figura 53

Solución a la situación problema de P4 en el pretest y postest.

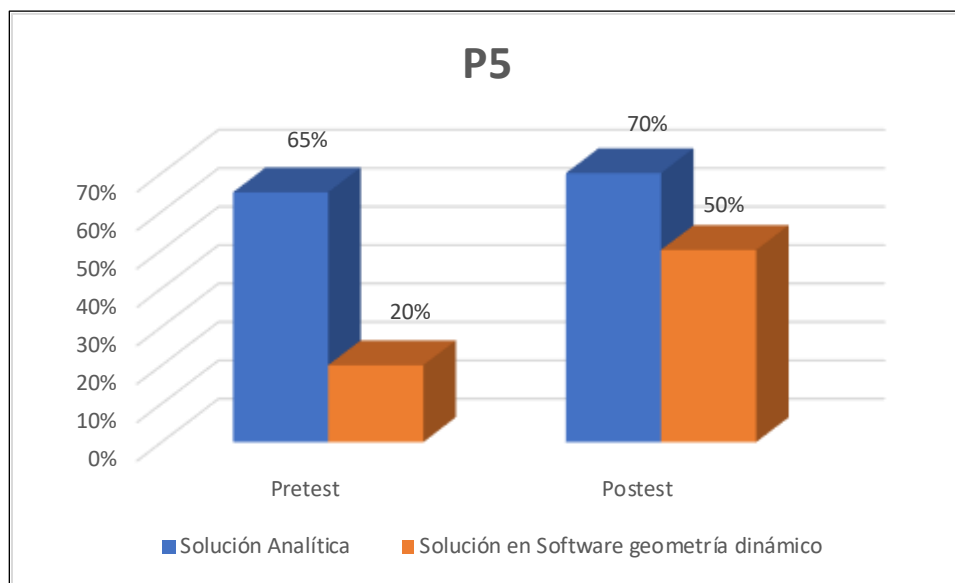


P4 hace referencia al pensamiento variacional y de sistemas algebraicos y al pensamiento numérico. Se pretendía que el estudiante lograra identificar y diferenciar claramente entre costos fijos y costos variables y así obtener un modelo algebraico para determinar el número de unidades producidas y vendidas en una empresa, además que se posibilitara determinar el punto de equilibrio entre la función costo y la función ingreso, así como determinar la utilidad del mercado. Se trataba, por tanto, de una situación contextualizada en las actividades económicas de la cotidianidad.

La Figura 53 muestra un incremento del 20 % de efectividad en las soluciones de analíticas y un aumento del 25 % en la resolución efectiva de la P4 mediante la utilización del software de geometría dinámico.

Figura 54

Solución a la situación problema de P5 en el pretest y postest.



P5 se refiere al pensamiento espacial y geométrico, en cuanto a la ubicación gráfica de secciones cónicas como la circunferencia y orientada al relacionar su posición espacial con un triángulo rectángulo cuya medida de la hipotenusa equivale al radio de dicha circunferencia; simultáneamente se pretendía fortalecer el pensamiento variacional al percibir como cambian los valores de las razones o relaciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, al variar el ángulo de elevación de dicho triángulo.

La Figura 54 muestra un leve incremento del 5 % de efectividad en las soluciones de analíticas y un aumento del 30 % en la resolución efectiva de la P5 mediante heurísticas fundamentadas en el software de geometría dinámico.

Parte 5: Resultados de las Actividades Realizadas en los Encuentros Virtuales

Los estudiantes de la muestra, participaron en las cuatro sesiones de los encuentros virtuales. A través de cada uno de los encuentros se les ofrece a los estudiantes información y aspectos relevantes acerca de la instrumentación e instrumentalización del software de geometría

dinámico y su utilidad para resolver problemas matemáticos; seguidamente, se detalla brevemente los resultados alcanzados en cada uno de dichos encuentros virtuales:

Encuentro virtual sesión 1: los estudiantes desconocían los orígenes del Software de geometría dinámico GeoGebra; así como su creador. Se perciben atentos al momento de recibir la exposición de introducción, generalidades y manejo del mismo. Se les da a conocer la manera de ingresar a esta herramienta tecnológica y se exhiben las diversas vistas que posee, haciendo diferenciación entre su vista algebraica y su vista gráfica en 2D y 3D; seguidamente se realiza una exploración de las barras de herramientas y menús que posee.

Encuentro virtual sesión 2: por medio de un comparativo entre la solución analítica y la solución mediada en el software dinámico GeoGebra para un problema trigonométrico y uno de geometría plana, los estudiantes se perciben interesados al notar como al proponer heurísticas en la herramienta digital se pueden vencer obstáculos conceptuales y errores procedimentales que se presentaron en las soluciones analíticas.

Encuentro virtual sesión 3: a través de la solución mediada en el software de geometría dinámico se plantea una heurística para resolver una situación algebraica sustentada en el comercio y la economía. Varios de los estudiantes manifiestan que desconocían la manera como el uso de la herramienta de deslizadores les permite el realizar variaciones en costos fijos, costos variables y los precios de venta del producto, lo cual les posibilita el realizar múltiples proyecciones del mercado con respecto al punto de equilibrio.

Encuentro virtual sesión 4: por medio de una heurística mediada en el software de geometría dinámico, el grupo de estudiantes se percibe expectante al ver como una situación relacionada con la Geometría Analítica y la Geometría Plana otorga una solución fácil y que implicaría un proceso extenso si se resuelve de manera analítica.

Parte 6 : Resultados del Repaso de las Actividades Propuestas en el Libro de Geometría

Dinámica

Desarrollados los encuentros virtuales, se les brinda a los estudiantes un link de acceso a un libro interactivo incorporado en el software de geometría dinámico GeoGebra; y se les otorga un lapso de 2 semanas para explorarlo, visualizarlo y voluntariamente ejercitar las actividades allí ejemplificadas y expuestas, en otras, esta actividad marca un proceso de instrumentación.

Los alumnos manifiestan por medio del grupo de WhatsApp, en el cual se mantiene activa comunicación con ellos, que el libro les parece una novedosa forma de seguir adentrándose y conociendo más herramientas y aplicabilidades en la resolución de situaciones problemáticas mediante el uso de esta herramienta digital.

Posterior a la actividad de instrumentación, la percepción de los estudiantes sobre el uso e implementación en la solución del software de Geometría Dinámica, es más intuitivo y de fácil manejo, en comparación al uso durante el curso de ATGA, en el cual, utilizaban GeoGebra solo como herramienta de verificación.

Discusión de Resultados

Durante el proceso investigativo ejecutado se obtienen resultados que permiten aprobar el diseño de las actividades fundamentadas en la bibliografía previamente estudiada. Primeramente, la aplicación de la prueba diagnóstico tenía como objetivo analizar las dificultades de conocimientos previos de los alumnos en los distintos pensamientos matemáticos. El pretest y postest como instrumentos de medición permitirán comparar el nivel de avance de los mismos a través de cinco problemas relacionados con Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, en los diferentes pensamientos matemáticos, sin embargo, en estos se analizó las heurísticas antes y después de las actividades con el uso de GeoGebra, de este modo, poder analizar que tanto las actividades influyeron en las modificación de heurísticas donde los estudiantes resuelven las situaciones problema de manera analítica y/o mediados en un software de Geometría Dinámica.

Posterior al análisis de resultados, se observa que, en general, las soluciones analíticas en el postest mejoraron en promedio hasta un 20% en comparación con el pretest. No obstante, persisten dificultades de índole algebraica, aritmética, y procedimental, entre otras, las cuales suelen derivar de errores sistemáticos que evidencian procesos mentales incorrectos, lo que ha llevado al estudiante a una comprensión errónea del problema planteado.

En cuanto a las soluciones mediadas a través del uso del software de geometría dinámico, se percibe que, para el pretest, sólo el 20% de los estudiantes de la muestra propusieron al menos una heurística a través de esta herramienta digital; pero sólo un 15 % llegaron a una solución efectiva, la cual en su mayoría fue de carácter comprobatorio como en su momento lo hicieron durante el curso de ATGA. Posterior a la aplicación del instrumento de postest, se refleja que un 55% de los estudiantes proponen al menos una heurística mediada en el software GeoGebra,

notándose un incremento hasta de un 30 % en la efectividad de resolución de las situaciones problemas.

Lo anterior permite evidenciar que después de los encuentros virtuales y del lapso de tiempo dado a los estudiantes para la exploración del libro de actividades diseñado en el software de geometría dinámico; se lograron respuestas correctas y heurísticas efectivas basados en la instrumentación e instrumentalización de dicho software.

