

**El cardiogram como estrategia pedagógica en el aprendizaje de las razones
trigonométricas para los estudiantes de grado decimo del Colegio Nuestra Señora del**

Rosario Sogamoso.

Elaborado por:

Andrea Lizbeth Nova Ávila

1049618759

Especialización en Educación Superior a Distancia (EESAD)

Asesor:

Dr. Edgar Crisanto Medina

Docente

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA - UNAD

ESCUELA CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - ECEDU

ESPECIALIZACIONES – ECEDU

Sogamoso, Abril de 2018

Resumen analítico especializado (RAE)	
Título	El cardiogram como estrategia pedagógica en el aprendizaje de las razones trigonométricas para los estudiantes de grado decimo del Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso.
Modalidad de Trabajo de grado	Proyecto Aplicado
Línea de investigación	Tomando como opción la línea de investigación de la ECEDU: Línea pedagogía, didáctica y currículo.
Autores	Andrea Lizbeth Nova Avila
Institución	Universidad Nacional Abierta y a Distancia
Fecha	26 de Marzo de 2018
Palabras Claves	Cardiogram, matemáticas, trigonometría, aprendizaje significativo, razones trigonométricas, estrategia pedagógica, aprendizaje autónomo.
Descripción	Este documento presenta los resultados del trabajo de grado realizado en la modalidad de Proyecto de Aplicado , bajo la asesoría de la doctor Edgar Crisanto Medina, inscrito en la Línea pedagogía, didáctica y currículo de la ECEDU, se realizó con estudiantes de grado décimo del colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso, identificando sus dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, con el fin de diseñar una cartilla para el aprendizaje de las razones trigonométricas utilizando como herramienta el cardiogram.
Fuentes	<p>Para el desarrollo de la investigación se utilizaron las siguientes fuentes principales:</p> <p>Coordinación de matemáticas. (2013) <i>Círculo Trigonométrico</i> PDF, México: Universidad Nacional Autónoma. http://cidead.cnice.mec.es</p> <p>Cárcel, F.J. (2016). Desarrollo de habilidades mediante el aprendizaje autónomo. 3C Empresa, Investigación y pensamiento crítico, 5(3), 54-62. DOI: https://www.3ciencias.com/wp-content/uploads/2016/08/art%C3%ADculo-4.pdf</p> <p>Equipo Santillana (2013). <i>Los caminos del saber Matemáticas 6</i>. Bogotá: Editorial Santillana S.A.</p> <p>Estándares básicos de competencias en área de matemáticas. (2011) <i>Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar!</i> http://mineducacion.gov.co/1621/article-116042_archivo_pdf2.pdf. pág. 51-56</p> <p>Gamboa, M. & García, Y. (2014). <i>Lineamientos para trabajos de grado de las especializaciones. ECEDU</i>. Actualización 2014-II. Bogotá, D.C. Universidad Nacional Abierta y a Distancia.</p> <p>Palmero M. (2013) <i>La teoría del aprendizaje significativo</i>. Centro de Educación a Distancia (C.E.A.D.). C/ Pedro Suárez Hdez., s/n. C.P. nº 38009 Santa Cruz de Tenerife Peña, C. & Vargas, J. (2015) <i>Unidad didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en la educación media utilizando el modelo de van hiele</i>. Monografía Universidad de los Llanos. Villavicencio. http://repositorio.unillanos.edu.co/bitstream/001/346/1/TESIS%20JULIAN.pdf</p> <p>Sandoval, C. (2013) <i>Investigacion Culaitativa</i>, Colombia , COPYRIGHT: ICFES</p>

	<p>https://panel.inkuba.com/sites/2/archivos/manual%20colombia%20cualitativo.pdf</p> <p>Villora S. (2013). Revista Iberoamericana de educación matemática, artículo: <i>Enseñanza de la geometría en secundaria caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas.</i></p>
Contenido	<p>El presente trabajo de aplicación contiene:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Portadas -RAE Resumen analítico Especializado -Índice General -Índice de Tablas y Figuras - Introducción -Justificación -Objetivos -Marco Teórico -Aspectos metodológicos -Resultados -Discusión -Conclusiones y recomendaciones -Referencias -Anexos
Metodología	<p>La metodología a utilizar en este trabajo investigativo es: el paradigma de investigación cualitativo, enfoque cualitativo, donde se utiliza esencialmente técnicas basadas en el análisis del lenguaje, como pueden ser la entrevista, el grupo de discusión, la historia de vida, y las técnicas de creatividad social.</p>
Conclusiones	<ul style="list-style-type: none"> -Se realizó la prueba diagnóstica a los estudiantes del grado décimo, evidenciando algunas dificultades en el reconocimiento, la descripción y la resolución de problemas en las razones trigonométricas. -Se observó que el manejo de la teoría y el juego que se desarrolla en el aula de clase permite un mejor aprendizaje de las razones trigonométricas. -Se evidenció que al realizar las actividades del cardiotangram presentan una relación implícita y consecutiva en el aprendizaje de las razones trigonométricas, justificada en la prueba final al resolver problemas de cotidianidad. -Se analizó por medio de las actividades que los estudiantes identifican conceptos básicos de la geometría y conocimientos obtenidos durante su vida, logrando por medio de esta, la aplicabilidad de la matemática en la solución de problemas y a la vez permite al docente, ser un guía más del conocimiento, más no un transmisor del mismo. -Se concluye, que las actividades con el cardiotangram, permiten el afianzamiento del aprendizaje de las razones trigonométricas, generando en los estudiantes un nuevo escenario en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.
Referencias bibliográficas	<ul style="list-style-type: none"> -Cárcel, 2016 - Editores Santillana (2013) -García, y Gamboa, M. y Rivera, J. (2014). - Martínez Padrón, (2013) -Palmero Rodríguez María Luz. (2013) -Pérez y Gil, 2015 -Sandoval, (2014)

Índice General

Introducción	1
Justificación	3
Descripción del problema	4
Objetivo	6
Objetivo general	6
Objetivos específicos.....	6
Línea de investigación	7
Marco teórico y conceptual.....	8
Antecedentes de la investigación.....	8
Cardiotangram	10
Razones trigonométricas	11
Círculo goniométrico	13
Signos de las funciones trigonométricas seno y coseno	14
Signos de la función trigonométrica.....	14
Valor de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°	15
Aprendizaje significativo	16
Aprendizaje Autónomo.....	17
Estándares básicos de competencias en el área de matemáticas.	18
Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas de Zoltan Dienes.....	19
Estrategia Pedagógica	20
Herramienta didáctica	20
Aspectos metodológicos	21
Fases.....	21
Procedimiento	23
Metodología	23
Resultados	24
Resultados de Talleres.....	27
Resultados prueba final.....	32
Discusión.....	36
Conclusiones	38
Recomendaciones	39
Referencias Bibliográfica	40

Índice de Tablas y figuras

Figura 1. Cardiotangran	10
Figura 2. Triángulo rectángulo	11
Figura 3. Círculo goniométrico.....	13
Figura 4. Signos de las funciones trigonométricas primer y segundo cuadrante	14
Figura 5. Signos de las funciones trigonométricas tercer y cuarto cuadrante	14
Figura 6. Signos de la funcione tangente	14
Figura 7: Triángulo equilátero con ángulo de 60°	15
Figura 8. Ángulo de 45°	15
Figura 9. Valores de las razones trigonométricas para ángulos de 30° , 45° , 60°	15
Tabla 1. Pensamiento Espacial y geométrico.....	18
Tabla 2. Estudiantes.....	25
Tabla 3. Resultado de la pregunta No 1 (Prueba diagnostico)	25
Tabla 4. Resultado de la pregunta No 2 (Prueba diagnostico).....	26
Tabla 5. Resultado de la pregunta No 3 (Prueba diagnostico).....	26
Tabla 6. Resultado de la pregunta No 4 (Prueba diagnostico).....	32
Tabla 7. Resultado de la pregunta No 1 (Prueba Final).....	33
Tabla 8. Resultado de la pregunta No 2 (Prueba Final).....	34
Tabla 9. Resultado de la pregunta No 3 (Prueba Final).....	34
Tabla 10. Resultado de la pregunta No 4 (Prueba Final).....	35
Tabla 11. Resultado de la pregunta No 5 (Prueba Final).....	35
Tabla 12. Resultado de la pregunta No 6 (Prueba Final).....	35

Introducción

En la actualidad y en el mundo que vivimos el protagonista es el cambio constante. En la educación y especialmente en la enseñanza de las matemáticas ha tomado un valor importante ya que es un área en donde un gran porcentaje de estudiantes de todos los niveles de educación presentan dificultad, como se observa en los resultados obtenidos en la prueba saber once y pruebas realizadas internamente en la institución Prueba tres editores, resultados que se encuentran archivados en la Institución.

Además, de acuerdo con la normatividad de las políticas de la excelencia de la educación del gobierno, las áreas de matemáticas y lengua castellana se evalúan con el Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) registrado en los documentos de la institución después de realizar el DIA E cada año, donde el Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso en el año 2016 obtuvo 5,2 en una escala de 1 a 10 siendo el promedio Nacional 8,1 y el promedio de la Entidad Territorial Certificada de 7,3 teniendo en cuenta que Según el Ministerio de Educación Nacional 2016, el ISCE se saca de cuatro componentes que son: el progreso, el desempeño, la eficiencia y el ambiente escolar en temas específicos de matemáticas para cada grado.

Por esta razón uno de los principales retos para los docentes de hoy, es el de innovar en el aula de clase para incentivar y motivar al estudiante al aprendizaje de las mismas.

Con respecto a lo anterior, una alternativa para crear ambientes educativos diferentes, son los juegos matemáticos que en la mayoría de los casos han sido utilizados solamente para la recreación o para las olimpiadas matemáticas que se realizan en algunas instituciones educativas; Sin embargo estos juegos pueden ser útiles para la enseñanza de muchas temáticas

del área, ya que ellos cuentan con características especiales que permiten al estudiante manipular y construir por si solos el conocimiento.

El presente trabajo de aplicación inicia con el Resumen analítico Especializado, enseguida podemos encontrar la introducción, justificación, Descripción del problema que describe la situación y población a trabajar, Luego se encuentra la pregunta de investigación, Siguiendo con el desarrollo del trabajo se presenta los objetivos general y específicos que identifican el trabajo a realizar; también se encuentra el marco teórico donde se describe, el cardiotangram, las razones trigonométricas, aprendizaje significativo. Además, se encuentra la línea de investigación Según “Lineamientos para trabajos de grado de las especializaciones ECEDU; el diseño metodológico compuesto por el Enfoque y tipo de Estudio, fases para el desarrollo de la propuesta y por ultimo las fuentes o referentes bibliográficos

El propósito de este proyecto fue el diseño de una cartilla; llamada “El cardiotangram para el aprendizaje de las razones trigonométricas” en la cual se encuentra la construcción del juego y actividades en donde se trabajan las razones trigonométricas.

Justificación

Actualmente el aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en un reto para los estudiantes, quienes a medida que pasa el tiempo requieren de motivación, recursos y actividades lúdicas que faciliten esta acción. El papel que juega la matemática en la sociedad actual continúa siendo de vital importancia tanto para el mundo de los negocios, la ciencia y la tecnología como para la resolución de problemas y la toma de decisiones en la vida cotidiana. No obstante, cuando esta área del saber es abordada en las aulas, el panorama resulta casi siempre desalentador debido a que la mayoría de los estudiantes creen que ella es aburrida, compleja y resulta difícil de aprender resultando aborrecida por quienes no la entienden, generando en consecuencia frustración, angustia y aversión casi colectiva, en vez de satisfacción por los logros obtenidos (Martínez Padrón, 2013, p. 12).

De esta manera La incorporación de actividades de tipo lúdico en la clase no es solo una oportunidad de mejorar la educación matemática sino también de estimular muchas otras habilidades y destrezas primordiales para los seres humanos, dentro de las cuales se puede citar la creatividad, la percepción visual auditiva, entre otras.

Este trabajo investigativo se acopla a línea de investigación de la ECEDU, la línea transversal pedagogía didáctica y currículo; según la UNAD el objetivo general es visibilizar modelos de aprendizaje autónomo desde la pedagogía, desde los escenarios tradicionales y con un enfoque hacia las prácticas pedagógicas en ambientes virtuales de aprendizaje, tomando como referente las experiencias de redes de aprendizaje y las de las redes académicas utilizando los medios y mediaciones desarrollados en la modalidad de Educación a Distancia, y que tiene como áreas temáticas de trabajo: aprendizaje en línea (online), pedagogía y virtualidad, didáctica y currículo,, utilizando como opción de grado proyecto investigativo.