Concebir la instrumentación y la instrumentalización en esta herramienta digital, es parte de una estrategia de enseñanza de las matemáticas que promovió el optimizar el grado de comprensión de los conceptos, el minimizar la ocurrencia de procesos de solución equívocos y el evitar los errores matemáticos a través del uso de heurísticas en softwares de geometría dinámico.

Se inicia desde el planteamiento de situaciones problemas aplicados a la cotidianidad, que incorpore en su planteamiento y resolución, la implementación y ejercitación en los pensamientos matemáticos, resaltando entre ellos: el pensamiento algebraico y variacional, el pensamiento espacial y geométrico y el pensamiento numérico. Esencialmente, en un procedimiento analítico, el estudiante hace uso y comprende una serie de esquemas y métodos que posibiliten la resolución de las situaciones problemáticas, tarea que puede ser en ocasiones tediosa, extensa y predispuesta a la ocurrencia de errores.

Al integrar herramientas digitales y tecnológicas con encuentros virtuales y repaso apoyado en libros de actividades, se logra a través de la ejercitación, llegar a una resolución adecuada de los problemas, integrando las tecnologías y herramientas digitales, debido a que se pueden complementar las heurísticas de tipo analítico con otras de tipo geométrico, dinámico, evitando en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, una limitación.

El hecho de involucrar a los alumnos en el proceso de aprendizaje autodirigido, además de abastecerlos con instrumentos y herramientas experimentales en softwares de geometría dinámica les permite suscitar el desarrollo de: los pensamientos matemáticos, de su conocimiento, de la comprensión y habilidades que finalmente generan una conexión entre las ideas nuevas y los presaberes. Los estudiantes tienen la conveniencia de examinar y plantear heurísticas, efectuar ajustes y establecer relaciones dinámicas entre las representaciones algebraicas y geométricas que tradicionalmente los docentes exponen en un tablero o usando libros de texto.

La enseñanza de concepciones y objetos matemáticos en educación superior por medio de la modalidad virtual puede presentar algunos desafíos, pero también existen una diversidad de estrategias tecnológicas y digitales que pueden ser utilizadas para promover una comprensión conceptual y a la vez adquirir una óptima habilidad en la resolución de problemas. Por tanto, la utilización de herramientas tecnológicas y digitales, como mediadores para la solución de problemas matemáticos, se considera parte esencial de una definida estrategia didáctica, que forja espacios de educación e interacción, promueve la accesibilidad, implica contextos socio-culturales y viabiliza que, el alumno examine, investigue y afiance de forma dinámica los conceptos.

Conclusiones y Recomendaciones

En el transcurso del trabajo de investigación, las actividades efectuadas por medio de los instrumentos diseñados, la serie de encuentros virtuales y el desarrollo de actividades formuladas en el libro del software de geometría dinámico GeoGebra, fueron fundamentadas como una secuencia de aprendizaje para la instrumentación e instrumentalización y a la vez se articularon como una propuesta para la resolución de problemas, cimentadas en la exploración y promoción de heurísticas que ayuden a solventar las dificultades, siendo un elemento protagonista el uso de las tecnologías digitales matemáticas.

Las diversas actividades diseñadas como trabajo de investigación aplicado, buscaron dar respuesta a cabalidad a la pregunta de investigación ¿cómo promover en estudiantes de educación superior y a distancia, el desarrollo de heurísticas para potenciar habilidades matemáticas que permitan la resolución de problemas en contexto?

Para responder a dicho interrogante, se trazó como objetivo, el diseñar un recurso virtual para la resolución de problemas en contexto, mediados con un software de Geometría Dinámica en un curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, en educación virtual y a distancia, que suscitara la resolución de problemas matemáticos desde una óptica distinta a la tradicional y que le permitiera a los estudiantes el conocer que existen diversas formas o heurísticas para resolver una situación problema, complementaria a la analítica, integrando el uso del dinamismo con un software de Geometría Dinámica, potenciando otros pensamientos matemáticos.

Para lograrlo, se adoptó la teoría de la Génesis Instrumental, en la búsqueda de hacer que GeoGebra se convirtiera en un instrumento para los estudiantes, y lo integraran como parte de nuevas heurísticas al momento de resolver problemas; los procesos de Génesis Instrumental se materializaron a través de un recurso virtual interactivo (libro GeoGebra), el cual, por medio de

una secuencia didáctica orientó a los alumnos en el manejo de las herramientas que ofrece el software GeoGebra y su aplicabilidad para el desarrollo de variados problemas en contexto donde se encuentran implícitos los pensamientos matemáticos. Dichos avances se lograron evidenciar a través de los instrumentos de medición.

La aplicación de los instrumentos de medición y el trabajo secuencial con los estudiantes permitió evidenciar que una actividad enfocada hacia la génesis instrumental, de manera guiada y con secuencias para la resolución de problemas contextualizados, logró que los alumnos modificaran las heurísticas, adoptando la herramienta digital como parte de su proceso, es por ello, que en los resultados derivados del pretest comparados con los del posttest, se observa que el porcentaje de estudiantes que utilizan GeoGebra es mayor.

Se logra evidenciar a través del análisis del conglomerado de resultados, que el trabajo de investigación aplicado, condujo aproximadamente a un 40 % de los estudiantes tomados como muestra a reconocer la instrumentación e instrumentalización de un software de geometría dinámico como un medio realmente eficiente para la promoción de heurísticas y fortalecimiento de los pensamientos matemáticos, que a su vez posibilitan la resolución de problemas que frecuentemente les ocasionaban inconvenientes por los errores y equivocaciones que se presentaban en sus soluciones analíticas.

Teniendo en cuenta, el cómo se desarrolló la aplicación de actividades, se recomienda que para lograr una instrumentación de un software de geometría dinámico, se realicé mediante un proceso gradual en el curso de primera matrícula de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, ofertado por la Universidad Nacional Abierta y a Distancia, tomándolo además como un complemento al fortalecimiento a la habilidad y nivel de efectividad para la resolución problemas de los estudiantes y a la consolidación de los pensamientos matemáticos, básicamente

al pensamiento variacional y de sistemas algebraicos, el pensamiento espacial y geométrico y asimismo al pensamiento numérico. Lo anterior implica cualificación docente para la creación de recursos interactivos que guíen gradualmente a los alumnos en la resolución de problemas con un software de Geometría Dinámica.

La aplicación de software de geometría dinámica en los programas de educación superior a distancia y virtual ofrece varias ventajas significativas que contribuyen a la aplicación de conceptos matemáticos. Estos beneficios incluyen:

Visualización dinámica de figuras geométricas, es decir en movimiento, lo que facilita la exploración y experimentación para la solución en un problema en contexto.

Manipulación y modificación interactiva de las representaciones geométricas en tiempo real, lo que favorece a los estudiantes en el comprender y diferenciar cómo las variaciones en los parámetros algebraicos y numéricos afectan las características y propiedades de las figuras.

Promoción de un aprendizaje autónomo y activo, al permitir que los estudiantes exploren y experimenten con modelos algebraicos y construcciones geométricas, posibilitando así el que descubran propiedades y teoremas por sí mismos. La inclusión de video tutoriales en un libro digital GeoGebra, permitió una flexibilización de la actividad y que los estudiantes trabajaran de manera autónoma y asincrónica.

Favorece a la capacidad y adquisición de destrezas para la resolución de problemas matemáticos, permitiendo que los estudiantes desarrollen sus pensamientos matemáticos al enfrentarse a desafíos algebraicos y geométricos y encuentren soluciones a través del uso del software de geometría dinámico.

Esta propuesta de investigación aplicada puede ampliarse a futuras investigaciones, implementándose incluso en otros cursos relacionados con las matemáticas, tales como el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, manteniendo los siguientes componentes:

1. Apoyo en materiales complementarios, debido a que los docentes pueden crear y compartir recursos interactivos, adaptando el contenido a los objetivos específicos del curso y las necesidades propias de los estudiantes.
2. El trabajo colaborativo, permitiendo la colaboración en tiempo real, favoreciendo la presentación de proyectos y actividades grupales entre estudiantes.
3. La compartición de heurísticas, debido a que los estudiantes y docentes pueden compartir construcciones y resultados fácilmente, fomentando un activo entorno de aprendizaje.
4. Planteamiento de actividades que incorporen elementos didácticos, tales como: iniciar de una situación problemática contextualizada en la cotidianidad, ejemplos y problemas dosificados que orienten paso a paso al estudiante hacia la conceptualización de objetos matemáticos mediados en el uso de heurísticas diseñadas en softwares de geometría dinámico; beneficiando así la óptima habilidad para resolver problemas, usando los pensamientos: aritmético, algebraico, variacional y geométrico.