Por esta razón se diseñó una cartilla tomando como eje fundamental el cardiotangram compuesto por figuras geométricas que facilitaron la manipulación, el cual sirvió como herramienta didáctica en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Definición del problema

Actualmente el aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en un reto para los estudiantes, quienes a medida que pasa el tiempo requieren de motivación, recursos y actividades lúdicas que faciliten esta acción. El papel que juega la matemática en la sociedad actual continúa siendo de vital importancia tanto para el mundo de los negocios, la ciencia y la tecnología como para la resolución de problemas y la toma de decisiones en la vida cotidiana. No obstante, cuando esta área del saber es abordada en las aulas, el panorama resulta casi siempre desalentador debido a que la mayoría de los estudiantes creen que ella es aburrida, compleja y resulta difícil de aprender resultando aborrecida por quienes no la entienden, generando en consecuencia frustración, angustia y aversión casi colectiva, en vez de satisfacción por los logros obtenidos (Martínez Padrón, 2013, p. 12)

En el área de matemáticas existen ramas como la trigonometría, que se trabaja en el grado décimo de básica secundaria, en la que no se han obtenido los mejores resultados académicos; como se evidenció en la prueba diagnóstico a los estudiantes de décimo grado del colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso (anexo No 1), donde se observaron algunas dificultades como: no reconocen las identidades trigonométricas y falta comprensión al resolver problemas de la cotidianidad que involucren las razones trigonométricas.

Por tal razón es necesario utilizar e implementar un método de enseñanza para las razones trigonométricas, teniendo en cuenta el cardiotangram como una herramienta didáctica, que el docente puede incorporar en las actividades cotidianas de su clase.

Pregunta Problemática

¿Es posible utilizar el cardiotangram como estrategia de aprendizaje en las de las razones trigonométricas para los estudiantes de grado décimo del Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso?

Objetivos

Objetivo General

Diseñar una cartilla utilizando, estrategia pedagógica el cardiotangram en el aprendizaje de las razones trigonométricas para los estudiantes de grado décimo del Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso.

Objetivos Específicos

Diagnosticar de las falencias de los estudiantes de grado décimo en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Diseñar actividades teniendo en cuenta el cardiotangram para el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Analizar los resultados obtenidos de las actividades propuestas con el cardiotangram a los estudiantes del Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso.

Compilar las actividades realizadas en una cartilla titulada “El cardiotangram para el aprendizaje de las razones trigonométricas”

Línea de investigación

Según Lineamientos para trabajos de grado de las especializaciones ECEDU se ha optado por la alternativa de proyecto de investigación como propuesta del trabajo de grado, (Investigación con base a referentes bibliográficos o cibergráficos).

Lo anterior, supone que el trabajo de grado se constituye en un acercamiento al ejercicio investigativo, brinda los elementos para vislumbrar la rigurosidad y alcance de un proceso de este tipo, y posibilita al estudiante profundizar en algunos puntos de su interés que ha desarrollado en su proceso formativo. (García, Gamboa y Rivera, 2014, p. 4)

Tomando como opción la línea de investigación de la ECEDU: Pedagogía, didáctica y currículo, Visibilizar modelos de aprendizaje autónomo de la pedagogía desde los escenarios tradicionales y con un enfoque hacia las prácticas pedagógicas en ambientes virtuales de aprendizaje, al tomar como referente las experiencias de redes de aprendizaje y las de las redes académicas y utilizar los medios y mediaciones desarrollados en la modalidad de Educación a distancia, propuestos por la UNAD.

Marco teórico y conceptual

Antecedentes de la Investigación

Huérfano y Neira (2014). Monografía “Comparación del aprendizaje de las funciones trigonométricas básicas utilizando la herramienta tradicional y la herramienta tecnológica CABRI GEOMETRE II” realizaron la construcción y algunas características de las funciones trigonométricas, seno, coseno y tangente, suministrando las instrucciones paso a paso de su elaboración con ayuda del software cabri geometre II. para estudiantes de grado Decimo.

Esta monografía se relaciona con el proyecto de investigación en curso, ya que propone una herramienta tradicional y tecnológica para la enseñanza de las funciones trigonométricas, a través de enunciados claros, objetivos de aprendizaje precisos y una estructura de trabajo que aborda, paso a paso.

Rodríguez y Galindo (2015). Monografía “Material educativo computarizado para el aprendizaje de las razones trigonométricas e introducción a sus funciones”, presentaron un MEC donde trabajaron las razones trigonométricas para los ángulos de treinta, cuarenta y cinco y sesenta grados y las gráficas de las funciones trigonométricas usando tablas de valores.

Este trabajo es pertinente con la investigación planteada, ya que utiliza un material didáctico donde describe como se puede enseñar las razones trigonométricas en diferentes ángulos, utiliza una investigación cualitativa, emplea una metodología con el proceso constructivo del aprendizaje.

Bravo y González (2014) “Secuencias didácticas para el aprendizaje de las razones Trigonométricas”, el presente trabajo de investigación se llevó a cabo con estudiantes del grado Décimo de la Corporación Educativa la Adventista, que presta sus servicios a estudiantes de la población del municipio de Puerto Tejada, en el Departamento del Cauca, y con el fin de enfocar más la atención y el interés del estudiante hacia el aprendizaje de la trigonometría y específicamente a las razones trigonométricas.

Utiliza una metodología adoptada para analizar el proceso de resolución de problemas es de tipo cualitativo de corte descriptivo – interpretativo, desarrolla una estrategia de recolección y sistematización encuestas, cuestionarios que permiten comprender algunas creencias sobre las razones trigonométricas.

Peña y Vargas (2015) “Unidad didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en la educación media utilizando el modelo de van hiele”. En este trabajo se diseñó un conjunto de actividades que constituyen una unidad didáctica basada en el modelo de van hiele; aplicadas a los contenidos temáticos de la trigonometría.

Riofrío y Samaniego (2015) “Guía didáctica para la enseñanza de la trigonometría para segundo año de bachillerato del Colegio Fray Vicente Solano mediante Geogebra”, en este trabajo propone que el estudiante utilice herramientas y medios tales como las Tecnologías de la Información y la Comunicación (Tics) para comprender la realidad circundante, resolver problemas y manifestar su creatividad. Este trabajo se relaciona con la investigación planteada, ya que utiliza una estrategia innovadora para la enseñanza de las razones trigonométricas, además utiliza una metodología de investigación cualitativa basada en el diseño de una encuesta y

actividades que permiten al estudiante adquirir nuevos conocimientos por medio de las Tics.

Cardiotangram

El cardiotangram es otro modelo del tangram chino de siete piezas, del que en la actualidad no se conoce con certeza su origen, pero hay quienes suponen que se inventó en China a principios del siglo XIX, pues las primeras noticias escritas sobre el tangram datan de esa época y lugar.

La construcción y manipulación del cardiotangram son actividades didácticas que permite que el docente salga de lo tradicional y lleve un nuevo recurso para una clase que de iniciativa al estudiante a estar en ella, a partir de esto esta herramienta servirá para el aprendizaje de las razones trigonométricas.

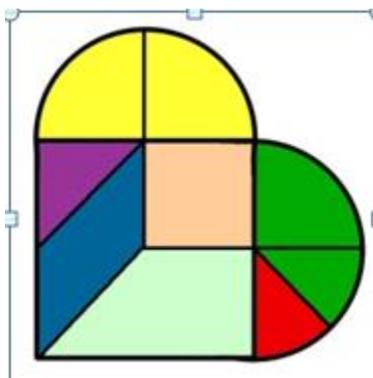


Figura 1. Cardiotangran

Fuente: Villorael S, (2013) Revista Iberoamericana de educación matemática, artículo: Enseñanza de la geometría en secundaria caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas.

“Este tangram está compuesto por nueve piezas que se obtienen al diseccionar un cardiograma o corazón utilizando regla y compás para formar un cuadrado y círculo como se muestra en la figura 1. Es una herramienta que facilita las nociones de radio, diámetro, cuerda,

ángulos en el círculo, tangentes, secantes, segmentos circulares, relaciones de tamaño cuadrado-círculo, razones trigonométricas, área de regiones sombreadas, hacer una muy buena introducción al concepto de integral definida”. (Villora, 2013, p.24).

A parte de tratarse de un juego divertido, es una práctica que facilita la estimulación de diferentes habilidades de carácter clave para el aprendizaje. En su uso se realizan diferentes fases, teniendo en cuenta lo que se utiliza con niños que tienen dificultades en el manejo del espacio:

-Reproducción de la figura con la solución, es decir que en el dibujo se ve claramente cuáles son las piezas que debe colocar y donde. En esta primera fase estaríamos trabajando claramente: coordinación viso motora, atención y orientación, estructura espacial.

-Reproducción de la figura sin la solución, en esta fase ya entra más en juego la percepción visual y el razonamiento espacial, al mismo tiempo que seguiremos potenciando los mismos aspectos que en la primera fase pero de forma más compleja.

-Reproducción de la figura sin la solución y posterior reproducción sin estímulo visual, es decir de memoria. Esta fase resulta evidentemente la más compleja puesto que aparte de requerir una mayor estructuración espacial y el trabajo de todas las habilidades antes descritas potencia la memoria visual de formas.

Razones trigonométricas

“Las razones trigonométricas en la forma en que se originaron históricamente, es decir, como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo. Si α es cualquier ángulo agudo, podemos considerar un triángulo rectángulo con α como uno de sus ángulos”. (Equipo Santillana, 2013, p. 36.)

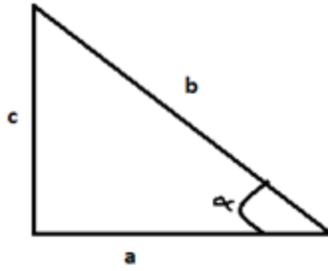


Figura 2. Triángulo rectángulo

Se pueden obtener las seis relaciones usando las longitudes a , b y c de los lados del triángulo.

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}$$

Entonces, para cada α , las seis relaciones están determinadas de manera única y por lo tanto son funciones de α . Reciben el nombre de razones trigonométricas y se designan como las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. El símbolo α o $\text{sen}\alpha$ se utiliza para relacionar $\frac{b}{c}$, que la función seno asocia con α . Los valores de las otras cinco funciones se denotan de modo semejante. Para resumir si α es el ángulo agudo del triángulo rectángulo entonces por definición.

$$\sin \alpha = \frac{b}{c} \quad \cos \alpha = \frac{a}{c} \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\csc \alpha = \frac{c}{b} \quad \sec \alpha = \frac{c}{a} \quad \cot \alpha = \frac{a}{b}$$

El dominio de cada una de las seis funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos.

Si α es el ángulo de la figura 2, se llamara a los lados del triángulo de longitudes a , b , c como lado adyacente, lado opuesto e hipotenusa, respectivamente. Se emplean las abreviaturas *ady*, *op* e *hip* para denotar las longitudes de los lados.

Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

Las formulas de la definición anterior se pueden aplicar a cualquier triángulo rectángulo sin aplicar las literales a, b, c a los lados. Como longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos, los valores de las seis funciones trigonométricas son positivos para todo ángulo agudo α .

$$\sin \alpha = \frac{op}{hip} \qquad \cos \alpha = \frac{ady}{hip} \qquad \tan \alpha = \frac{op}{ady}$$

$$\csc \alpha = \frac{hip}{op} \qquad \sec \alpha = \frac{hip}{ady} \qquad \cot \alpha = \frac{ady}{op}$$

Círculo goniométrico

El círculo trigonométrico es un círculo unitario que tiene su centro en el origen de coordenadas.

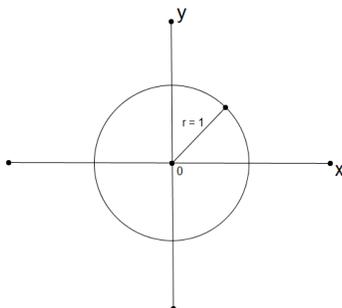


Figura 3. Círculo goniométrico

Fuente: Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia, Matemática B, 2013 Trigonometría PDF Madrid. Recuperado de: <http://cidead.cnice.mec.es>.

Para la obtención de las Identidades Pitagóricas, puede apoyarse en el círculo goniométrico. También se puede determinar el signo de las funciones trigonométricas como a continuación se ilustra.

Signos de las funciones trigonométricas seno y coso

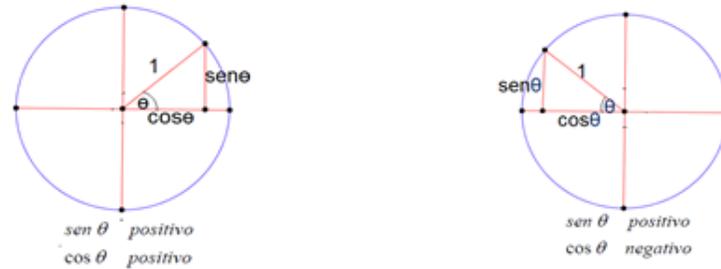


Figura 4. Signos de las funciones trigonométricas primer y segundo cuadrante

Fuente: Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia, Matemática B, 2013 Trigonometría PDF Madrid. Recuperado de: <http://cidead.cnice.mec.es>.

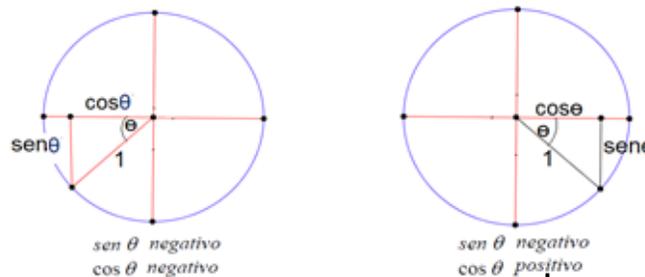


Figura 5. Signos de las funciones trigonométricas tercer y cuarto cuadrante

Fuente: Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia, Matemática B, (2013) Trigonometría PDF Madrid. Recuperado de: <http://cidead.cnice.mec.es>.

Signos de la función trigonométrica

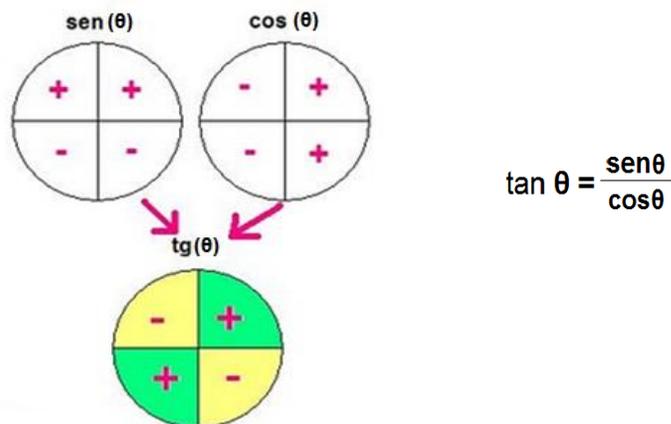
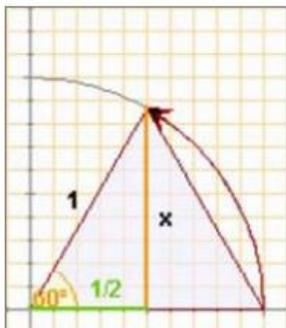


Figura 6. Signos de la funcione tangente

Fuente: Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia, Matemática B, (2013) Trigonometría PDF Madrid. Recuperado de: <http://cidead.cnice.mec.es>.

Valor de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°.

“El valor de las razones trigonométricas para ángulos lo podemos obtener por medios geométricos, lo cual nos facilita sus cálculos, sin necesidad de usar tablas o calculadoras”. (Villegas M, 2013, p. 102)

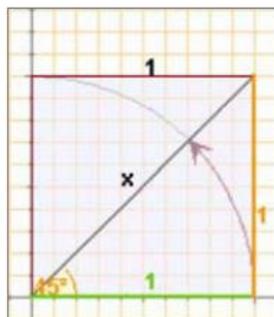


En un triángulo equilátero los ángulos miden 60° Con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura:

$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Figura 7: “triángulo equilátero con ángulo de 60°”

Fuente: Villegas M., (2013) Matemática segunda edición Bogotá D.C. editorial voluntad.



Tomamos un cuadrado de lado 1. Con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal:

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Figura 8. Ángulo de 45°

Fuente, Villegas M., (2013) Matemática segunda edición Bogotá D.C. editorial voluntad.

	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Figura 9. valores de las razones trigonometricas para angulos de 30°, 45°, 60°

Fuente, Villegas M., (2013) Matemática segunda edición Bogotá D.C. editorial voluntad.

Aprendizaje significativo

Ausubel plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por estructura cognitiva, al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en determinado campo del conocimiento, así como su organización, entonces el aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. (Palmero, 2013, p. 290)

Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos: Son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (Palmero, 2013, p. 2).

En el proceso de orientación del aprendizaje, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno; no solo se trata de saber la cantidad de información que posee, si no cuales son los conceptos y proposiciones que maneja así como de su grado de estabilidad. El aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y está directamente relacionada con la existencia de relaciones entre el conocimiento que adquiere. El aprendizaje es ineficiente si se basa en la repetición mecánica de unidades que el estudiante no puede relacionar.

Aprendizaje Autónomo

El aprendizaje autónomo se refiere al grado de intervención del estudiante en el establecimiento de sus objetivos, procedimientos, recursos, evaluación y momentos de aprendizaje, desde el rol activo que deben tener frente a las necesidades actuales de formación, en la cual el estudiante puede y debe aportar sus conocimientos y experiencias previas, a partir de los cuales se pretende revitalizar el aprendizaje y darle significancia.

El aprendizaje autónomo es un proceso donde la propia persona autorregula su aprendizaje y toma conciencia de sus propios procesos cognitivos y socio-afectivos. El esfuerzo pedagógico en este caso está orientado hacia la formación de sujetos centrados en resolver aspectos concretos de su propio aprendizaje, y no sólo en resolver una tarea determinada, es decir, orientar al estudiante a que se cuestione, revise, planifique, controle y evalúe su propia acción de aprendizaje. (Cárcel, 2016, p. 3)

El aprendizaje autónomo es el proceso intelectual, mediante el cual el sujeto pone en ejecución estrategias cognitivas y metacognitivas, secuenciales, objetivas, procedimentales y formalizadas para obtener conocimientos estratégicos. Este proceso está regido por principios de acción como: un interés manifiesto en razones que motiven la actuación deliberada; el reconocimiento de experiencias de aprendizaje previas; el establecimiento de nuevas relaciones entre aprendizaje – trabajo – vida cotidiana, así como entre teoría y práctica; la identificación de la motivación intrínseca y el desarrollo del potencial personal de la autorregulación. (Unad, 2014)

Estándares básicos de competencias en el área de matemáticas

Los Estándares Curriculares son aquellos “criterios que especifican lo que todos los estudiantes de preescolar, básica primaria y básica media, deben saber y ser capaces de hacer en una determinada área y grado”, traduciéndolos de manera clara, universal, precisa y breve, sujetos a la verificación, siendo a la vez pertinente a la construcción de sistemas y procesos de evaluación. Éstos estándares están conformados por cinco pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, aleatorio, y variacional.

Por esta razón se toma los estándares básicos de competencias en matemáticas para grado décimo, de acuerdo a la temática que se trabajó en el desarrollo de las actividades con el cardiotangram, el pensamiento matemático utilizado es el pensamiento espacial y sistemas geométricos para grados décimo a undécimo estipulados en los estándares.

Tabla No 1. Pensamiento Espacial y sistemas geométricos

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Describo y modelo fenómeno periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Fuente. ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN ÁREA DE MATEMÁTICAS. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!
<https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-116042.htm>

Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas de zoltan dienes:

Estas están sustentadas en la teoría cognitiva de Piaget, y se puede sintetizar como sigue:

Primera Etapa: Juego Libre. Introduce al estudiante en un medio simulado, especialmente para detectar algunas estructuras matemática subyacente, en forma libre, a partir de lo que el alumno ya sabe hacer y conoce.

Segunda Etapa: Juego Orientado. Se introducen reglas y normas que orientan el desarrollo de la actividad lúdica hacia el logro de una cierta estructura matemática.

Tercera Etapa: Abstracción. A través de la comparación de los distintos juegos, el estudiante detecta las regularidades, similitudes y diferencias, captando la estructura conceptual común, subyacente en el paso de lo concreto a lo conceptual.

Cuarta Etapa: Representación. Consiste en una primera forma de expresión de lo conceptualizado y abstraído por el estudiante a través de los gráficos, esquemas y diagramas. Esta representación busca evidenciar la nueva estructura conceptual del estudiante.

Quinta Etapa: simbolización. La invención de un lenguaje matemático (individual y luego socializado) apropiado a las representaciones y las propiedades de los conceptos construidos y las estructuras abstraídas.

Sexta Etapa: Generalización. La manipulación de un sistema formal es la meta del aprendizaje matemático de una estructura. Este sistema está compuesto por postulados, axiomas teoremas y reglas de demostración dentro de un razonamiento.

Estrategia Pedagógica

Las estrategias pedagógicas son todas aquellas ayudas planteadas por el docente que se proporcionan al estudiante para facilitar un procesamiento más profundo de la información. Así mismo son todos aquellos procedimientos o recursos utilizados por quien enseña para promover aprendizajes significativos. “Se entiende por estrategias pedagógicas aquellas acciones que realiza el docente con el propósito de facilitar la formación y el aprendizaje de las disciplinas en los estudiantes. Las estrategias pedagógicas son todas aquellas ayudas, recursos o procedimientos planteados por el docente que se proporcionan al estudiante para facilitar un procesamiento más profundo de la información” (Benavidez, 2013, p. 17)

Herramienta didáctica

En matemática los juegos o herramientas facilitan el trabajo de profesores y estudiantes al interior del aula de clase y fuera de ella. Se supone que su contenido es una propuesta práctica y sistematizada de aprendizaje con unas líneas psicológicas, epistemológicas y culturales definidas que, a su vez, respalda una concepción específica de educación. La condición de herramienta cuando se da al docente un recurso que le permite consolidar con una orientación metodológica su ejercicio docente y, por otra, crea mecanismos que determinan mayores posibilidades de éxito académico para el estudiante. (Pérez y Gil, 2015, p. 30)

Aspectos metodológicos

Para el desarrollo de este proyecto se tuvo en cuenta la investigación cualitativa basada en la observación de comportamientos y acciones que permitieron recolectar información para seguir el proyecto de aplicación. La investigación cualitativa, de acuerdo Sandoval (2014) “se describe como la búsqueda de la construcción del conocimiento de la realidad social y cultural de un grupo de personas determinado. Además el investigador es el encargado de realizar análisis y reflexiones continuas con el fin de evitar subjetividades, para lo cual se vale de las críticas externas, La principal preocupación del investigador debe ser la realización de una descripción compleja de la situación observada”.

Al iniciar este trabajo, se realizó una prueba diagnóstica la cual permitió detectar la necesidad de elaborar una cartilla que permita el interés por el juego y aprender las razones trigonométricas en los estudiantes del grado decimo de Educación Media. Posteriormente se procedió a recopilar la información y ayudas bibliográficas que dan soporte al proyecto de la elaboración y diseño de la cartilla.

Fases

Para el desarrollo de esta propuesta se trabajaron las siguientes fases

-Fase 1: Prueba diagnostica

En esta fase los estudiantes de grado decimo del Colegio nuestra señora del Rosario realizan una prueba diagnóstica para verificar sus conocimientos sobre las razones trigonométricas. (Ver anexo No 1).

-Fase 2: Diseño de actividades

En esta fase se diseñaron las actividades teniendo en cuenta el cardiotangram como herramienta didáctica para el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Ver anexo 3).

-Fase 3: Análisis de las actividades propuestas.

En esta fase se analizaron las actividades diseñadas con el cardiotangram, de acuerdo al ejercicio con los estudiantes y los resultados obtenidos con cada actividad, se realizó un análisis para la construcción final de la cartilla, en cada actividad se recopila la estructura de las razones trigonométricas y la solución de problemas que involucran las mismas, clasificándolas de acuerdo a la necesidad del tema.

-Fase 4: compilación de actividades

En esta fase se organizaron las actividades realizadas, las cuales forman parte de la cartilla.

La unidad de trabajo en la que se desarrollara el proyecto es el Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso, con la participación de docentes y estudiantes de educación media. Estudiantes y docentes de grado décimo de la Institución antes mencionada, como se muestra a continuación.

Tabla No. 2. Estudiantes y Docentes del grado décimo.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	No DE DOCENTES DEL ÁREA	No DE ESTUDIANTES
Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso	1	50

Los profesores que colaboraron en el desarrollo del Proyecto son Licenciados en Matemáticas. Los estudiantes que integraron el grupo de trabajo son jóvenes entre 15 y 17 años. Para el desarrollo de las actividades se utilizó como instrumento el cardiotangram siendo este un

juego matemático que llama la atención de los estudiantes, aplicada a los dos grupos con igual número de estudiantes con la finalidad de obtener un mejor aprendizaje y observar la eficacia de la propuesta investigativa.

Procedimiento

Luego de ser escogido el grupo para aplicar las actividades lúdicas matemáticas, se realizó una reunión general con ellos para exponerles cómo se desarrollarían dichas actividades, especificando las horas a trabajar en la investigación; así: Lugar: Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso, Horario: Miércoles 7:30 a 9:30 am, Responsable: Andrea Lizbeth Nova, Integrantes: Estudiantes décimo A y décimo B.

Para el desarrollo de la cartilla se contó con un promedio de dos horas por actividad lúdica, luego de ser concluidas las actividades, se procedió a la realización de la cartilla titulada “el cardiotangram en el aprendizaje de las razones trigonométricas”.

Metodología

La actividad recreativa es un proceso por el cual el hombre llega a la producción de algo deseado, permitiendo el logro de fines esperados, como es el conocimiento, la diversión y la socialización. Se sabe que las actividades lúdicas están orientadas a facilitar a que el participante se relacione consigo mismo, con los recreadores y los objetos, también permite reconocer los métodos y tareas de cada actividad asumiendo la importancia de la recreación, como un elemento básico de la vida y del proceso de crecimiento integral, “permitiendo la apreciación de la realidad adecuada cuando se pueden establecer relaciones entre las entidades” (cognoscitivo) y a la vez “los procesos mentales implicados en el conocimiento” (cognitivismo).