Referencias Bibliográficas

- Aceleralastatic (2024). *Imagen de hojas*. [Comprobación del enlace \(office.net\)](#)
- Arcavi, A., y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 5(1), pp. 25–45.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Bednarz, N., y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. *Approaches to Algebra .Perspectives for Research and Teaching*, Dordrecht: Kluwer. pp. 115-136.
- Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. NFER- Nelson.
- Borba, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 589-610. <https://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4>
- Brousseau, G., Davis, R.,B. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Cruz L. y Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista de educación*, 97, 14-21.
- Cruzialseo (2024). *Imagen de hamburguesa*. [50 Ideas originales para nombres de negocios de hamburguesas | Cuzial SEO \(cruzialseo.com\)](#)
- Cuevas (2024). Lanzamiento del programa Maestría en Educación Matemática 2024. Universidad Nacional Abierta y a Distancia. <https://www.youtube.com/watch?v=f3AkDqrF7B4>

- Cuevas, C., y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action pratique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 273-292.
- Cuevas, C., y Pluvinage , F. (2009). Cálculo y Tecnología. (J. Riestra, y C. Cuevas, Edits.) *El Cálculo y su Enseñanza*, 1, pp. 45-59.
- Cuevas C.A., Villamizar, F.Y., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 129-150. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2091>
- De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrill, A., y Ramírez, A. (2001). *Geometría Analítica y Trigonometría*. Pearson.
- Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. En (J. Riestra, y C. Cuevas, Ed.). *El Cálculo y su Enseñanza*, 1, 91-91.
- Díaz, J. y Díaz, R. (2018). Los métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático. *Boletín de Educación Matemática*.
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a03>
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en matemática educativa II*. México: Iberoamerica.
- Faggiano, E. (2018). Synergy between manipulative and digital artefacts: a teaching experiment on axial symmetry at primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49 (8):1165-1180. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1449908>

Filloy, E. y Sutherland, R. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. En Bishop et al (Eds). *International Handbook Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Flaticon (2024). *Imagen de antena de telecomunicaciones*.

<https://statics.teams.cdn.office.net/evergreen-assets/safelinks/1/atp-safelinks.html>

Freepik (2024). *Imagen de tarjeta de publicidad*. [Free Vector | Corporate Business Card Design With Double-Sides For Advertising \(freepik.com\)](#)

Gallego, D., y Alfaro, E. (2017). Estudio cuantitativo sobre las concepciones de ciencia, metodología y enseñanza para profesores en formación. *Revista Lasallista de Investigación*, 14(1), 144-161. <https://www.redalyc.org/articulo.oaid=69551301014>

Garbin, S. (2015). *Investigar en pensamiento en pensamiento matemático avanzado*. Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación. 138 – 153.

http://funes.uniandes.edu.co/8361/1/Cap%C3%ADtulo_10_Investigar_en_PMA_SG.pdf

Global Sources (2024). *Imagen de radio*. [Compre Radio Portátil Am/fm, Radio Analógica Con Batería, Alimentada Por Ca y Radio de China por 7.4 USD | Global Sources](#)

Hohenwarter, M. y Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference*, Pecs, Hungary.

ICFES. (2023). Informe análisis estadístico de Resultados Prueba SABER 11 y Prueba SABER PRO año 2023. *Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación*. <https://www.javeriana.edu.co/recursosdb/5581483/11594517/INF-92-Analisis-Decada-Saber11-LEE2024.pdf>

- González, F. (1998). Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. *Zetetiké*, 6(9), 59-87.
- Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. *Alianza Universidad*. Madrid.
- MachHelicopters (2024). *Imagen de helipuerto*. [Comprobación del enlace \(office.net\)](#)
- MEN (1998). Serie de Lineamientos Curriculares. *Ministerio de Educación Nacional*.
https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Colombia. *Ministerio de Educación Nacional*. http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf
- Montiel, G. (2006). Construcción social de la función trigonométrica. En Martínez, Gustavo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 818-823). México.
- OCDE (2022). PISA 2022 Country Notes. *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos*. https://www.oecd.org/pisa/publications/Countrynote_COL_Spanish.pdf
- OMN FESPM (2019). *Problemas propuestos prueba individual Olimpiada Matemática Nacional 1990-2019*. [Problemas-Prueba-Individual-Olimpiada-Matemática-Nacional.pdf \(fespm.es\)](#)
- Ortiz Galarza, M. (2017). The influence of multiple representations on secondary students understanding of trigonometric functions. Universidad de Texas.
https://scholarworks.utep.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1516&context=open_etd
- Palarea, M., Hernández, J., y Socas, M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. *Formación del*

- Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, pp. 213-226. CAMPUS. La Laguna.
- Pngegg (2024). *Imagen de antena de comunicación*.
<https://statics.teams.cdn.office.net/evergreen-assets/safelinks/1/atp-safelinks.html>
- Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer. pp. 39-54.
- Ramírez, H. (2012). Tipología de errores presentados por estudiantes de primer curso de matemáticas universitarias (análisis epistemológico, didáctico y semiótico) (Tesis de maestría). Universidad de los Andes. Centro de investigación y formación en educación.
<https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/11851/u627421.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Rincón Matemático (2024). *Imagen de cuadrado circunscrito en círculo*. [Área de un cuadrado inscrito en un semicírculo - Geometría y Topología - Rincón Matemático \(rinconmatematico.com\)](https://rinconmatematico.com)
- Rodríguez, V. (2014). La Formación Situada y Los Principios Pedagógicos De La Planificación: La Secuencia Didáctica.
<https://efaidnbmnnnibpcajpcgclefindmkaj/https://www.redalyc.org/pdf/461/46132134027.pdf>
- Rubio-Pizorno, S. (2020). Crea un libro Geogebra como experto.
<https://www.youtube.com/watch?v=mONrIVSIWRI>
- Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Santos, L., M., y Moreno, A. (2013). International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education. *The Mathematics Enthusiast*, 10, 1 y 2.

- Santos, L., M. (2013). Digital Technologies and Mathematical Problem Solving. *Problem Solving in Mathematics Education*. pp. 19-20.
- Santos-L., M. (2016). La resolución de problemas matemáticos avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 1-24).
- Socas, M. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Socas, M., Hernández, J., Palarea, M., y Alfonso, M. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación*. pp. 101-119.
- Socas, M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, pp. 9-43.
- Sullivan, M. (1997). Trigonometría y Geometría Analítica. En S. Michael, Trigonometría y Geometría Analítica (4 ed.). México D.F., México: Prentice Hall.
- Tobón, T. S., Pimienta, P. J. y García, F. J. A. (2010). Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias. México: Pearson-Prentice Hall
- https://www.researchgate.net/publication/287206904_Secuencias_didacticas_aprendizaje_y_evaluacion_de_competencias
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental

orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.

Uline (2024). *Imagen de caja*.

es.uline.mx/CustomerService/ULINE_FAQ_Ans?FAQ_ID=57&ShowAsWindow=TRUE&stop_mobi=yes

Villamizar, F. (2014). *Propuesta didáctica para introducir una curva cónica mediante un entorno digital interactivo: El caso de la elipse (Tesis de maestría)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

https://www.researchgate.net/publication/378522179_Propuesta_didactica_para_introducir_una_curva_conica_mediante_un_entorno_digital_interactivo_El_caso_de_la_elipse

Villamizar, F. (2018). *Modelo metodológico para promover conceptos físicos y matemáticos: hacia la orquestación de actividades didácticas con tecnologías digitales (Tesis de doctorado)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

https://www.researchgate.net/publication/363565688_Modelo_metodologico_para_promover_conceptos_fisicos_y_matematicos_hacia_la_orquestacion_de_actividades_didacticas_con_tecnologias_digitales#fullTextFileContent

Villamizar, F., Y., Martínez, A., Cuevas, C. y Espinosa-Castro, J. (2020). Mathematical modeling with digital technological tools for interpretation of contextual situations. *Journal of Physics: Conference Series*, 1415, p.p. 1–6. DOI:10.1088/1742-6596/1514/1/012003

Villamizar, F. Y., Rincón, O. y Vergel, M. (2017). Diseño de escenarios virtuales para problemas de optimización en software de geometría dinámica. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología*, 10(2), 67-75. <http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v10i2.571>

Zabala, V. A. (2008). La práctica educativa. Cómo enseñar. México: Grao. <https://desfor.infed.edu.ar/sitio/profesorado-de-educacion-inicial/upload/zavala-vidiella-antoni.pdf>

Zeng, X. (2019). An analysis of mathematical process and understanding in a tutoring intervention: the case of trigonometry. Sidney. <https://researchdirect.westernsydney.edu.au/islandora/object/uws%3A61937>

Apéndices

Apéndice A Prueba Diagnóstica

El instrumento de diagnóstico se diseñó con 12 situaciones; 10 de ellas son de selección múltiple con única respuesta y los 2 restantes abordaron temas relacionados con la implementación de las tecnologías digitales en el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica- ATGA y permiten múltiples respuestas.