Para el aprendizaje de las razones trigonométricas se empleó La Lúdica Matemática como metodología, permitiendo que el estudiante sea artífice de su propio aprendizaje a través de los diferentes juegos (dirigidos) diseñados para cada subtema tratado, incluyendo aplicaciones en la solución de problemas cotidianos.

Resultados

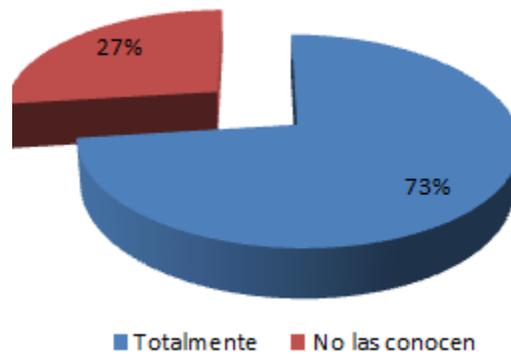
Para iniciar el proceso del proyecto investigativo a realizar, se desarrolló con 50 estudiantes de grado décimo del Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso, una prueba diagnóstica que permite identificar las falencias que tienen en el aprendizaje de las razones trigonométricas para iniciar el proceso de construcción de actividad utilizando como estrategia pedagógica el cardiotangram.

La prueba contiene seis aspectos a desarrollar, distribuidos así: en la primera parte el estudiante describe las razones trigonométricas que conoce, en la segunda parte el estudiante asocia la razón trigonométrica con su definición, en la tercera parte se halla el ángulo β y α del triángulo rectángulo para las razones trigonométricas de seno, coseno, tangente, en la cuarta parte describe un problema para solucionar utilizando las razones trigonométricas, por último en la quinta parte se pregunta si conoce usted alguna herramienta didáctica que ayude en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Resultados obtenidos de acuerdo a cada pregunta.

1. ¿Conoce las razones trigonométricas?

Tabla No 3. Resultado de la pregunta No 1 (Prueba diagnostico a los Estudiantes de grado décimo.)

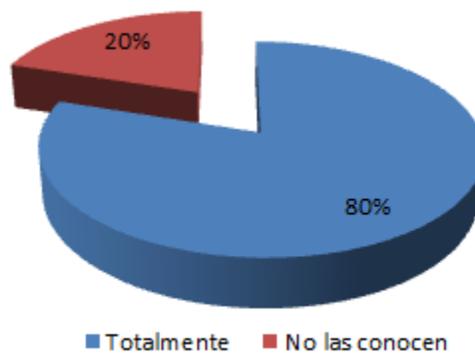


Nota. Fuente Propia

El 73% de los estudiantes de grado decimo conoce claramente las razones trigonometricas, el 27% de los estudiantes no las conoce lo cual indica que hay falencias en el aprendizaje de las razones trigonometricas.

2. Asocia la razón trigonométrica con su definición.

Tabla No 4. Resultado de la pregunta No 2 (Prueba diagnostico a los Estudiantes de grado décimo.)



Nota. Fuente Propia

El 80% de los estudiantes no asocian las razones trigonométricas con su definición, lo que indica que el aprendizaje de las razones trigonométricas aplicando su concepto en el triángulo rectángulo no es claro para los estudiantes de grado décimo.

3. Solucione el siguiente problema.

Tabla No 5 Resultado de la pregunta No 3 (Prueba diagnóstico a los Estudiantes de grado décimo.)

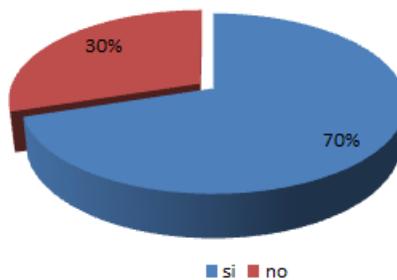


Nota Fuente Propia

El 44% de los estudiantes no relaciona los conceptos de las razones trigonométricas para la resolución de problemas, el 20% de los estudiantes desarrollo la situación pero con errores al despejar incógnitas y no tener claros los conceptos, el 16% de los estudiantes soluciono el problema asertivamente.

4. Conoce usted alguna herramienta didáctica que ayude en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Tabla No 6. Resultado de la pregunta No 4 (Prueba diagnóstico a los Estudiantes de grado décimo.)



Nota Fuente Propia

El 70% de los estudiantes no conoce ninguna herramienta pedagógica para el aprendizaje de las razones trigonométricas. El 30% de los estudiantes conoce pero son instrumentos tecnológicos no didácticos.

Resultados de Talleres

Taller No 1: Construcción del cardiotangram.

Para realizar este taller se organizaron grupos de tres estudiantes y se entregó a cada grupo una guía del taller No1. Luego de que cada grupo leyera y observara los enunciados y las figuras, se procedió a manipular los materiales y construir su propio cardiotangram. Finalmente cada estudiante obtuvo las nueve fichas de su cardiotangram, en seguida armo nuevamente el juego para verificar que las figuras fueron elaboradas correctamente.

Resultado de la experiencia en el aula: Durante el desarrollo del juego se observaron los grupos de la siguiente manera:

1. Los estudiantes mostraron interés por empezar a construir el cardiotangram.
2. La mayoría de los grupos mostraron una rápida comprensión del taller.
3. Algunos estudiantes mostraron dificultad a la hora de construir la parte de la semicircunferencia del cardiotangram.
4. Los estudiantes pudieron armar el cardiotangram luego de cortadas las fichas nuevamente sin ninguna dificultad.

En conclusión se observó que los estudiantes tenían interés por desarrollar el taller, y la mayoría de ellos lo hicieron sin dificultad. Mediante el desarrollo del taller se pudo observar que algunos estudiantes tienen inconvenientes en la comprensión de lectura, y en la

interpretación de gráficos. El desarrollo del taller en grupos de trabajo facilitó la comprensión de las figuras, motivó a los estudiantes, permitió la crítica constructiva de los integrantes de cada grupo, Y se observó la ayuda de algunos estudiantes con otros.

Taller No 2: Definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

El taller está dividido en seis actividades, en cada una de ellas se encuentran figuras en donde se muestran los conocimientos previos y el procedimiento que el estudiante debe tener en cuenta para su desarrollo, además al finalizar cada actividad el estudiante debió responder una pregunta relacionada con el tema de la actividad anteriormente realizada. (Ver anexo 3). Para realizar este taller se organizaron grupos de trabajo, luego se hizo entrega de la guía taller No 2 y las piezas del cardiotangram realizado por los estudiantes, Para iniciar los integrantes de cada grupo de trabajo leyeron y observaron las guías y luego si empezaron a desarrollar cada una de las actividades propuestas.

-Actividad 1: Los estudiantes armaron un triángulo rectángulo con algunas fichas del cardiotangram. Luego identificaron los vértices, los lados, los ángulos, el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa del triángulo los relacionaron y luego definieron las razones trigonométricas. (ver anexo No 3)

-Actividad 2: Los estudiantes midieron los lados del triángulo rectángulo armado con las fichas del cardiotangram, luego identificaron dos ángulos del triángulo los cuales fueron denotados con las letras del alfabeto griego alfa (α) y beta (β) respectivamente; en seguida completaron la tabla en donde se relacionaron las funciones trigonométricas de cada uno de los ángulos con los datos hallados al principio de la actividad, finalmente respondieron una pregunta con respecto la actividad realizada. (Ver anexo No 3)

Actividad 3: Los estudiantes armaron dos figuras distintas con las fichas del cardiotangram, luego identificaron el triángulo rectángulo más grande en cada una de ellas, en donde ubicaron los lados y ángulos alfa (α) y beta (β), en seguida midieron los lados de cada uno de los triángulos para hallar cada una de las razones trigonométricas de los mismos, finalmente se formuló una pregunta que los estudiantes respondieron teniendo en cuenta los resultados de la actividad. (Ver anexo No 3)

Actividad 4: Los estudiantes armaron la circunferencia con algunas fichas del cardiotangram siguiendo algunas indicaciones propuestas en la guía, luego identificaron el centro de circunferencia, el diámetro, el radio y el plano cartesiano para relacionarlo con las abscisas y las ordenadas con el fin de hallar las relaciones trigonométricas de la misma. (Ver anexo No 3).

Actividad 5: Los estudiantes armaron la circunferencia con algunas fichas del cardiotangram, en ella identificaron el triángulo rectángulo circunscrito, para relacionar el radio, la abscisa y la ordenada con la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente respectivamente, en seguida midieron cada uno de ellos con el fin de hallar las relaciones trigonométricas de dicho triángulo, finalmente los estudiantes resolvieron dos preguntas propuestas con referencia a la actividad realizada. (Ver anexo No 3)

Actividad 6: Los estudiantes resolvieron dos problemas de aplicación de las razones trigonométricas en donde aplicaban los conocimientos vistos durante las actividades anteriores. (Ver anexo No 3)

Resultado de la experiencia en el aula: Durante el desarrollo del taller se observaron los grupos de la siguiente manera.

1. Los estudiantes mostraron interés por empezar desarrollar la guía.

2. Algunos estudiantes no tienen buena comprensión de lectura.
3. La mayoría de los estudiantes manifestaron confusión al identificar el cateto adyacente y el cateto opuesto del triángulo, principalmente cuando se cambiaba el ángulo.
4. Después de algunas ayudas los estudiantes desarrollaron las actividades propuestas correctamente.
5. Algunos estudiantes no respondieron a las preguntas propuestas en la guía.

En conclusión la mayoría de los estudiantes lograron desarrollar el taller No 1 en el tiempo requerido, y muchos de ellos de una manera correcta, además aclararon dudas con respecto al reconocimiento de los catetos y la hipotenusa en los diferentes ángulos del triángulo rectángulo y en el cálculo de operaciones.

En la actividad No 6 algunos estudiantes tuvieron dificultad en el despeje de las fórmulas para hallar las incógnitas que se pedían en la solución de los ejercicios propuestos.

Taller No 3 Signos de las funciones trigonométricas y Valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 30° , 45° y 60°

El taller está dividido en cuatro actividades, en cada una de ellas está escrito el procedimiento de una manera clara, se muestran figuras con los conocimientos previos que el estudiante debe tener en cuenta para la solución de la actividad propuesta. Para el desarrollo del taller se organizaron grupos de tres estudiantes, en seguida se hizo entrega del taller No 3 y del cardiotangram, los estudiantes leyeron y observaron el taller y luego se procedió a su desarrollo.

-Actividad 1: Los estudiantes armaron la circunferencia con algunas fichas del cardiotangram teniendo en cuenta algunas indicaciones, identificaron en la misma los cuatro cuadrantes con el fin de hallar los signos de las funciones seno, coseno y tangente, en seguida y con ayuda del

graduador se midieron algunos ángulos para completar la actividad propuesta. Finalmente se formuló una pregunta relacionada con la actividad anteriormente realizada. (ver anexo No 4)

-Actividad 2, 3, 4 : En estas actividades los estudiantes hallaron los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables 30° , 45° y 60° ; con ayuda de algunas fichas del cardiotangram ellos armaron la circunferencia e identificaron el triángulo rectángulo circunscrito en la misma, en seguida midieron con el graduador los ángulos y dibujaron el triángulo para relacionar el radio, la abscisa, y la ordenada con la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente respectivamente, luego utilizando el teorema de Pitágoras para hallar el valor de la abscisa y ordenada en cada caso, finalmente se definió el valor de las razones trigonométricas para cada uno de los ángulos. (Ver anexo No 4)

Resultado de la experiencia en el aula: Durante el desarrollo del taller se observaron los grupos de la siguiente manera:

1. Los estudiantes mostraron interés por empezar desarrollar la guía.
2. Algunos estudiantes no sabían cómo utilizar correctamente el graduador.
3. A la mayoría de los estudiantes se les dificultó despejar la variable para hallar la abscisa o la ordenada según correspondiera.
4. Algunos estudiantes no respondieron a las preguntas propuestas en la guía.
5. Con el ejercicio muchos estudiantes pudieron aclarar dudas con respecto al tema, al despeje de ecuaciones y al buen uso de los materiales como el graduador.

En conclusión la mayoría de los estudiantes lograron desarrollar el taller No 3 en el tiempo requerido, y muchos de ellos de una manera correcta. El trabajo en grupo facilitó que ellos

comprendieran con más facilidad el tema ya que al interactuar con sus compañeros permitió que aprendieran más, aclararan dudas con respecto algunos procedimientos.

Resultados prueba final

El análisis de los resultados, permite observar si el diseño y la aplicación de cada uno de los talleres mejoran el aprendizaje de las razones trigonométricas.

La prueba contiene seis aspectos a desarrollar, distribuidos así: en la primera parte el estudiante describe las razones trigonométricas que conoce, en la segunda parte el estudiante asocia la razón trigonométrica con su definición, en la tercera parte se halla el ángulo β y α del triángulo rectángulo para la razones trigonométricas de seno, coseno, tangente, en la cuarta parte el estudiante debe completar la tabla de los ángulos 30° , 45° , 60° escribiendo el valor de la razón trigonométrica para cada ángulo, en la quinta parte se describe un problema para solucionar utilizando las razones trigonométricas, por último en la sexta parte se pregunta si conoce usted alguna herramienta didáctica que ayude en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

De acuerdo a la prueba final aplicada (Anexo No 2) y a los resultados arrojados, se procedió a realizar el análisis de la información representada en forma porcentual.