URL del instrumento: <https://url.unad.edu.co/vMLpQ>

El siguiente Diagnóstico se aplica como segundo instrumento de medición para obtener información acerca de la manera como los estudiantes adscritos a la ECBTI CCAV UNAD Cúcuta y que se encuentran en el curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica_ATGA dan resolución a diversos problemas que implican el uso de los pensamientos matemáticos y la aplicabilidad de tecnologías digitales en la solución de los mismos.

1 Si una libreta cuesta \$ 2.500. ¿Cuál de las siguientes expresiones sería útil para calcular el precio de tres docenas y media de esas libretas?

- a. $2500 \times (12 \times 3 \times 10)$ b. $(12 \times 3 \times 2500) - (6 \times 2500)$
 c. $[3 \times (12 \times 2500)] + (6 \times 2500)$ d. $2500 \times (3 \times 12 - 6)$ e. No sé.

2. El resultado obtenido al realizar la siguiente operación es:

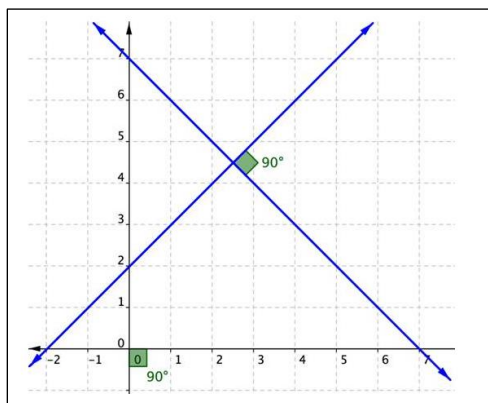
$$\sqrt{25} + (2^3 - \log_3 9) + [2\sqrt{9} + 1] - 5(2^0)$$

- a. 2 b. 0 c. 13 d. -5 e. No sé.

3. Del par de rectas trazadas en el plano cartesiano adjunto, se puede afirmar que:

Figura 55

Imagen de apoyo pregunta 3 diagnóstico

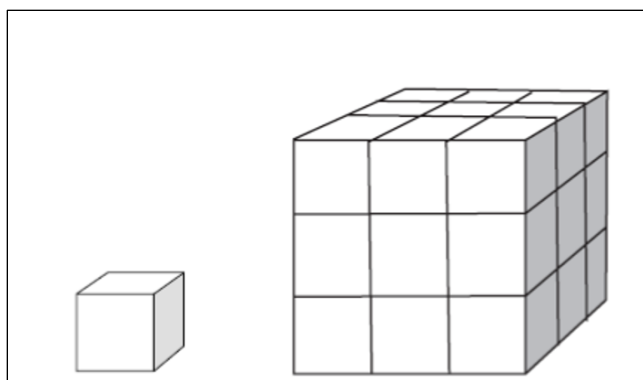


- Son rectas paralelas que se cortan en el punto (2.5 , 4.5)
- Son rectas secantes; pero no son perpendiculares
- Son rectas tangentes que forman un ángulo recto
- Son rectas perpendiculares que se cortan en el punto (2.5 , 4.5)
- No sé.

4. A Juan Diego construye bloques con cubos pequeños, para tal fin dispone de una determinada cantidad de cubos pequeños, usando adhesivo para unirlos y formar otros bloques. De las siguientes expresiones, ¿cuál utilizaría Juan Diego para determinar la cantidad de cubos pequeños necesarios en la construcción del bloque macizo que se muestra en el gráfico?.

Figura 56

Imagen de apoyo pregunta 4 diagnóstico (tomada de OMN FESPM, 2019, p. 10)



- $2^3 + 3^2$
- 3^3
- $2^4 - 3^0$
- 3^4
- No sé.

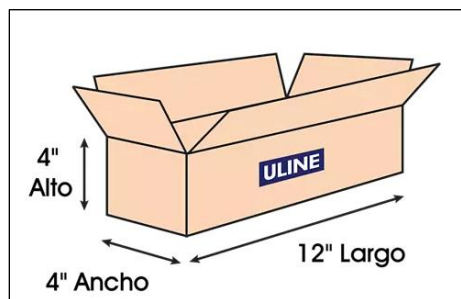
5. En la clase de Naturales, se le pide a Lina que recorte un trozo de madera de 1,25 metros; Pero dispone de una cinta métrica dividida en centímetros. ¿Cuántos centímetros debe medir Lina para cumplir con su tarea?

- a. 125 cm b. 1250 cm c. 12,5 cm d. 0,125 cm e. No sé.

6. En la sección de empaques de una fábrica de zapatos, se utilizan cajas como las que se muestran en la imagen, cuyas dimensiones están representadas por las variables "l", "a", "h". La expresión algebraica que permite calcular el volumen que ocuparán 100 cajas de esos zapatos es:

Figura 57

Imagen de apoyo pregunta 6 diagnóstico (tomada de Uline, 2024)

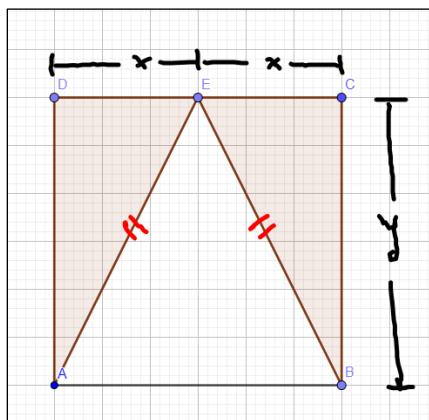


- a. $100 \times (l \times a \times h)$ b. $(h \times a + l) \times 100$ c. $100 \div (l \times a \times h)$ d. $(l \times a \times h) \div 100$
e. No sé.

7. Dentro del cuadrado ABCD se encuentra inscrito el triángulo isósceles ABE. Teniendo en cuenta los datos suministrados en la imagen, selecciona la expresión que me permite calcular el valor del área sombreada.

Figura 58

Imagen de apoyo pregunta 7 diagnóstico



- a. $y^2 - 3\left(\frac{xy}{2}\right)$ b. $y(y - x)$ c. $x^2 - \frac{y^2}{2}$ d. $x(x - y^2)$ e. No sé.

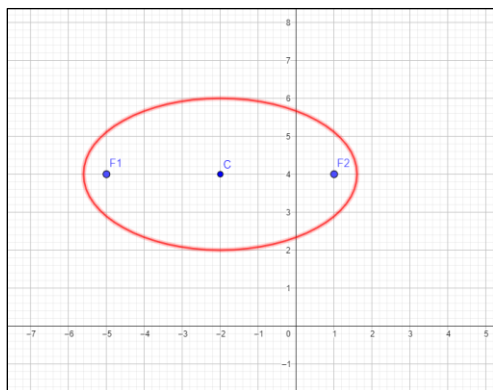
8. En una nevera hay botellas de agua de 2L y de 3L. Si las 8 botellas que hay representan 19L; además el precio de la botella de 3L excede en \$1.500 el precio de la botella de 2L; pero un día de ofertas por la compra de dos botellas de 3L obsequian una de 2L. ¿Qué datos serán necesarios para hallar el número de botellas de cada tamaño que hay en la nevera?

- f. El número total de botellas en la nevera, la diferencia de precio de las botellas de 3L y 2L, la suma de las capacidades de todas las botellas.
- g. La diferencia de precio de las botellas de 3L y 2L, el número de botellas que se pueden guardar en la nevera, la promoción de un día de ofertas.
- h. La capacidad de cada botella, la promoción de un día de ofertas, la diferencia de precio de las botellas de 3L y 2L.
- i. El número total de botellas que hay en la nevera, la capacidad de cada botella, la suma de las capacidades de todas las botellas.
- j. No sé.

9. Dada el lugar geométrico mostrado en la imagen. Señala la ecuación que lo representa.

Figura 59

Imagen de apoyo pregunta 9 diagnóstico



- a. $(y + 4)^2 = 9(x - 2)^2$ b. $\frac{(x+2)^2}{13} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ c. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$
 d. $\frac{(x-2)^2}{13} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$ e. No sé.

10. Señala la expresión algebraica que mejor representa el siguiente enunciado: Si el doble de un número se disminuye en 5, el resultado obtenido equivale a la séptima parte del mismo número aumentado en 2.

- a. $\frac{x}{2} - 5 = \frac{x}{7} + 2$ b. $2x + 5 = \frac{x}{7} + 2$ c. $\frac{x}{2} + 5 = \frac{x}{7} - 2$ d. $2x - 5 = \frac{x}{7} + 2$ e. No sé.

11. A continuación, marca todas las posibles herramientas tecnológicas que has utilizado:

- a. Excel b. That quiz c. GeoGebra d. Symbolab e. Ninguno de los anteriores.

12. Si has utilizado el software dinámico GeoGebra. En qué nivel de dominio consideras que te encuentras. (Siendo 1 el menor nivel y 5 el mayor nivel).

- a. Nivel 1 b. Nivel 2 c. Nivel 3 d. Nivel 4 e. Nivel 5.

Apéndice B Pretest

El siguiente Instrumento de medición se aplica con la finalidad de adquirir información sobre los estudiantes adscritos a la ECBTI CCAV UNAD Cúcuta y que se encuentran en el curso de primera matrícula de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica_ATGA. Esencialmente, conocer su apreciación acerca de la resolución analítica de problemas y la aplicabilidad heurística de tecnologías digitales entre ellos el uso del Software GeoGebra en la solución de los mismos.

URL del instrumento: <https://url.unad.edu.co/6ZlrJ>

Resuelve de forma analítica (usando procedimientos, formulas, teoremas, etc.) y luego proponga una heurística (una forma de solucionarlo) usando GeoGebra.

Problema 1:

Una empresa publicitaria fabricante de tarjetas de presentación diseña un modelo de tarjeta de modo que siempre la proporción (cociente) entre el largo y el ancho sea de 1,6; es decir aproximadamente el número áureo.

Figura 60

Imagen de apoyo problema 1 pretest



Fuente. freepik

Determina:

- Cuáles deben ser las medidas de la tarjeta si su área debe ser de 40 centímetros cuadrados.

b) Si un cliente desea que el largo y el ancho sea de 4 cm, ¿cuál debe ser el largo y el área de la tarjeta para mantener la proporción?

c) Si un cliente desea que el largo de la tarjeta sea de 5 cm, ¿cuál debe ser la medida del ancho y del área para mantener la proporción?

Problema 2:

Dos operarios de una empresa de Telecomunicaciones se encuentran en una zona rural instalando una antena de 40 m de alto. Para soportarla necesitan agregar dos templete, uno a cada lado de la antena.

Figura 61

Imagen de apoyo problema 2 pretest



Fuente. pngggg

Determina:

a) El ángulo de elevación que debe formar el primer templete con el suelo si su anclaje se encuentra a 5m de la base de la antena.

b) La longitud que debe tener el segundo templete, si este forma un ángulo de 60° con el suelo en su punto de anclaje.

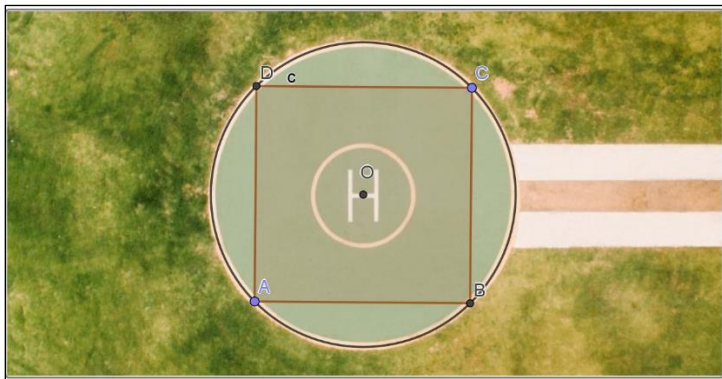
Problema 3:

Sobre una zona verde de forma circular de un batallón, se desea construir un Helipuerto; dentro de dicha zona circular de 20 m de radio estará inscrito un cuadrado cuyos lados delimitaran las zonas de protección al momento del desembarque de las aeronaves.

Determinar las dimensiones que debe tener este cuadrado de protección.

Figura 62

Imagen de apoyo problema 3 pretest



Fuente. machhelicopters

Problema 4:

La empresa "Burger Blues" dedicada a la elaboración y comercialización de hamburguesas realiza un estudio de mercadeo sobre su tipo de hamburguesa clase A. El propietario estima los costos fijos de su empresa en \$1.500.000 y un costo de preparación de \$8.500 por cada unidad. Si el precio de venta por cada hamburguesa es de \$ 16.000.

Figura 63

Imagen de apoyo problema 4 pretest



Fuente. cruzialseo

Determinar:

- a) La función que representa el Costo total de producir "x" unidades de hamburguesas.
- b) La función Ingreso total de vender "x" unidades de hamburguesas.
- c) La función Utilidad total de elaborar y vender "x" unidades de hamburguesas.
- d)Cuál será el punto de equilibrio entre la función costo y función ingreso.
- e) A partir de cuantas unidades vendidas existirá ganancias para el propietario de la

empresa "Burger Blues".

Problema 5:

Dentro de una circunferencia con centro en el origen y de radio 1 cm, se ubica un triángulo rectángulo cuyo ángulo de elevación formado entre el semieje de las "x" y el vértice en el origen es de 60° . Determinar las relaciones trigonométricas: seno, coseno y tangente para este ángulo.

Apéndice C Postest

Resuelve de forma analítica (usando procedimientos, formulas, teoremas, etc.) y luego proponga una heurística (una forma de solucionarlo) usando el software dinámico GeoGebra.

URL del instrumento: <https://url.unad.edu.co/hp745>

Problema 1:

Una empresa fabricante de papel diseña un modelo de hoja de cartulina de modo que siempre la proporción (cociente) entre el largo y el ancho sea de 2,5.

Figura 64

Imagen de apoyo problema 1 postest



Fuente. aceleralastatic.nyc3.cdn

Determina:

a) Cuáles deben ser las medidas de la hoja de cartulina si su área debe ser de 150 centímetros cuadrados.

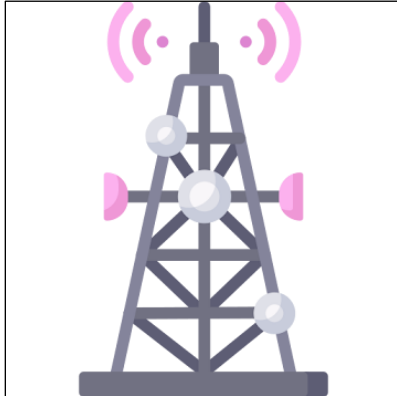
b) Si un cliente desea que el largo de la tarjeta sea de 12 cm, ¿cuál debe ser la medida del ancho y del área para mantener la proporción?

Problema 2:

Dos operarios de una empresa de Telefonía se encuentran instalando una antena de 25 m de alto. Para soportarla necesitan colocar dos templetes, uno a cada lado de la antena.

Figura 65

Imagen de apoyo problema 2 postest



Fuente. flaticon

Determina:

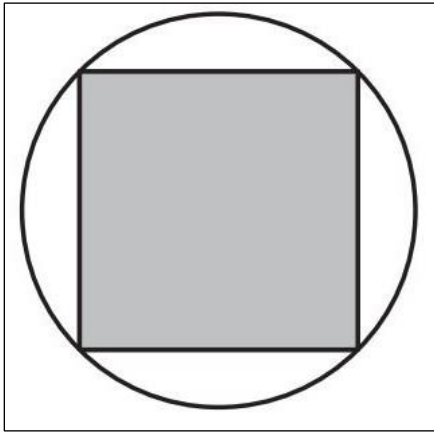
- a) El ángulo de elevación que debe formar el primer templete con el suelo si su anclaje se encuentra a 9 m de la base de la antena.
- b) La longitud que debe tener el segundo templete, si este determina un ángulo de 45° con el suelo en su punto de anclaje.

Problema 3:

Se destina una zona verde de forma circular para construir un parque infantil; dentro de dicha zona circular de 30 m de radio estará inscrito un área cuadrada de concreto.

Figura 66

Imagen de apoyo problema 3 postest



Fuente. foro.rinconmatematico

Determina las dimensiones que debe tener este cuadrado inscrito en la zona verde.

Problema 4:

La empresa "RTC STEREO" dedicada a la elaboración y comercialización de radios realiza un estudio de mercadeo sobre su tipo de producto más comercializado. El propietario estima los costos fijos de su emprendimiento en 850 USD y un costo de producción de 5,8 USD por cada unidad. Si el precio de venta por cada radio es de 12 USD.

Figura 67

Imagen de apoyo problema 4 postest



Fuente. spanish.globalsours

Determinar:

- a) La función que representa el Costo total de producir "x" unidades de radios.
- b) La función Ingreso total de vender "x" unidades de radios.
- c) La función Utilidad total de elaborar y vender "x" unidades de radios.
- d)Cuál será el punto de equilibrio entre la función costo y función ingreso.
- e) A partir de cuántos radios vendidos existirá ganancias para el propietario de la empresa " RTC STEREO ".