Resultados de la prueba final realizada a los estudiantes de la Institución Educativa Rural del Sur, luego de implementar las actividades de la cartilla “el cardiotangram en el aprendizaje de las razones trigonométricas”.

1. ¿Conoce las razones trigonométricas?

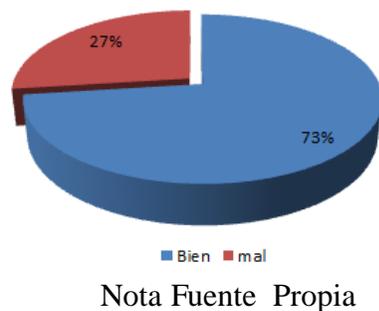
Tabla No 7. Resultado de la pregunta No 1 (Prueba final a los Estudiantes de grado décimo.)



El 100% de los estudiantes encuestados acertaron con la respuesta es decir que a través de las actividades propuestas ellos pudieron reconocer todas las razones trigonométricas existentes.

2. Asocia la razón trigonométrica con su definición.

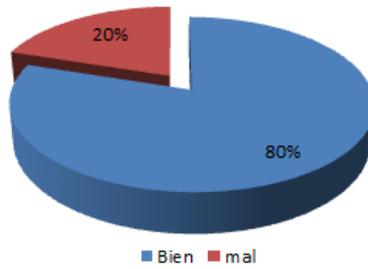
Tabla No 8. Resultado de la pregunta No 2 (Prueba final a los Estudiantes de grado décimo.)



El 73 % de los estudiantes encuestados lograron asociar correctamente la razón trigonométrica con su definición, en cambio el 27 % de ellos lo hicieron con algún error siendo las funciones secante y cosecante en las que más se hubo confusión a la hora de desarrollar la prueba.

3. Para el triángulo rectángulo, halle el seno coseno tangente del ángulo α y el ángulo β .

Tabla No 9. Resultado de la pregunta No 3 (Prueba final a los Estudiantes de grado décimo.)

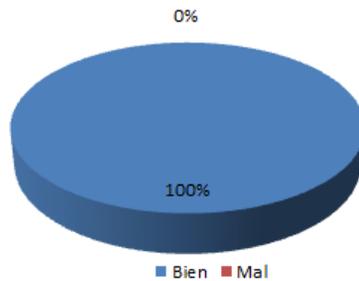


Nota Fuente Propia

El 80% de los estudiantes encuestados lograron hallar correctamente las razones trigonométricas de estos ángulos, en cambio el 20% de los estudiantes lo hicieron pero con algún error en el procedimiento.

4. Para cada ángulo 30° , 45° y 60° escriba el valor de la razón trigonométrica.

Tabla No 10 Resultado de la pregunta No 4 (Prueba final a los Estudiantes de grado décimo.)



Nota Fuente Propia

El 100% de los estudiantes encuestados lograron completar acertadamente la tabla de los ángulos notables.

5. Solucione el siguiente problema Si el ángulo de elevación del sol es de 31° calcular la longitud de la sombra proyectada por un hombre de 1.80 de estatura.

Tabla No 11. Resultado de la pregunta No 5 (Prueba final a los Estudiantes de grado décimo.)

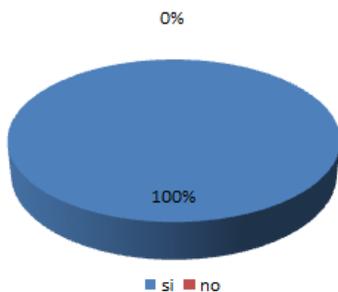


Nota Fuente Propia

El 73% de los estudiantes encuestados solucionó acertadamente el problema propuesto en la prueba final, muchos de ellos utilizaron como referencia alguna actividad realizada durante las sesiones anteriores, sin embargo el 20% solucionó el problema pero con algunos errores en el procedimiento, en cambio el 7% de los estudiantes no solucionó el problema.

6. Conoce usted alguna herramienta didáctica que ayude en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Tabla No 12 Resultado de la pregunta No 6 (prueba final a los Estudiantes de grado décimo.)



Nota Fuente Propia

El 100% de los estudiantes encuestados reconocieron el tangram y el cardiotangram como herramientas que ayudan en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Discusión

Durante el desarrollo del proyecto aplicado se realizaron tres talleres con actividades diferentes en las cuales se da a conocer una nueva estrategia para el aprendizaje de las razones trigonométricas por medio del cardiotangram, para que los estudiantes adquirieran mejor el conocimiento, estos talleres se compilaran en una cartilla titula “el cardiotangram en el aprendizaje de las razones trigonométricas”.

Este trabajo que surge por la necesidad de reforzar temas de la matemática importantes en el grado decimo, que abarcan gran parte de la asignatura, y dejar atrás lo tradicional para convertir las clases didácticas, con diferentes estrategias como lo es los juegos matemáticos.

Esta cartilla contiene como taller uno la construcción del cardiotangram utilizando regla y compas, con el propósito de enseñar a los estudiantes a construir esta figura teniendo en cuenta la manipulación de algunos elementos y conocimientos básicos de geometría; luego se describe un segundo taller donde el estudiante realiza seis actividades, en cada una de ellas se describe un proceso para resolver las razones trigonométricas utilizando las piezas del cardiotangram, además se resaltan en cuadros o nubes aspectos que se deben tener en cuenta para el desarrollo de la actividad, y finalmente en las actividades el estudiante responde a una pregunta rescatando conocimientos ya vistos o que se encuentran en cada actividad.

Como tercer taller los estudiantes realizan el reconocimiento de ángulos formando con dos piezas del cardiotangram una circunferencia teniendo en cuenta algunas indicaciones, identificaron en la misma los cuatro cuadrantes con el fin de hallar los signos de las funciones seno, coseno y tangente, además en este se describen otras actividades que permiten al estudiante identificar ángulos y signos de las razones trigonométricas.

Las actividades con el cardiotangram, permiten el afianzamiento del aprendizaje de las razones trigonométricas, generando en los estudiantes un nuevo escenario en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Con este proyecto se pretende dejar al docente una herramienta lúdica que permita enseñar a los estudiantes de grado decimo del Colegio Nuestra Señora del Rosario Sogamoso la temática, sin ninguna dificultad teniendo en cuenta que el aprendizaje es más claro con estrategias pedagógicas, basándonos en el aprendizaje significativo y la didáctica.

Conclusiones

- Se realizó la prueba diagnóstica a los estudiantes del grado décimo, evidenciando algunas dificultades en el reconocimiento, la descripción y la resolución de problemas en las razones trigonométricas.
- Se observó que el manejo de la teoría y el juego que se desarrolla en el aula de clase permite un mejor aprendizaje de las razones trigonométricas.
- Se evidenció que al realizar las actividades del cardiotangram presentan una relación implícita y consecutiva en el aprendizaje de las razones trigonométricas, justificada en la prueba final al resolver problemas de cotidianidad.
- Se analizó por medio de las actividades que los estudiantes identifican conceptos básicos de la geometría y conocimientos obtenidos durante su vida, logrando por medio de esta, la aplicabilidad de la matemática en la solución de problemas y a la vez permite al docente, ser un guía más del conocimiento, más no un transmisor del mismo.
- Se concluye, que las actividades con el cardiotangram, permiten el afianzamiento del aprendizaje de las razones trigonométricas, generando en los estudiantes un nuevo escenario en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Recomendaciones

- Implementar proyectos durante el desarrollo de cada asignatura, dónde los docentes y los estudiantes interactúen en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Es importante que el docente para el desarrollo de sus clases utilice métodos de trabajo para que los estudiantes dejen atrás el miedo de estudiar las matemáticas.
- Es conveniente que los proyectos de este tipo continúen y así contribuir al fortalecimiento de la educación en las distintas Instituciones Educativas.

Referencias Bibliográficas

- Benavidez, (2013) Estrategia evaluativa facilitadora del mejoramiento del resultado en las pruebas Icfes. Monografía. Corporación Universitaria de la Costa, “CUC”
- Bravo, M. & Gonzales, N. (2014) “Secuencias didácticas para el aprendizaje de las razones Trigonómicas. Monografía. Universidad Católica de Manizales
- Coordinación de matemáticas. (2013) *Círculo Trigonómico* PDF, México: Universidad Nacional Autónoma. <http://cidead.cnice.mec.es>
- Cárcel, F.J. (2016). Desarrollo de habilidades mediante el aprendizaje autónomo. 3C Empresa, Investigación y pensamiento crítico, 5(3), 54-62. DOI: <https://www.3ciencias.com/wp-content/uploads/2016/08/art%C3%ADculo-4.pdf>
- Equipo Santillana (2013). *Los caminos del saber Matemáticas 6*. Bogotá: Editorial Santillana S.A.
- Estándares básicos de competencias en área de matemáticas. (2011) *Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Recuperado de: http://mineducacion.gov.co/1621/article-116042_archivo_pdf2.pdf. pág. 51-56
- Gamboa, M. & García, Y. (2014). *Lineamientos para trabajos de grado de las especializaciones. ECEDU*. Actualización 2014-II. Bogotá, D.C. Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
- Huérffano, F. & Neira, J. (2014). *Comparación del aprendizaje de las funciones trigonométricas básicas utilizando la herramienta tradicional y la herramienta tecnológica CABRI GEOMETRE II*. Monografía U.P.T.C, Tunja, Colombia
- López, C. (2014). *Desarrollo del pensamiento Matemático y su Didáctica*. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca. http://ocw.usal.es/eduCommons/ciencias-sociales-1/desarrollo-del-pensamiento-matematico-y-su-didactica-i/contenidos/2Tema_1.pdf
- Martínez Padrón, O. (2013). *La cadena explanans-explanandum como recurso para elaborar explicaciones funcionales del accionar en la clase de matemática*. En R. Flores (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25, 247-257. México: Comité Latinoamericano De matemática Educativa.
- Palmero M. (2013) *La teoría del aprendizaje significativo*. Centro de Educación a Distancia (C.E.A.D.). C/ Pedro Suárez Hdez., s/n. C.P. nº 38009 Santa Cruz de Tenerife
- Peña, C. & Vargas, J. (2015) *Unidad didáctica para la enseñanza de las funciones*

trigonométricas en la educación media utilizando el modelo de van hiele. Monografía
Universidad de los Llanos. Villavicencio.
<http://repositorio.unillanos.edu.co/bitstream/001/346/1/TESIS%20JULIAN.pdf>

Sandoval, C. (2013) *Investigacion Culaitativa*, Colombia , COPYRIGHT: ICFES
<https://panel.inkuba.com/sites/2/archivos/manual%20colombia%20cualitativo.pdf>

Riofrío, E. & Samaniego, A. (2015) *Guía didáctica para la enseñanza de la trigonometría para segundo año de bachillerato del Colegio Fray Vicente Solano mediante Geogebra*, Monografía. Universidad de Cuenca. Ecuador.
<http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/23165/1/Tesis.pdf>

Rodríguez, Y. & Galindo, Z. (2015). “*Material educativo computarizado para el aprendizaje de las razones trigonométricas e introducción a sus funciones*”. Monografía Tunja, Colombia

Villorael S. (2013). Revista Iberoamericana de educación matemática, artículo: *Enseñanza de la geometría en secundaria caracterización de materiales didácticos concretos y habilidades geométricas*.

Anexos

ANEXO No 1. "Prueba Diagnostico"

PRUEBA DIAGNÓSTICO

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO	
ÁREA: Matemáticas	TEMA: Razones Trigonómicas
ASIGNATURA: Matemáticas	GRADO: undécimo

OBJETIVO: Identificar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre las razones trigonométricas.

NOTA: La siguiente prueba debe ser resuelta con esmero, claridad y mucha honestidad.



1. ¿Conoce las razones trigonométricas?

2. Asocia la razón trigonométrica con su definición.

a. $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

b. $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

c. $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

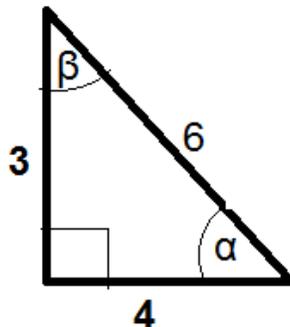
1. Seno 2. Coseno 3. Tangente 4. Secante 5. Cosecante 6. Cotangente

d. $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

e. $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

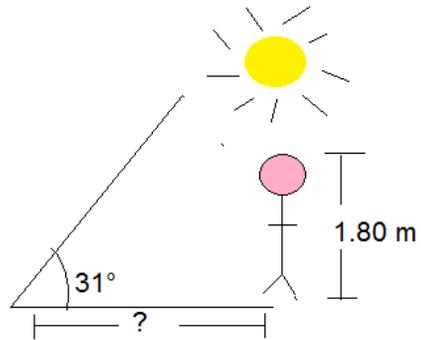
f. $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

3. para el triángulo rectángulo, halle el seno, coseno tangente del ángulo α y el ángulo β .



4. Solucione el siguiente problema

Si el ángulo de elevación del sol es de 31° , calcular la longitud de la sombra proyectada por un hombre de 1.80m de estatura.

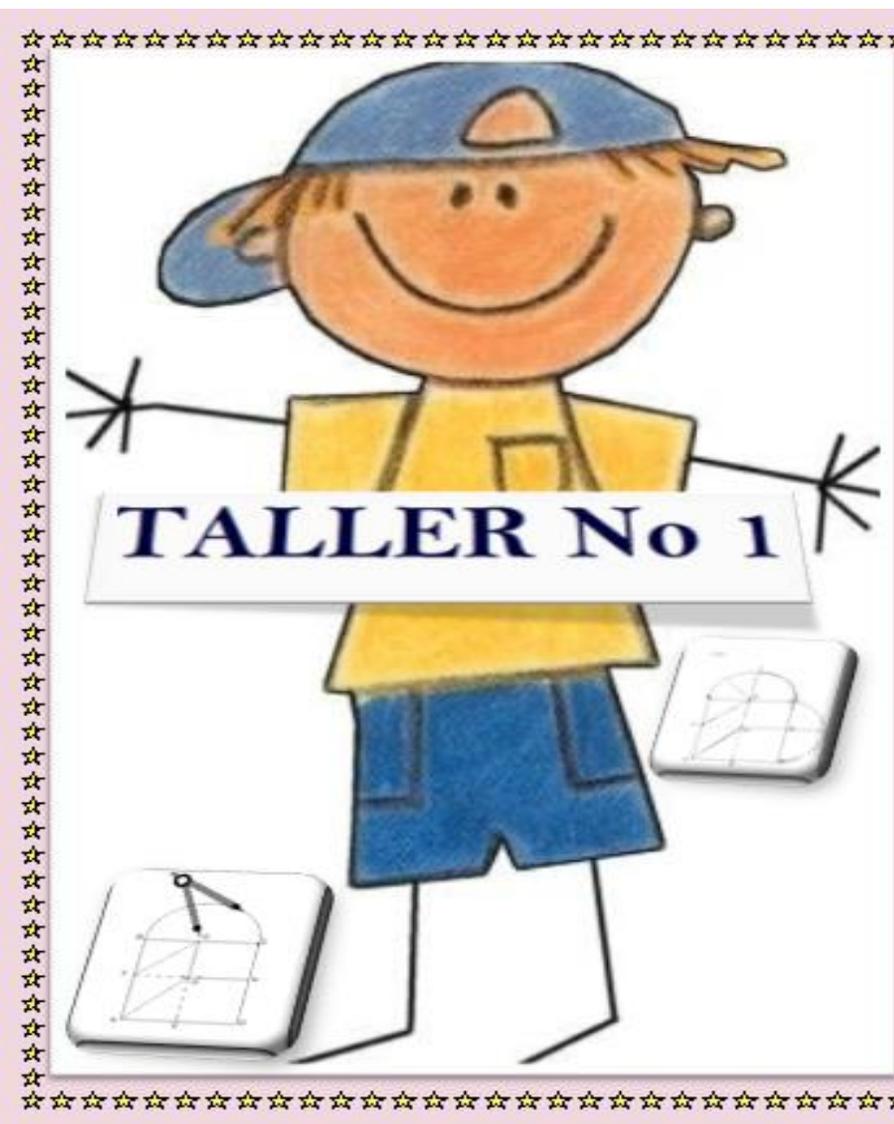


6. Conoce usted alguna herramienta didáctica que ayude en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Si _____ no _____

Cuales? _____

Anexo 2 “taller No 1”



CONSTRUCCIÓN DEL CARDIOTANGRAM

OBJETIVO: Construir el cardiogram para usarlo en la práctica de algunos conceptos matemáticos.

“CONSTRUYE TU PROPIO CORAZÓN”

MATERIALES

- Un octavo de cartulina
- Compas
- Regla
- Tijeras
- Lápiz

NOTA: Todos los pasos que se describen a continuación se realizan en la misma cartulina, el cuadrado debe hacerse en uno de los extremos de la cartulina.

PASO 1. En la cartulina dibuja un cuadrado de 15cm x 15cm

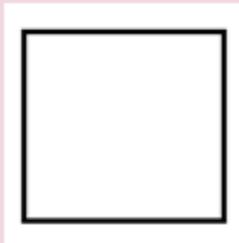


Figure 1

PASO 2: Nombra con letras mayúsculas cada uno de los vértices del cuadrado.

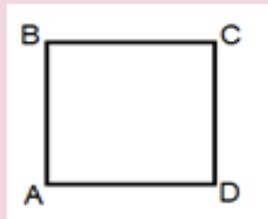


Figure 2

PASO 3: Traza dos líneas punteadas horizontal y vertical de tal manera que dividan al cuadrado en cuatro partes iguales.

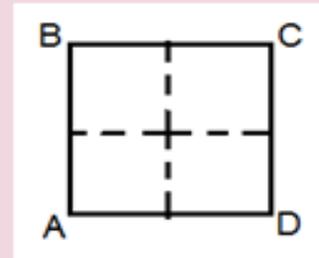


Figure 3

PASO 4: Nombra con letras el punto de intersección entre las líneas punteadas y el cuadrado; y el punto de intersección de las líneas punteadas

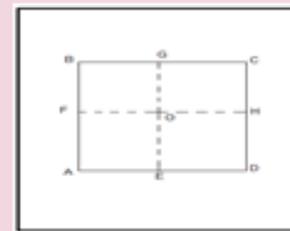


Figure 4

PASO 5: Traza con la regla una línea que una los puntos A y O.

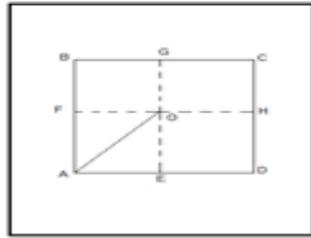


Figura 5

PASO 6: Traza con la regla una línea que una los puntos F y G.

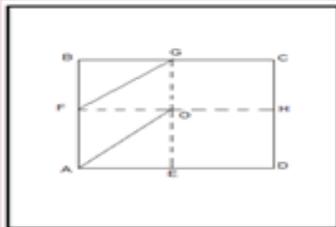


Figura 6

PASO 7: Traza con la regla los segmentos \overline{OG} y \overline{OH} .

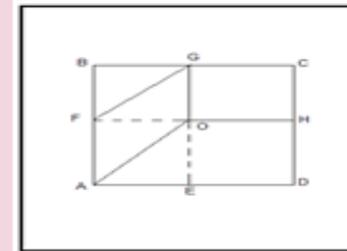


Figura 7

PASO 8: Toma el compás y dibuja un semicírculo con centro en el punto G y radio igual a la distancia de el segmento \overline{BG} ; de tal manera que el semicírculo quede en la parte superior del segmento \overline{BC} .

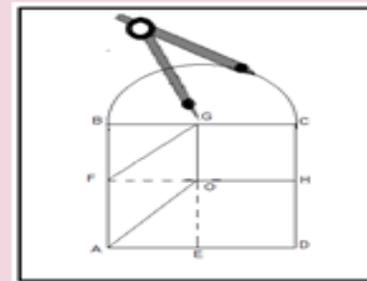


Figura 8

PASO 9: Toma el compas y dibuja un semicírculo con centro en el punto H y radio igual a la distancia de el segmento \overline{CH} ; de tal manera que el semicírculo quede en la parte superior de el segmento \overline{CD} .

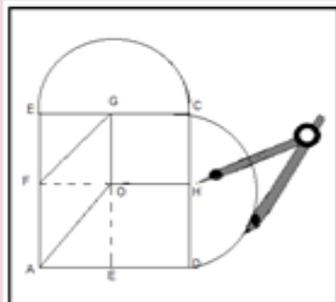


Figura 9

PASO 10: Prolonga el segmento \overline{OG} de tal forma que intercepte con el borde del semicírculo, y ha este punto de intersección lo nombrara J.

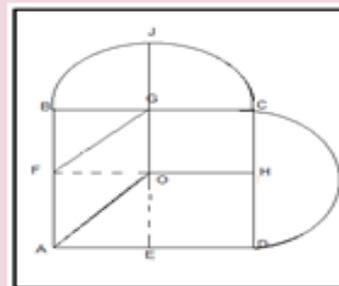


Figura 10

PASO 11: Prolonga el segmento \overline{OH} de tal forma que intercepte con el borde del semicírculo, y ha este punto de intersección lo nombrara K.

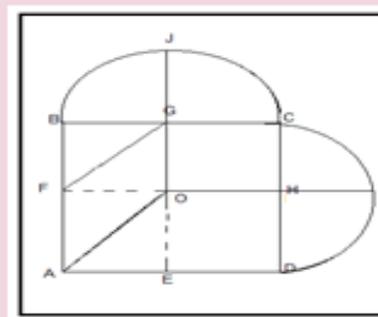


Figura 11

PASO 12: Ubica la punta del compas en el punto J y dibuja una marca fuera de la figura, de tal manera que la distancia de la marca al punto J sea la misma del radio que se tomo para el semicírculo.

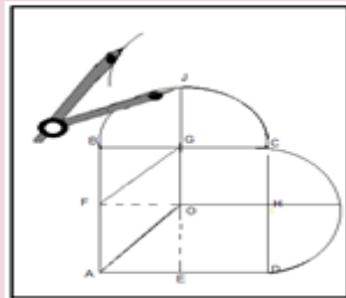


Figura 12

PASO 13: Ubica la punta del compas en el punto B y dibuja una marca fuera de la figura, de tal manera que la distancia de la marca al punto B sea la misma del radio que se tomo para el semicírculo.

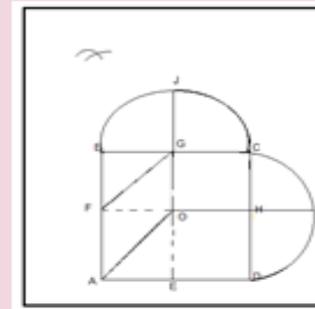


Figura 13

PASO 14: Toma la regla y ubícala desde el punto G hasta la marca que se hizo fuera de la figura y traza un segmento desde en el punto G hasta que intercepte con el borde de el semicírculo.

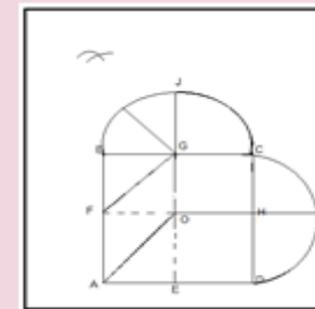
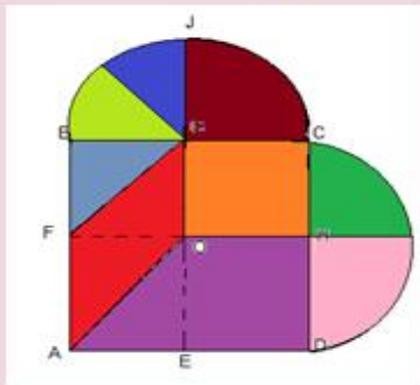


Figura 14

PASO 15: Borra las líneas punteadas que quedaron en la figura.

PASO 16: Corta las figuras formadas para obtener las nueve piezas del cardiotangram.



"ESTUDIAR ES DIVERTIDO CUANDO GOZAS LO APRENDIDO, Y
ESE GUSTO ESTA PRESENTE EN LAS CIENCIAS QUE TU
APRENDES"



TALLER No 2

Anexo 3 “taller No 2”

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

ACTIVIDAD 1: “RAZONES TRIGONOMÉTRICAS”

“Si te atreves a enseñar, no dejes de aprender”

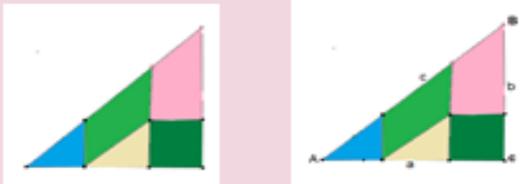
OBJETIVO: Reconoce por medio del cardiotangram las razones trigonométricas

Reúnete con tus compañeros....

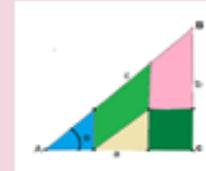
¡DESCUBRE!

1. Toma el cardiotangram y forme un triángulo rectángulo (para esto se utilizaran 5 piezas).

➤ Asigne a cada vértice del triángulo letras mayúscula, y a las longitudes del triángulo letras minúsculas.



➤ El ángulo que se forma entre el segmento \overline{AB} y el segmento \overline{AC} se llamara α .



2. A partir del triángulo formado por las cinco piezas del cardiotangram; defina las razones trigonométricas.



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{b}{c} & \cos \alpha &= \frac{a}{c} \\ \tan \alpha &= \frac{b}{a} \\ \csc \alpha &= \frac{c}{b} & \sec \alpha &= \frac{c}{a} \\ \cot \alpha &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

➤ Ahora llamaremos a c la hipotenusa, a cateto adyacente, b cateto opuesto; defina las relaciones trigonométricas de la siguiente forma y completa el cuadro.