Problema 5:

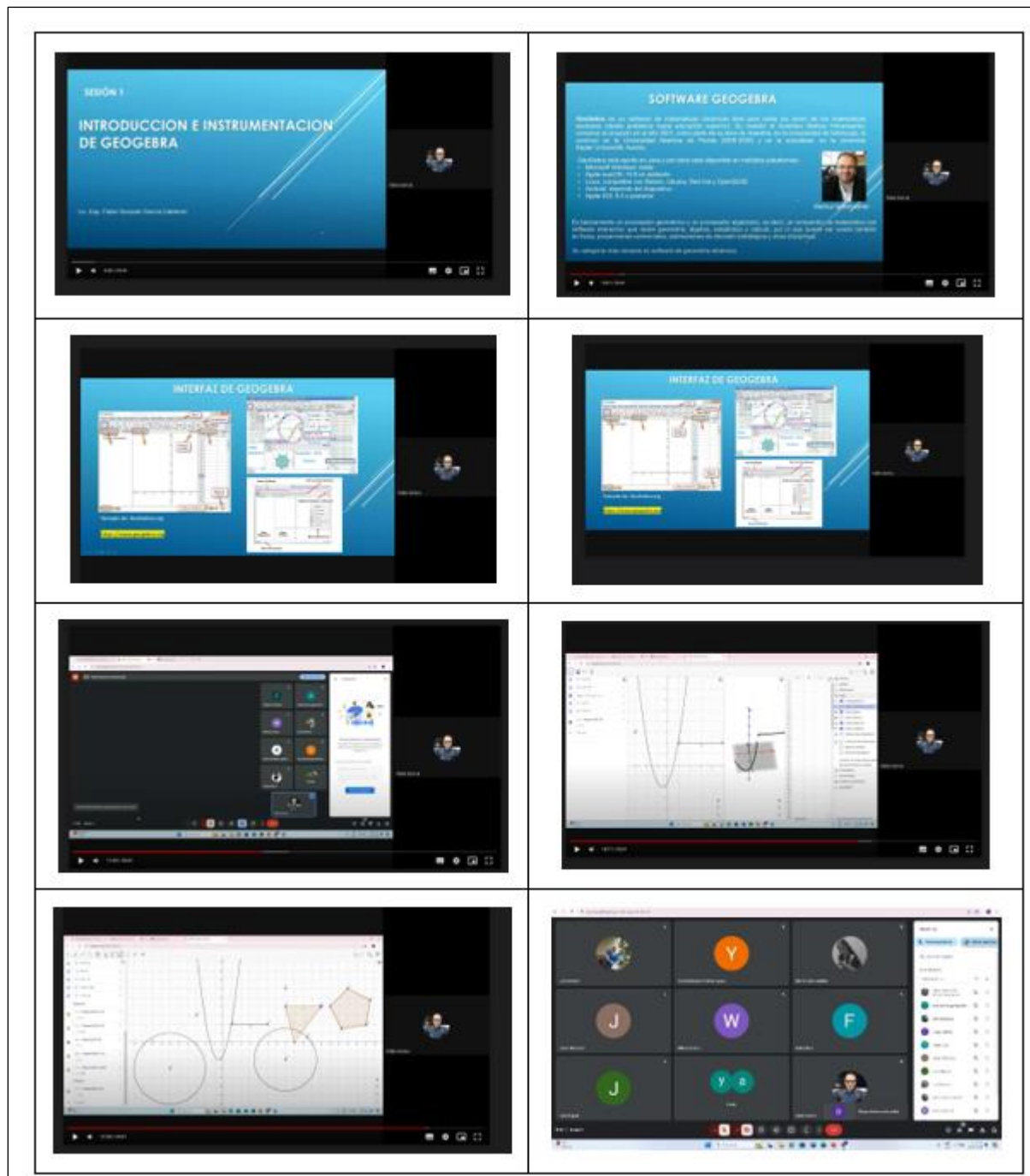
Dentro de una circunferencia con centro en el origen y de radio 5 cm, se ubica un triángulo rectángulo cuyo ángulo de elevación formado entre el semieje de las " x " y el vértice en el origen es de 50° . Determinar las relaciones trigonométricas: seno, coseno y tangente para este ángulo.