$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos \alpha =$ _____	$\tan \alpha =$ _____
$\cot \alpha =$ _____	$\sec \alpha =$ _____	$\csc \alpha =$ _____

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

ACTIVIDAD 1: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

"Si te atreves a enseñar, no dejes de aprender"

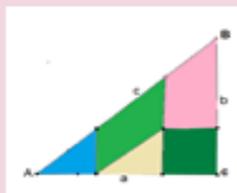
OBJETIVO: Reconoce por medio del cardiotangram las razones trigonométricas

Reúnete con tus compañeros....

¡DESCUBRE!

1. Toma el cardiotangram y forme un triángulo rectángulo (para esto se utilizaran 5 piezas).

- Asigne a cada vértice del triángulo letras mayúscula, y a las longitudes del triángulo letras minúsculas.



- El ángulo que se forma entre el segmento \overline{AB} y el segmento \overline{AC} se llamara α .



2. A partir del triángulo formado por las cinco piezas del cardiotangram; defina las razones trigonométricas.



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{b}{c} & \cos \alpha &= \frac{a}{c} \\ \tan \alpha &= \frac{b}{a} \\ \csc \alpha &= \frac{c}{b} & \sec \alpha &= \frac{c}{a} \\ \cot \alpha &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

- Ahora llamaremos a c la hipotenusa, a cateto adyacente, b cateto opuesto; define las relaciones trigonométricas de la siguiente forma y completa el cuadro.

$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos \alpha =$ _____	$\tan \alpha =$ _____
$\cot \alpha =$ _____	$\sec \alpha =$ _____	$\csc \alpha =$ _____

ACTIVIDAD 2: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

"Lo que somos comunica mucho más elocuentemente que cualquier cosa que hacemos". *Stephen R. Covey*

OBJETIVO: Resuelve ejercicios utilizando el cardiotangram cuya solución implica aplicación de relaciones trigonométricas

¡RESUELVE!

1. Tome el triángulo rectángulo formado por las piezas del cardiotangram.

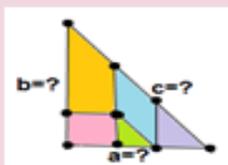


- Mida con la regla cada uno de los lados del triángulo.

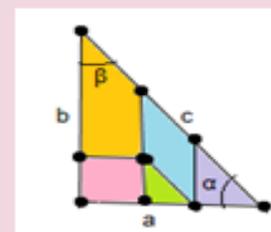
a = _____

b = _____

c = _____



2. Para cada razón trigonométrica determine el ángulo α y β .



3. Complete la tabla de acuerdo a los valores que obtenga.

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{c} =$	$\text{cos } \alpha =$ _____	$\text{tan } \alpha =$ _____
$\text{cotg } \alpha =$ _____	$\text{sec } \alpha =$ _____	$\text{csc } \alpha =$ _____
$\text{sen } \beta = \frac{a}{c} =$	$\text{cos } \beta =$ _____	$\text{tan } \beta =$ _____
$\text{cotg } \beta =$ _____	$\text{sec } \beta =$ _____	$\text{csc } \beta =$ _____

4. Conteste y discuta con los compañeros.



¿Es posible solucionar ángulos de triángulos obtusos, equiláteros, isósceles, con las razones trigonométricas que crees?.....

ACTIVIDAD 3: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

"Aprender es descubrir que algo es posible"

J. Krishnamurti

OBJETIVO: Resuelve situaciones utilizando el cardiotangram, relacionando las relaciones trigonométricas.

¡CONSTRUYE Y RESUELVE!

1. Arma con las piezas del cardiotangram las siguientes figuras.



Figure 1



Figure 2

2. Busque en cada una de las figuras formadas el triángulo rectángulo más grande, y describa las razones trigonométricas para el ángulo α y β .



No olvides:

- ❖ Mide los lados de los triángulos para cada caso.
- ❖ Para cada razón trigonométrica halle su ángulo α y β .

3. Complete de acuerdo a los datos obtenidos.

FIGURA 1.

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{c} =$	$\text{cos } \alpha = \text{---} =$	$\text{tan } \alpha = \text{---} =$
$\text{cotg } \alpha = \text{---} =$	$\text{sec } \alpha = \text{---} =$	$\text{csc } \alpha = \text{---} =$

$\text{sen } \beta = \frac{a}{c} =$	$\text{cos } \beta = \text{---} =$	$\text{tan } \beta = \text{---} =$
$\text{cotg } \beta = \text{---} =$	$\text{sec } \beta = \text{---} =$	$\text{csc } \beta = \text{---} =$

FIGURA 2.

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{c} =$	$\text{cos } \alpha = \text{---} =$	$\text{tan } \alpha = \text{---} =$
$\text{cotg } \alpha = \text{---} =$	$\text{sec } \alpha = \text{---} =$	$\text{csc } \alpha = \text{---} =$

$\text{sen } \beta = \frac{b}{c} =$	$\text{cos } \beta = \text{---} =$	$\text{tan } \beta = \text{---} =$
$\text{cotg } \beta = \text{---} =$	$\text{sec } \beta = \text{---} =$	$\text{csc } \beta = \text{---} =$

4. Discute con tus compañeros



Las razones trigonométricas sirven para medir longitudes utilizando ángulos y ángulos utilizando longitudes...

ACTIVIDAD 4: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

Es que aprende y aprende y no practica lo que sabe es como el que ara y ara y nunca siembra. Platón

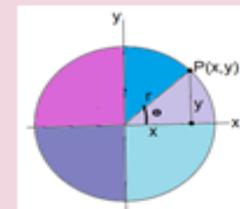
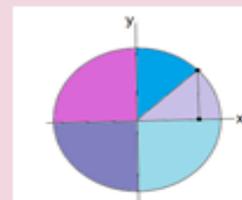
OBJETIVO: Representar las razones trigonométricas en una circunferencia formada por el cardiotangram.

¡CONSTRUYE!

1. Tome las piezas del cardiotangram y construya una circunferencia de tal manera en la parte superior queden tres piezas. (Utiliza solo cinco piezas)



- ✓ Los segmentos que dividen la circunferencia será el plano cartesiano.
- ✓ En la parte superior de la circunferencia se formará un triángulo rectángulo.
- ✓ El punto que se forma entre la circunferencia y el triángulo tendrá como coordenadas $P(x, y)$.
- ✓ r será la hipotenusa, y el cateto opuesto, x el cateto adyacente del triángulo formado dentro de la circunferencia.
- ✓ El ángulo que se forma entre la hipotenusa y el cateto adyacente lo llamarás θ .



2. Definamos las razones trigonométricas respecto al ángulo θ , así:



$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{y}{r} & \text{cos } \theta &= \frac{x}{r} & \text{tan } \theta &= \frac{y}{x}, x \neq 0 \\ \text{cotg } \theta &= \frac{x}{y}, y \neq 0 & \text{sec } \theta &= \frac{r}{x}, x \neq 0 & \text{csc } \theta &= \frac{r}{y}, y \neq 0 \end{aligned}$$

➤ Ahora si r es el radio, x es la abscisa, y y es la ordenada, defina las relaciones trigonométricas de la siguiente forma y completa el cuadro.

$\text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}}$	$\text{cos } \theta = \underline{\hspace{2cm}}$	$\text{tan } \theta = \underline{\hspace{2cm}}$
$\text{cotg } \theta = \underline{\hspace{2cm}}$	$\text{sec } \theta = \underline{\hspace{2cm}}$	$\text{csc } \theta = \underline{\hspace{2cm}}$

ACTIVIDAD 5: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

"Se ve que las matemáticas son gratas a la gente y útiles para los pobres". S. José de Calasanz

OBJETIVO: Resuelve en la circunferencia del cardiotangram el ángulo θ hallando las razones trigonométricas.

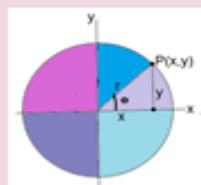
¡IDENTIFICA!

1. Tome la circunferencia formada con las piezas del cardiotangram. (Recuerde que el triángulo rectángulo se forma en la parte superior de la circunferencia.)



✓ Mida con la regla cada uno de los lados del triángulo rectángulo que está dentro de la circunferencia.

$r =$ _____
 $y =$ _____
 $x =$ _____



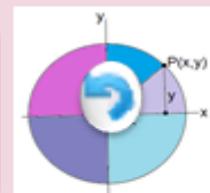
2. Para cada relación trigonométrica determine el ángulo θ , y completa la tabla con los datos que se obtuvieron.

$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} =$ _____	$\operatorname{cos} \theta =$ _____	$\operatorname{tan} \theta =$ _____
$\operatorname{cotg} \theta =$ _____	$\operatorname{sec} \theta =$ _____	$\operatorname{csc} \theta =$ _____

3. Tome la circunferencia y gírela en sentido contrario a las manecillas del reloj y contesta la siguiente pregunta. Discute con tus compañeros.



Es posible de esta forma definir las razones trigonométricas. Justifica tu respuesta...



No olvides que: los valores de x , y pueden ser positivos o negativos: el valor de x es exclusivamente positivo.

ACTIVIDAD 6: "RAZONES TRIGONOMÉTRICAS"

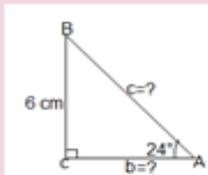
"Ha de saber las matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas." (Quijote II, 18)

OBJETIVO: Aplicar las razones trigonométricas en problemas de la vida cotidiana.

¡RESUELVE!



María acaba de perder una de las nueve piezas de su cardiotangram. Pero ella solo se acuerda que es un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 24° y su cateto opuesto mide 6 cm. Ayuda a María a encontrar las medidas del triángulo utilizando las razones trigonométrica.



DATOS:

- a = 6 cm
- Angulo C = 90°
- Angulo A = 24°

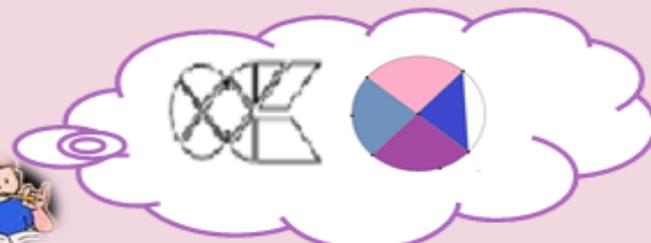
INCÓGNITAS:

- b = ?
- c = ?

RECUERDA: Que para solucionar el problema de María, primero debemos identificar las razones trigonométricas que comparan los datos conocidos.



Felipe en su tiempo libre se dedica a armar diferentes figuras con el cardiotangram. Para aprender más las razones trigonométricas lo único que no sabe es que en la figura que está formando se encuentra una circunferencia en donde puede definir las razones trigonométricas respecto al ángulo θ . Ayuda a Felipe a definir las razones trigonométricas.

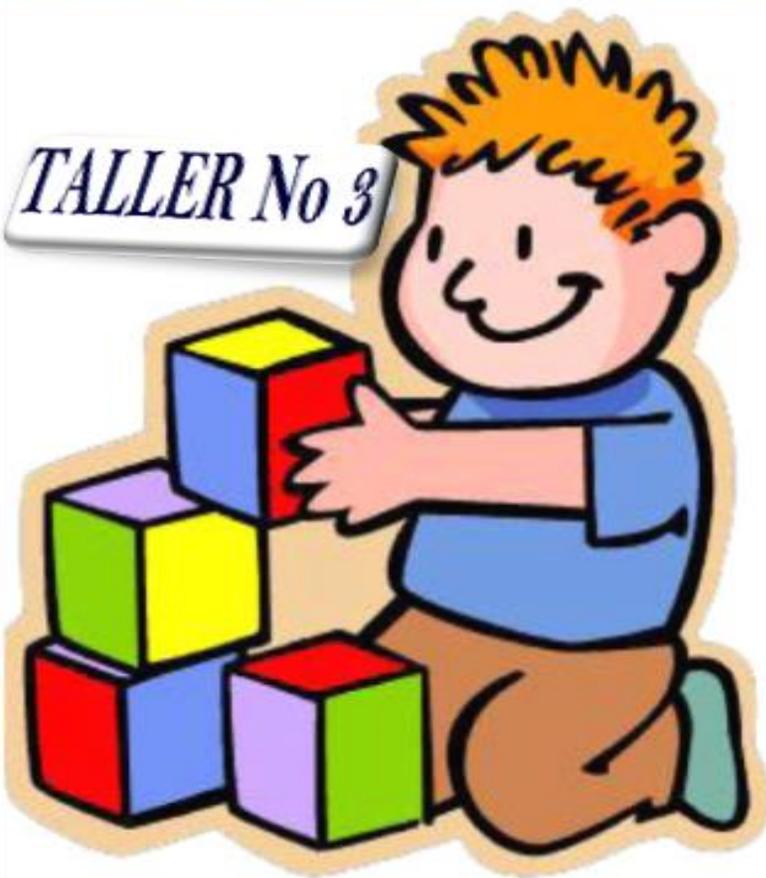


- ✓ Nombra la abscisa, ordenada y radio para definir las razones trigonométricas.