Apéndice D Encuentro Virtual Sesión 1

URL de la grabación: <https://url.unad.edu.co/W9T44>

Figura 68

Evidencia Encuentro Virtual Sesión 1



Apéndice E Encuentro Virtual Sesión 2

URL de la grabación: <https://url.unad.edu.co/sQIQJ>

Figura 69

Evidencia Encuentro Virtual Sesión 2

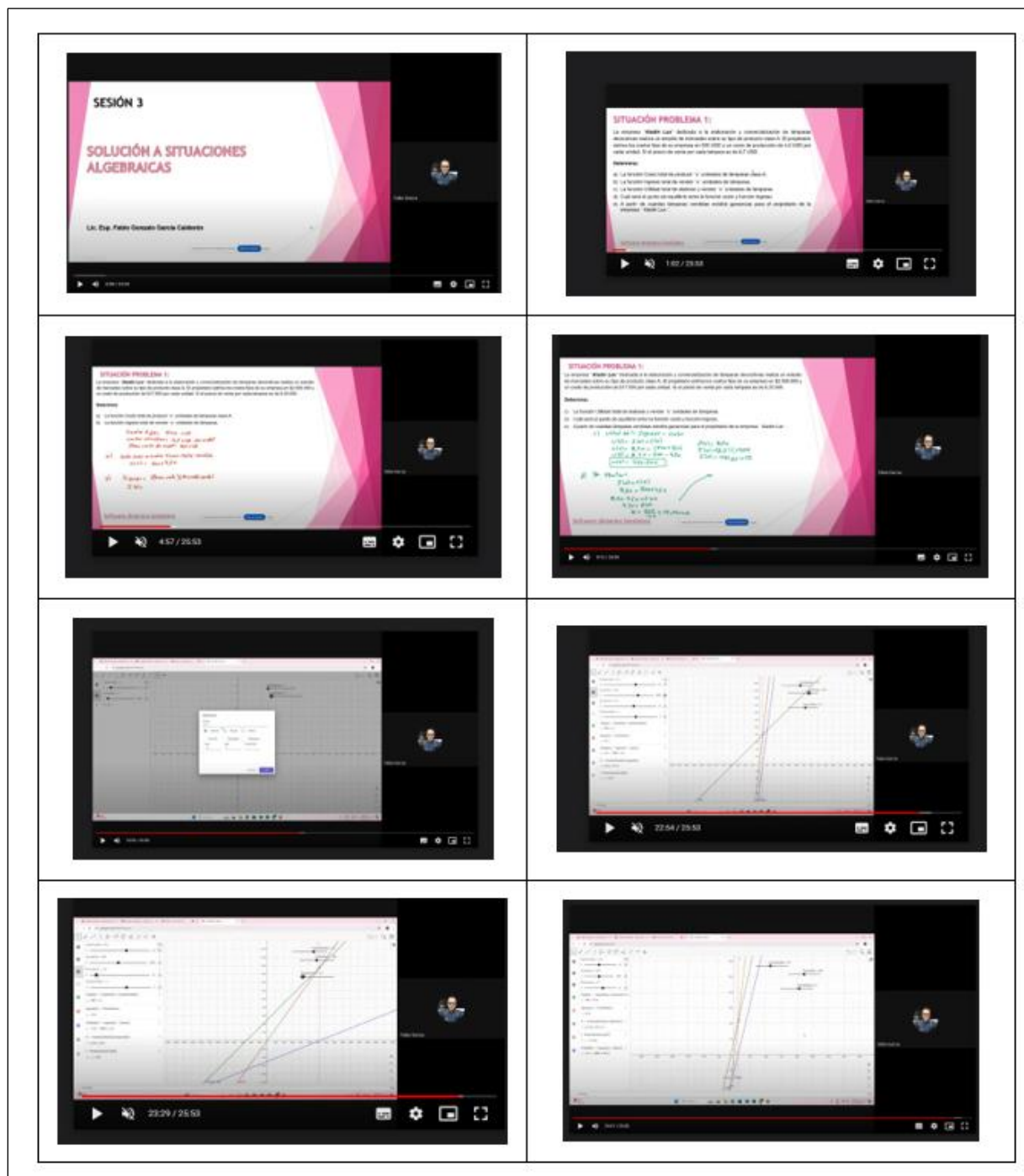


Apéndice F Encuentro Virtual Sesión 3

URL de la grabación: <https://url.unad.edu.co/emmhi>

Figura 70

Evidencia Encuentro Virtual Sesión 3

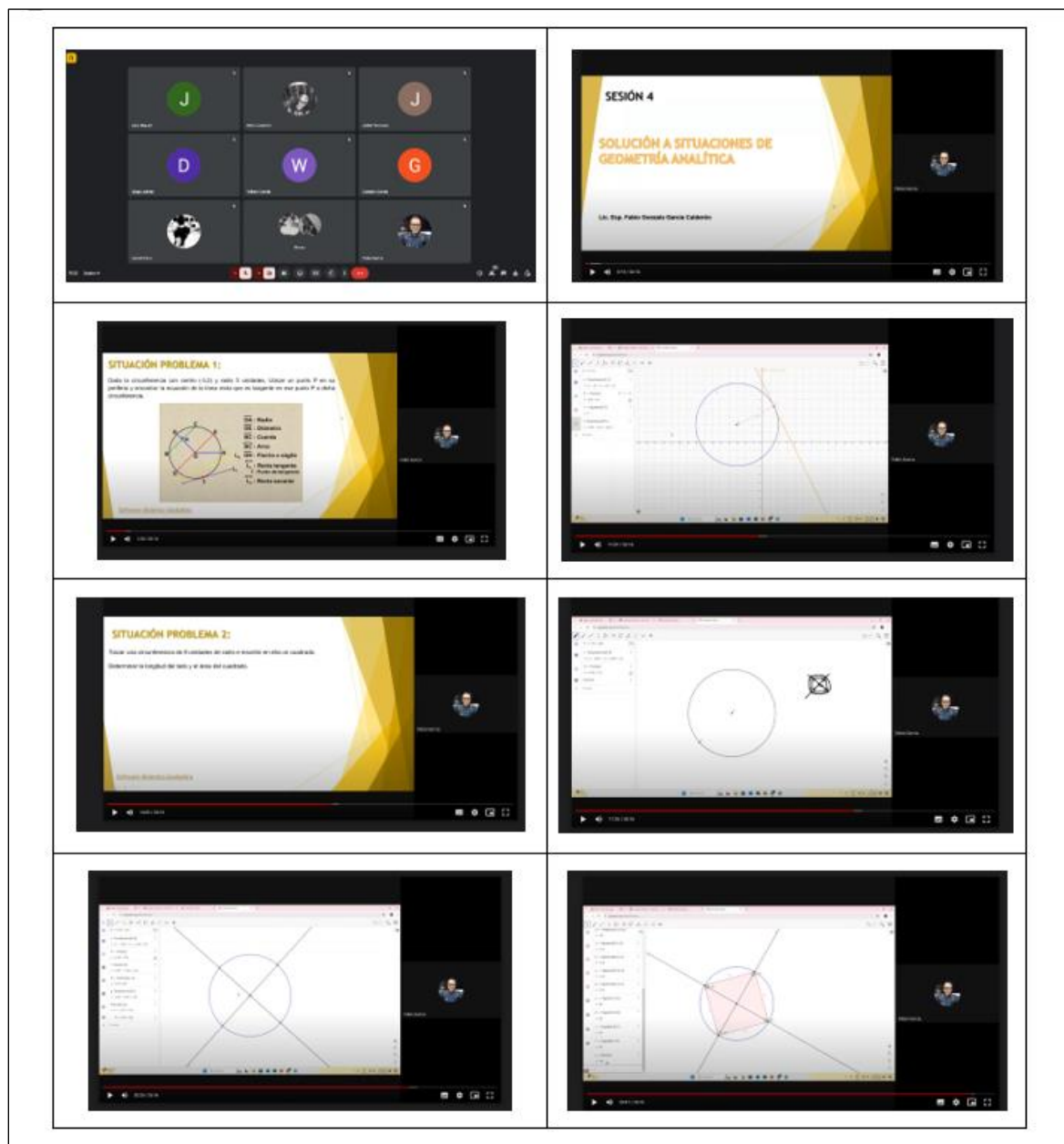


Apéndice G Encuentro Virtual Sesión 4

URL de la grabación: <https://url.unad.edu.co/H3Owt>

Figura 71


Evidencia Encuentro Virtual Sesión 4



Apéndice H Carta Solicitud Evaluación de Instrumentos

Figura 72

Carta Solicitud Evaluación de Instrumentos



CARTA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

San José de Cúcuta, 27 de febrero de 2024

Mg. Carlos Alberto Contreras Delgado


Cordial saludo,

Por medio de la presente comunicación, me permito solicitarle su valiosa colaboración para que en calidad de experto realice la validación de los instrumentos de diagnóstico y Pretest que a continuación adjunto, los cuales fueron elaborados con la finalidad de recolectar la información necesaria para el trabajo investigativo que lleva por título: *Las Tecnologías Digitales para la Resolución de Problemas: el caso de un Curso de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica de nivel superior en educación Virtual y a Distancia* Esta investigación es realizada por el Lic Esp. **Fabio Gonzalo García Calderón**, como requisito para optar por el Título de Magister en Educación de la universidad Nacional Abierta y a Distancia – UNAD.

Considero que su participación es idónea y fundamental; ya que consistirá en analizar y evaluar la suficiencia, claridad, coherencia y relevancia de cada ítem del instrumento. La evaluación de los instrumentos es de gran importancia para lograr que estos sean válidos y que los resultados obtenidos a partir de estos sean utilizados de forma eficiente para el desarrollo de dicha investigación

De antemano, le agradezco su valiosa colaboración.

Atentamente,




Fabio Gonzalo García Calderón
CC. 88222447 de Cúcuta (Norte de Santander)
Cel: 3102121679

Apéndice I Rúbrica de Evaluación Prueba Diagnóstica

Figura 73


Rúbrica de Evaluación Prueba Diagnóstica

Formato de validación de instrumentos				
Nombre del Experto (a)	Carlos Alberto Contreras Delgado			
Instrumento a validar	Prueba Diagnóstica	N° 01		
Criterios	Apreciación cualitativa			
	Bueno	Regular	Deficiente	Observación
CLARIDAD Y PERTINENCIA Los ítems están redactados con lenguaje apropiado y libre de ambigüedades acorde con los sujetos muestrales.	✓			El instrumento es claro y pertinente, mostrando un lenguaje apropiado.
COHERENCIA las preguntas y /o estructura guardan estricta relación con la finalidad del instrumento y los ítems del instrumento expresan relación entre ellos	✓			Se muestra coherencia y cohesión en cada una de las preguntas que componen el instrumento de medición.
SUFICIENCIA Los ítems del instrumento son suficientes en cantidad y calidad, acorde con la exigencia de la investigación.	✓			El número de ítems son suficientes y su calidad es acorde al nivel de exigencia de la investigación.
PRECISIÓN Las instrucciones y los ítems del instrumento permiten recoger la información precisa.	✓			Las instrucciones son claras y precisas permitiendo la recolección de información.
CONSISTENCIA La información que se recoja a través de los ítems del instrumento permitirá analizar, describir y explicar la realidad y motivo de la investigación.	✓			El motivo e intencionalidad del trabajo investigativo seguramente será descrito, analizado y explicado mediante la aplicación de este instrumento.
METODOLOGÍA La relación entre la técnica y el instrumento propuesto responden al propósito de la investigación.	✓			La técnica descrita por este instrumento responde al propósito investigativo.
ORGANIZACIÓN Los ítems del instrumento reflejan organicidad y estructuración lógica.	✓			Este instrumento refleja una estructura lógica y organizada conforme a la finalidad de la investigación.
Resultado de la validación del instrumento En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Sí, con ajustes <input type="checkbox"/> Fecha: 5 de marzo de 2024  Firma del Experto C.C. 88031653				

Apéndice J Rúbrica de Evaluación del Pretest

Figura 74


Rúbrica de Evaluación del Pretest

Formato de validación de instrumentos				
Nombre del Experto (a)	Carlos Alberto Contreras Delgado			
Instrumento a validar	Prueba Pretest	N° 02		
Criterios	Apreciación cualitativa			
	Bueno	Regular	Deficiente	Observación
CLARIDAD Y PERTINENCIA Los ítems están redactados con lenguaje apropiado y libre de ambigüedades acorde con los sujetos muestrales.	✓			El instrumento es claro y pertinente, mostrando un lenguaje apropiado.
COHERENCIA las preguntas y /o estructura guardan estricta relación con la finalidad del instrumento y los ítems del instrumento expresan relación entre ellos	✓			Se muestra coherencia y cohesión en cada una de las preguntas que componen el instrumento de medición.
SUFICIENCIA Los ítems del instrumento son suficientes en cantidad y calidad, acorde con la exigencia de la investigación.	✓			El número de ítems son suficientes y su calidad es acorde al nivel de exigencia de la investigación.
PRECISIÓN Las instrucciones y los ítems del instrumento permiten recoger la información precisa.	✓			Las instrucciones son claras y precisas permitiendo la recolección de información.
CONSISTENCIA La información que se recoja a través de los ítems del instrumento permitirá analizar, describir y explicar la realidad y motivo de la investigación.	✓			El motivo e intencionalidad del trabajo investigativo seguramente será descrito, analizado y explicado mediante la aplicación de este instrumento.
METODOLOGÍA La relación entre la técnica y el instrumento propuesto responden al propósito de la investigación.	✓			La técnica descrita por este instrumento responde al propósito investigativo.
ORGANIZACIÓN Los ítems del instrumento reflejan organicidad y estructuración lógica.	✓			Este instrumento refleja una estructura lógica y organizada conforme a la finalidad de la investigación.
Resultado de la validación del instrumento				
En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado				
Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Sí, con ajustes <input type="checkbox"/> Fecha: 6 de marzo de 2024				
 Firma del Experto C.C. 88031653				