RECUERDA: Que x es la abscisa, y la ordenada, r el radio.

TALLER No 3



SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS $\text{sen}\theta$ $\text{cos}\theta$ y $\text{tan}\theta$

ACTIVIDAD 1: "CIRCULO GONIOMETRICO"

"Culturano es sino aquello que queda en el espíritu después de haber olvidado todo lo aprendido en el periodo escolar" P. Puig Adam y J.

Rey Pastor

OBJETIVO: Utiliza la circunferencia del cardiotangram para los signos de seno, coseno, tangente en los cuatro cuadrantes.

¡CONSTRUYE Y ANALIZA!

1. Tome la circunferencia formada con las piezas del cardiotangram. (Recuerde que en la parte superior de la circunferencia van tres piezas.)

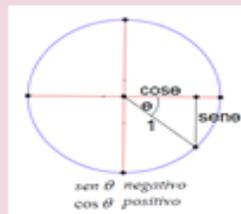
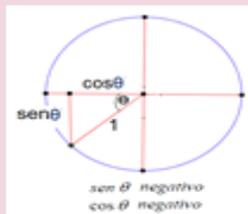
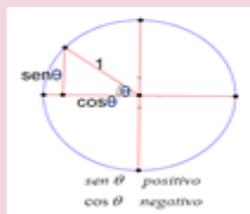


- ✓ La circunferencia está dividida en cuatro partes, cada una de ellas será un cuadrante.
- ✓ Forma en la parte superior el triángulo rectángulo, el cateto opuesto es seno, el cateto adyacente es coseno, y la hipotenusa es 1. (La hipotenusa se obtiene empleando el teorema de Pitágoras)
- ✓ El ángulo que se forma entre la hipotenusa y el cateto adyacente lo nombrarás θ (los ángulos se notan con las letras griegas)

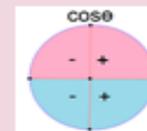
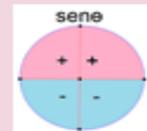


2. Representaremos los signos de seno, coseno en cada cuadrante.
- Tome el triángulo re y rótelolo en cada cuadrante, para obtener los signos de las funciones seno y coseno en cada cuadrante.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS $\text{sen}\theta$ y $\text{cos}\theta$



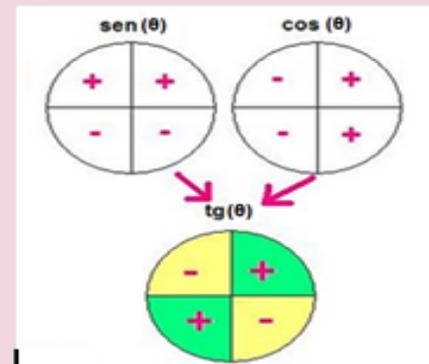
- Finalmente con ayuda del cardiotangram obtuvimos los signos para las funciones seno y coseno.



SIGNO DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA $\text{tan}\theta$

Para obtener los signos de la función $\text{tan}\theta$, se multiplican los signos de seno y coseno que corresponden a cada cuadrante.

- Recuerda: que la $\text{tan}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$



¡RESUELVE!

- Tome el graduador y ubíquelo sobre la circunferencia formada con el cardiotangram, para identificar los siguientes ángulos si son positivos o negativos de acuerdo a la función trigonométrica.

Ejemplo:

El $\text{sen } 30^\circ$ es positivo y el $\text{cos } 30^\circ$ es positivo.

1. Complete:

El $\text{sen } 45^\circ$ _____ y el $\text{cos } 45^\circ$ _____.

El $\text{sen } 135^\circ$ _____ y el $\text{cos } 135^\circ$ _____.

El $\text{sen } 225^\circ$ _____ y el $\text{cos } 225^\circ$ _____.

El $\text{sen } 315^\circ$ _____ y el $\text{cos } 315^\circ$ _____.

La $\text{tan } 60^\circ$ _____.

2. Discute...



Que pasara con el $\text{sen } 90^\circ$, $\text{sen } 180^\circ$,
 $\text{sen } 270^\circ$, $\text{cos } 90^\circ$, $\text{cos } 180^\circ$, $\text{cos } 270^\circ$;
que signos tomaran estas funciones.....

VALOR DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA EL ÁNGULO DE 30° , 45° , 60°

ACTIVIDAD 2: "CIRCULO GONIOMÉTRICO"

"Las matemáticas no sólo poseen la verdad, sino la suprema belleza."
Bertrand Russell

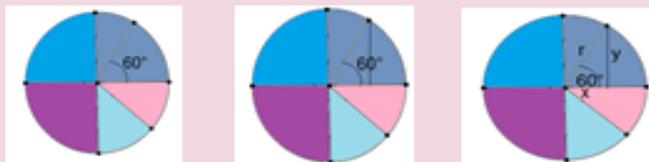
OBJETIVO: Utiliza el cardiotangram para reconocer el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 60° .

¡RESUELVE Y DESCUBRE!

1. Arma con las piezas del cardiotangram la circunferencia. (Para este caso en la parte superior de la circunferencia van dos piezas)



- ✓ Tome el graduador y ubícalo sobre la circunferencia formada con las piezas del cardiotangram.
- ✓ Marca y traza un ángulo de 60° sobre la circunferencia.
- ✓ Dibuja el triángulo que se forma al trazar el ángulo

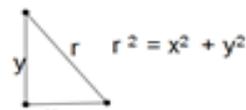


- ✓ Nombraras a "r" radio, "y" ordenada, "x" abscisa al triángulo formado en la circunferencia.
- ✓ El radio, abscisa y ordenada tomaran los siguientes valores...

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad r = 1 \quad x = \frac{1}{2}$$

- ✓ Debes obtener el valor de "y"; utilizando el teorema de pitágoras .

RECUERDA: EL TEOREMA DE PITÁGORAS



- Ahora obtendremos el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 60°. (Utilizando las razones trigonométricas.)

RECUERDA QUE:

1. Debes definir primero las razones trigonométricas para cada función.
2. Reemplazar los valores obtenidos del radio, abscisa y ordenada
3. obtendrás el valor del ángulo 60° en cada función.

2. Completa la tabla y obtendrás los valores de las razones trigonométricas par el ángulo de 30°.

$$\begin{aligned} \text{sen } 60^\circ &= \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{cos } 60^\circ &= \\ \text{tan } 60^\circ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{csc } 60^\circ &= \\ \text{sec } 60^\circ &= \\ \text{ctg } 60^\circ &= \end{aligned}$$

ACTIVIDAD 3: "CIRCULO GONIOMÉTRICO"

Las Matemáticas rigurosas se hacen con la mente, las Matemáticas hermosas se hacen con el corazón.
Claudia Aizawa

OBJETIVO: Utiliza el cardiotangram para reconocer el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 30° .

¡RESUELVE Y DESCUBRE!

1. Arma con las piezas del cardiotangram la circunferencia. (Para este caso en la parte superior de la circunferencia van dos piezas)



- ✓ Tome el graduador y ubíquelo sobre la circunferencia formada con las piezas del cardiotangram.
- ✓ Marca y traza un ángulo de 30° sobre la circunferencia.
- ✓ Dibuja el triángulo que se forma al trazar el ángulo

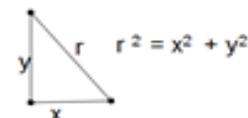


- ✓ Nombraras a "r" radio, "y" ordenada, "x" abscisa al triángulo formado en la circunferencia.
- ✓ El radio, abscisa y ordenada tomaran los siguientes valores...

$$y = \frac{1}{2} \quad r = 1 \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- ✓ Debes obtener el valor de "y" ; utilizando el teorema de pitágoras .

RECUERDA: EL TEOREMA DE PITÁGORAS



- Ahora obtendremos el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 30° . (Utilizando las razones trigonométricas)

RECUERDA QUE:

1. Debes definir primero las razones trigonométricas para cada función.
2. Reemplazar los valores obtenidos del radio, abscisa y ordenada
3. obtendrás el valor del ángulo 30° en cada función.

2. Completa la tabla y obtendrás los valores de las razones trigonométricas par el ángulo de 30° .

$$\text{sen}30^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ =$$

$$\text{tan } 30^\circ =$$

$$\text{csc } 30^\circ =$$

$$\text{sec } 30^\circ =$$

$$\text{cotg } 30^\circ =$$

ACTIVIDAD 4: "CIRCULO GONIOMÉTRICO"

"En Matemáticas el arte de de proponer problemas, es mucho más estimulante que el de resolverlos"
Georg Cantor

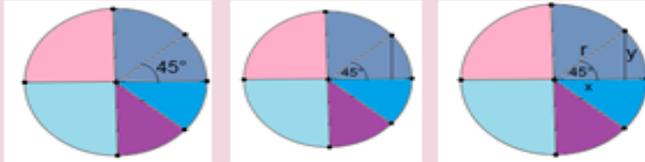
OBJETIVO: Utiliza el cardiotangram para reconocer el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 45° .

¡RESUELVE Y DESCUBRE!

1. Arma con las piezas del cardiotangram la circunferencia. (Para este caso en la parte superior de la circunferencia van dos piezas)

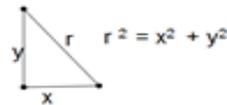


- ✓ Tome el graduador y ubícalo sobre la circunferencia formada con las piezas del cardiotangram.
- ✓ Marca y traza un ángulo de 45° sobre la circunferencia.
- ✓ Dibuja el triángulo que se forma al trazar el ángulo



- ✓ Nombraras a "r" radio, "y" ordenada, "x" abscisa al triángulo formado en la circunferencia.
- ✓ El radio, abscisa y ordenada tomaran los siguientes valores...
- ✓ Debes obtener el valor de "r"; utilizando el teorema de pitágoras .

RECUERDA: EL TEOREMA DE PITÁGORAS



➤ Ahora obtendremos el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 45°. (Utilizando las razones trigonométricas)

RECUERDA QUE:

1. Debes definir primero las razones trigonométricas para cada función.
2. Reemplazar los valores obtenidos del radio, abscisa y ordenada
3. obtendrás el valor del ángulo 45° en cada función

2. Completa la tabla y obtendrás los valores de las razones trigonométricas par el ángulo de 45°.

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{y}{r} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ =$$

$$\text{tan } 45^\circ =$$

$$\text{csc } 45^\circ =$$

$$\text{sec } 45^\circ =$$

$$\text{ctg } 45^\circ =$$

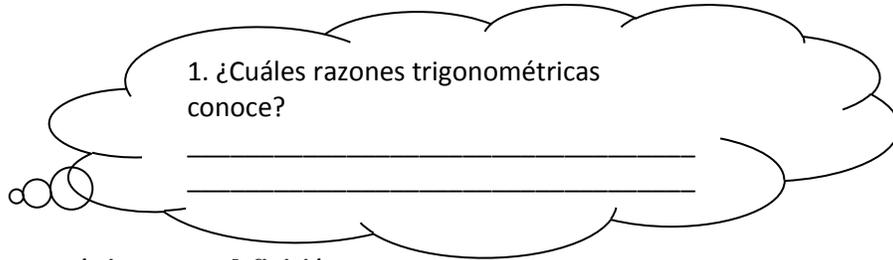
ANEXO 5 “Prueba final”

Trabajo de grado: Razones Trigonómicas¹ PRUEBA FINAL

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO	
ÁREA: Matemáticas	TEMA: Razones Trigonómicas
ASIGNATURA: Matemáticas	GRADO: Décimo

OBJETIVO: Identificar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre las razones trigonométricas.

NOTA: La siguiente prueba debe ser resuelta con esfero, claridad y mucha honestidad.



2. Asocia la razón trigonométrica con su definición.

a. $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

b. $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

c. $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

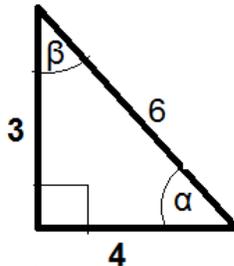
1. Seno 2. Coseno 3. Tangente 4. Secante 5. Cosecante 6. Cotangente

d. $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

e. $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

f. $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

3. para el triángulo rectángulo POR, halle el seno, coseno tangente del ángulo α y el ángulo β .



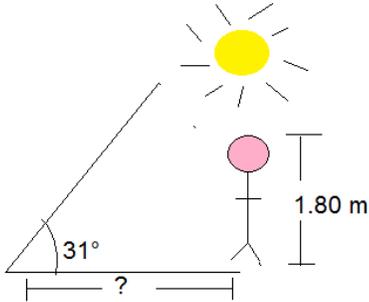
4. Para cada ángulo 30° , 45° , 60° escriba el valor de la razón trigonométrica.

RAZÓN \ ÁNGULO	Sen	Cos	Tan	Csc	Sec	Ctg
30°						
45°						

60°						
-----	--	--	--	--	--	--

5. Solucione el siguiente problema

Si el ángulo de elevación del sol es de 31°, calcular la longitud de la sombra proyectada por un hombre de 1.80m de estatura.



6. Conoce usted alguna herramienta didáctica que ayude en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Si _____ no _____

Cuales? _____