Apéndice K Rúbrica de Evaluación del Postest

Figura 75

Rúbrica de Evaluación del Postest

Formato de validación de instrumentos				
Nombre del Experto (a)	Carlos Alberto Contreras Delgado			
Instrumento a validar	Prueba Postest	N° 03		
Criterios	Apreciación cualitativa			
	Bueno	Regular	Deficiente	Observación
CLARIDAD Y PERTINENCIA Los ítems están redactados con lenguaje apropiado y libre de ambigüedades acorde con los sujetos muestrales.	✓			El instrumento es claro y pertinente, mostrando un lenguaje apropiado.
COHERENCIA las preguntas y /o estructura guardan estricta relación con la finalidad del instrumento y los ítems del instrumento expresan relación entre ellos	✓			Se muestra coherencia y cohesión en cada una de las preguntas que componen el instrumento de medición.
SUFICIENCIA Los ítems del instrumento son suficientes en cantidad y calidad, acorde con la exigencia de la investigación.	✓			El número de ítems son suficientes y su calidad es acorde al nivel de exigencia de la investigación.
PRECISIÓN Las instrucciones y los ítems del instrumento permiten recoger la información precisa.	✓			Las instrucciones son claras y precisas permitiendo la recolección de información.
CONSISTENCIA La información que se recoja a través de los ítems del instrumento permitirá analizar, describir y explicar la realidad y motivo de la investigación.	✓			El motivo e intencionalidad del trabajo investigativo seguramente será descrito, analizado y explicado mediante la aplicación de este instrumento.
METODOLOGÍA La relación entre la técnica y el instrumento propuesto responden al propósito de la investigación.	✓			La técnica descrita por este instrumento responde al propósito investigativo.
ORGANIZACIÓN Los ítems del instrumento reflejan organicidad y estructuración lógica.	✓			Este instrumento refleja una estructura lógica y organizada conforme a la finalidad de la investigación.
Resultado de la validación del instrumento				
En consecuencia, el instrumento puede ser aplicado				
Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Sí, con ajustes <input type="checkbox"/> Fecha: 6 de marzo de 2024				
				
Firma del Experto				
C.C. 88031653				

Apéndice L Formulario Encuesta de apreciación

URL de la encuesta: <https://url.unad.edu.co/h9U0F>

Figura 76

Formulario Encuesta de apreciación

ENCUESTA DE APRECIACION

Encuesta de apreciación de la Resolución de Problemas por medio de la Instrumentación e Instrumentalización del Software de Geometría Dinámico

Por medio de esta encuesta se recopilarán sus apreciaciones sobre la implementación de los encuentros virtuales orientados a la Resolución de Problemas por medio de la Instrumentación e Instrumentalización del Software de Geometría Dinámico

fabigar827@gmail.com [Cambiar de cuenta](#)

* Indica que la pregunta es obligatoria

Correo *

Tu dirección de correo electrónico

Nombres y Apellidos: *

Tu respuesta

Programa de Pregrado: *

Tu respuesta

Período académico (semestre) cursado: *

Tu respuesta

Consideras que gran cantidad de situaciones problemas de las matemáticas pueden resolverse mediante el uso de Softwares de Geometría Dinámico? *

En desacuerdo

Algo de acuerdo

De acuerdo

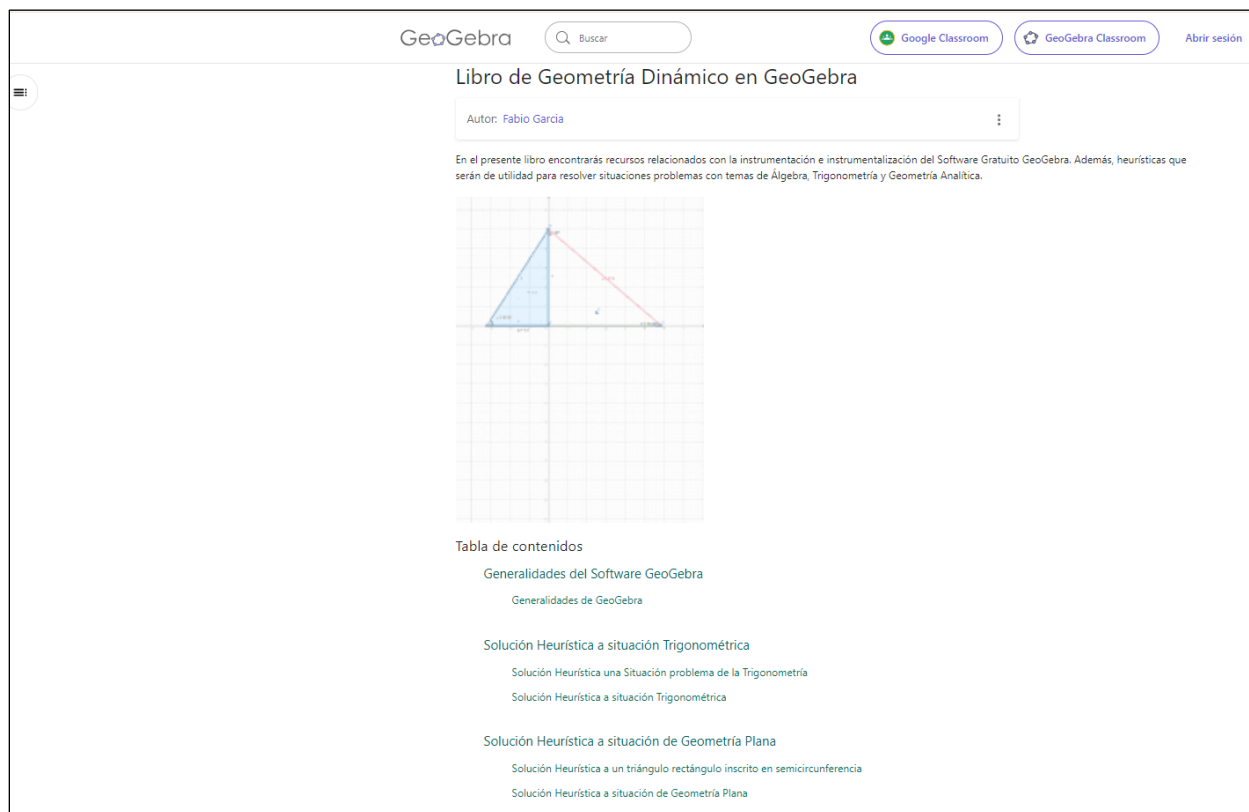
Totalmente de acuerdo

Apéndice M Libro de GeoGebra

URL del Libro de GeoGebra: <https://url.unad.edu.co/FYpLO>

Figura 77

Libro de GeoGebra



GeoGebra

[Google Classroom](#) [GeoGebra Classroom](#) [Abrir sesión](#)

Libro de Geometría Dinámico en GeoGebra

Autor: Fabio García

En el presente libro encontrarás recursos relacionados con la instrumentación e instrumentalización del Software Gratuito GeoGebra. Además, heurísticas que serán de utilidad para resolver situaciones problemas con temas de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.




Tabla de contenidos

- Generalidades del Software GeoGebra
 - Generalidades de GeoGebra
- Solución Heurística a situación Trigonométrica
 - Solución Heurística una Situación problema de la Trigonometría
 - Solución Heurística a situación Trigonométrica
- Solución Heurística a situación de Geometría Plana
 - Solución Heurística a un triángulo rectángulo inscrito en semicircunferencia
 - Solución Heurística a situación de Geometría Plana

Apéndice N Solución dada por una estudiante a ejercicio del postest

URL del vídeo de exposición de solución: <https://url.unad.edu.co/dbkDG>

Figura 78

Exposición de Solución dada por una estudiante a ejercicio del postest

